

**YILDIZIL HARMONİK YALINKAT
FONKSİYONLAR**

Sibel KOPARAL



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YILDIZIL HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

SİBEL KOPARAL

DOÇ. DR. METİN ÖZTÜRK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA, 2011
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

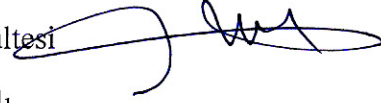
Sibel KOPARAL tarafından hazırlanan “Yıldızıl Harmonik Fonksiyonlar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

Başkan : Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

U. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Sibel YALÇIN

U. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. İlhan TAPAN

U. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Fizik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Enstitü Müdürü

27/07/2011

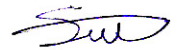
**U. Ü. Fen BİLİMLERİ Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım
bu tez çalışmasında;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/07/2011

Sibel KOPARAL



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YILDIZIL HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Sibel KOPARAL

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

Bu çalışmada, yıldızil harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın bazı alt sınıfları tanımlandı. Bu sınıflara ait fonksiyonların çeşitli özellikleri incelendi.

Çalışmanın birinci bölümünde, ikinci ve üçüncü bölümlere temel oluşturacak kavramlar verildi.

Çalışmanın ikinci bölümünde, yalınkat fonksiyonların S sınıfı ile yıldızil ve konveks analitik fonksiyonların temel özellikleri üzerinde duruldu.

Üçüncü bölüm ise çalışmanın ana kısmını oluşturmaktadır. Reel ve sanal kısımları eşlenik olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve onun yıldızil alt sınıfı hakkında genel bilgiler verildi. Ayrıca alfa mertebeli ve belli katsayı bağıntısını sağlayan yıldızil harmonik fonksiyonların temel özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Harmonik fonksiyonlar, harmonik yalınkat yıldızil fonksiyonlar.

2011, vii + 54 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

HARMONIC UNIVALENT FUNCTIONS WITH STARLIKE

Sibel KOPARAL

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

In this work, the class of harmonic univalent functions with starlike and some subclasses are defined. Various properties of these functions that belonging to these classes are examined.

At the first section of this work, we give some basic concepts which we use at the second and third sections.

In the second part of the work, devoted to main features of the class of S which is analytic univalent functions with starlike and convex functions.

The third section is the main part of the study. About the class of real and imaginary parts have to be a non-conjugate complex valued harmonic functions and its starlike subclass general information was given. In addition, basic properties of alpha-order and starlike harmonic functions which have some coefficients inequality were examined.

Key Words: Harmonic functions, harmonic univalent functions with starlike.

2011, vii + 54 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim esnasında her türlü bilgi ve deneyimini benden esirgemeyen ve her zaman bana destek olan çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca matematik öğrenimime katkısı olan tüm hocalarım ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Sibel KOPARAL
19/07/2011

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	1
2. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR	9
2.1 Yalınkat Fonksiyonların S Sınıfı	9
2.2 Yıldızıl ve Konveks Analitik Fonksiyonlar.....	20
3. HARMONİK YILDIZIL DÖNÜŞÜMLER	30
3.1. Kompleks Harmonik Dönüşümler	30
3.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonların S_H Sınıfı.....	32
3.3. Yıldızıl Harmonik Fonksiyonlar.....	36
3.4. α Mertebeli Yıldızıl Harmonik Fonksiyonlar.....	38
3.5 Negatif Katsayılı Yalınkat Harmonik Fonksiyonlar	45
3.6 Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar	49
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	54

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\circ$	
A	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
∂A	A kümesinin sınır noktalarının kümesi
$\mathbb{D}$	Birim daire
$C^1(B)$	B bölgesinde 1. mertebeden sürekli kısmi türeve sahip fonksiyonların sınıfı
$A(G)$	G kümesinde tanımlı analitik fonksiyonlarının kümesi
$A_U(G)$	G kümesinde tanımlı analitik yalınkat fonksiyonlarının kümesi
$C(G)$	G kümesinde tanımlı sürekli fonksiyonlarının kümesi
$\operatorname{Re} f$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f$	f fonksiyonunun imajiner kısmı
$f'(z_0)$	f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi
f_z	f fonksiyonunun z ye göre kısmi türevi
J_f	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$\overline{f}$	f fonksiyonunun eşleniği
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
Δu	u fonksiyonunun Laplasyeni
HS	Harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı
HS^0	Harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı

N_H^{*0}	Negatif katsayılı yalınkat harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
S_H	Yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı
S_H^0	Yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı
$S_H(D, \Omega)$	D den Ω üzerine yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı
S_H^*	Yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı
S_H^{*0}	Yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı
$S_H^*(\alpha)$	α mertebeli yıldızıl harmonik fonksiyonların sınıfı
$T_H^*(\alpha)$	α mertebeli yıldızıl harmonik fonksiyonların alt sınıfı
$D^*(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş açık daire
$\overline{D}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı daire
$C_r = \partial D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık dairenin sınırı
$D_r = D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık daire
$\theta(z, w)$	z den w ye yönlendirilmiş açı
Z_f	f fonksiyonunun basit kapalı bir eğri içindeki sıfır yerlerinin sayısı
P_f	f fonksiyonunun basit kapalı bir eğri içindeki kutup yerlerinin sayısı
$n(\gamma, z)$	γ eğrisinin z etrafındaki dönme sayısı (indeksi)
$k(z)$	Koebe fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu.....	10
Şekil 2.2. $\varphi(z) = z - 2 + \frac{1}{z}$ fonksiyonu altında birim dairenin resmi.....	14
Şekil 2.3. $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$	19
Şekil 2.4. $f(D_r)$ bölgesinin yıldızlılığı	21
Şekil 2.5. $f(D_r)$ bölgesinin konveksliği	24
Şekil 3.1. $f(z) = z + \frac{1}{n} \bar{z}^n$ fonksiyonu altında $n=2$ ve $n=3$ için birim dairenin resmi...32	
Şekil 3.2. $K(z) = \operatorname{Re}[(z + \frac{1}{3} z^3)/(1 - z)^3] + i \operatorname{Im}[z/(1 - z)^2]$ fonksiyonu altında birim ... dairenin resmi	36

1. GİRİŞ

Bu bölümde, gelecek bölümlerde kullanılacak temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgiler (Palka 1991) ve (Conway 1973) kaynaklarında bulunabilir.

1.1 Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$

$$D^*(z_0, r) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık daire*, *kapalı daire*, *delinmiş açık daire* ve *çember* denir. Kısalık olsun diye $D(0, r)$ açık dairesi D_r ile ve D_1 birim dairesi de $\mathbb{D}$ ile gösterilir.

1.2 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise A ya *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* adı verilir. Bir A kümesini bulunduran kapalı kümelerin en darına (kesişimine) A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A kümesinin bulundurduğu en geniş açık kümeye, başka bir deyişle A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir ve A kümesinin içi $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir.

1.3 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere her $D(z, r)$ dairesi ile hem A hem de A 'nın tümleyeni olan A^c kümesinin kesişimi boş kümeden farklı ise z noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir. A kümesinin sınır noktalarının kümesi ∂A ile gösterilir. Gerçekte $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ dır.

1.4 Tanım. (z_n) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n doğal sayıları için $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (z_n) dizisine z_0 noktasına *yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ veya $z_n \rightarrow z_0$ biçiminde gösterilir.

1.5 Teorem. $z_0 \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ olacak şekilde A da bir (z_n) dizisinin mevcut olmasıdır (Conway 1995).

1.6 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap D(z_0, \delta)] \subset D(f(z_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap D(z, \delta)] \subset D(f(z), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim z_n = z_0$ özelliğinde her bir (z_n) dizisi için $\lim f(z_n) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. $\mathbb{C}$ de dizisel süreklilik ile süreklilik denk iki kavramdır.

1.7 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir. A kümesinde alınan her dizinin yığılma noktası yine A kümesine aitse A kümesine *kompakt* veya *dizisel kompakt* denir.

1.8 Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır (Palka 1991).

1.9 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme, U ve $V \subset \mathbb{C}$ de ayrık açık iki küme olsun. Eğer $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ ve $A \subset U \cup V$ ise A kümesine *bağlantısızdır* denir. Bağlantısız olmayan kümeye *bağlantılıdır* denir. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* adı verilir.

1.10 Tanım. $[a, b]$ kapalı aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $t \in [a, b]$ için $\varphi'(t)$ mevcut ve $\varphi'(t) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri*, $[a, b]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye *parçalı düzgün eğri* adı verilir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri*, uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri* ve sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye *Jordan bölgesi* adı verilir.

1.11 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğri sadece B kümesinin noktalarını bulunduruyorsa, başka bir deyişle B de alınan her kapalı eğri içinde bölgeye ait herhangi bir noktaya büzülebiliyorsa bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

1.12 Tanım. f bir B bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *differansiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki bütün noktalarda differansiyellenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 da *analitik* denir.

1.13 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, B bölgesinden $f(B)$ üzerine bire bir olan f fonksiyonuna B de *yalıncat (univalent) fonksiyon* denir. Buna göre B de yalıncat bir f fonksiyonu $z_1, z_2 \in B$ olmak üzere, $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiren bir fonksiyondur. Geometrik olarak, $f(B)$ görüntü bölgesinin katlı bölge

olmaması demektir. Eğer f fonksiyonu B bölgesinin bir z_0 noktasının belli bir komşuluğunda yalınkat ise bu takdirde f fonksiyonuna z_0 noktasında *yerel (lokal) yalınkat fonksiyon* denir.

1.14 Teorem. f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik olsun. Eğer $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun yalınkat olduğu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) \subset B$ komşuluğu vardır (Palka 1991).

1.15 Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ve $f \in C^1(D)$ olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ u_y(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0) v_y(z_0) - u_y(z_0) v_x(z_0)$$

sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasında *Jakobiye*ni denir.

1.16 Teorem. Bir $f = u + iv$ fonksiyonunun basit bağlantılı bir D bölgesindeki Jakobiye $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ dir.

İspat. $f = u + iv$ olmak üzere

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

ve

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

olur. Buradan

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J_f$$

elde edilir. ■

Eğer f fonksiyonu analitik ise, 1.16 Teoremi gereği $J_f(z) = |f'(z)|^2$ olduğu görülür.

1.17 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ yalınkat bir fonksiyon ve $f \in C^1(B)$ olsun. Her $z \in B$ için $J_f(z) \neq 0$ ise f fonksiyonuna B de bir *diffeomorfizm* denir. Eğer $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm ve $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna B de *yön koruyan*, $J_f(z) < 0$ ise f ye *yönü ters çeviren* adı verilir. $J_{\bar{f}} = -J_f$ olduğundan f yön koruyan ise $\bar{f}$ eşlenik fonksiyonu yönü ters çevirendir.

1.18 Tanım. $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere $\theta(z, w) = \text{Arg}(w/z)$ değerine z den w ye *yönlendirilmiş açı* denir. $\theta(z, w)$, z ile w arasındaki en küçük açının ölçüsünü olup bu değer $(-\pi, \pi]$ aralığındadır. Eğer açının yönü saat yönünün tersi ise $\theta(z, w) > 0$, saat yönünde ise $\theta(z, w) < 0$ dır. Buna göre $\theta(z, w) = \pi$ durumu hariç $\theta(z, w) = -\theta(w, z)$ ve $\theta(\bar{z}, \bar{w}) = -\theta(z, w)$ olduğu açıktır.

1.19 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ de bir bölge ve $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm olsun. B de z_0 köşe noktasına sahip eğrisel bir açının kenarları α ve β olmak üzere

$$|\theta(\alpha, \beta)| = |\theta(f(\alpha), f(\beta))|$$

ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında *açı koruyan* denir. Eğer z_0 noktasında $J_f(z_0) > 0$ ve $\theta(\alpha, \beta) = \theta[f(\alpha), f(\beta)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında *konform*, $J_f(z_0) < 0$ ve $\theta(\alpha, \beta) = \theta[f(\beta), f(\alpha)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında *ters konform* denir. Kısaca; açı ölçüsünü ve yönünü koruyan bir diffeomorfizme konform dönüşüm, açı ölçüsünü koruyan fakat yönünü ters çeviren diffeomorfizme de ters konform dönüşüm adı verilir. Eğer her $z \in B$ noktası için f konform ise f fonksiyonuna B bölgesinde *konform dönüşüm* denir.

Örneğin; $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, dönüşümü $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ ye bir konform dönüşüm iken $f(z) = \bar{z}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ de bir ters konform dönüşümdür.

1.20 Teorem. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun B de konform olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun B de analitik ve yalınkat olmasıdır (Palka 1991).

1.21 Uyarı. Bazı yazarlar konform dönüşüm tanımını, $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu ve her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ bağıntısıyla verirler. Ancak $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\bar{z}}$ fonksiyonu için $f'(z) \neq 0$ olmasına rağmen yalınkatlık yoktur. Bu çalışmada her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ şartı sağlayan f fonksiyonu D de *yerel konform* olarak adlandırılacak. Gerçekten 1.14 Teoremi gereği $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik ünivalent olduğu biliniyor. Bu durumda f fonksiyonunun bu komşuluğa kısıtlanması konform olur.

Aşağıdaki teorem konveks bölgelerde tanımlı bir fonksiyonun yalınkatlığı için bir test oluşturmaktadır.

1.22 Teorem. $B \subset \mathbb{C}$ konveks bir bölge ve f fonksiyonu B de analitik olsun. Eğer her $z \in B$ için $\operatorname{Re} f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonu B bölgesinde yalınkattır (Goodman 1983).

1.23 Teorem. f fonksiyonu basit kapalı bir γ eğrisi üzerinde ve içinde analitik olsun. Eğer f fonksiyonu γ üzerinde yalınkat ise γ içinde de yalınkattır (Kasana 2005).

Yalınkat fonksiyon teorisinin en önemli sonuçlarından biri de Riemann dönüşüm teoremidir.

1.24 Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). B , $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin basit bağlantılı bir öz alt bölgesi olsun. B bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine bire bir ve

analitik (konform) olarak resmeden $z_0 \in B$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır (Palka 1991).

Riemann dönüşüm teoremi gereği basit bağlantılı bir bölgede yalınkatlıkla ilgili bir çok problemi çözmek için bu bölge yerine $\mathbb{D}$ birim dairesini almak uygundur. O halde bundan böyle çalışmalarımızı birim daire üzerinde yoğunlaştıracacağız.

Eğer B bir Jordon bölgesi ise Riemann dönüşüm teoremi sürekli olarak B bölgesinin sınırına genişletilebilir ve genişletilmiş fonksiyon sınır eğrisini bire bir olarak birim çember üzerine dönüştürür. Caratheodary ye ait olan bu sonucu aşağıdaki teoremden ifade edebiliriz.

1.25 Teorem (Caratheodary Genişleme Teoremi). B bir γ Jordon eğrisi ile sınırlanmış bir bölge ve f fonksiyonu B bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine konform olarak döndürsün. Bu takdirde f fonksiyonu $\bar{B}$ bölgesinden $\bar{\mathbb{D}}$ üzerine bir homomorfizme genişletilebilir (Palka 1991).

1.26 Tanım. Bir B bölgesinde tanımlı $u = u(x, y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve B de $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ise u fonksiyonuna B bölgesinde *harmoniktir* denir.

Bir $f(z) = u(z) + iv(z)$ analitik fonksiyonunun reel ve imajiner kısımları harmoniktir. Bu durumda v fonksiyonuna u fonksiyonunun *harmonik eşleniği* denir.

1.27 Teorem (Harmonik Fonksiyonlar için Maksimum ve Minimum Prensibi). Sabit olmayan reel değerli bir $u(x, y)$ fonksiyonu, sınırlı bir B bölgesinde harmonik olsun. $u(x, y)$ maksimum veya minimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

1.28 Teorem (Schwarz lemma). f fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\mathbb{D}$ dairesinde

$|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için geçerlidir (Palka 1991).

1.29 Tanım. Kompleks düzlemde parçalı düzgün kapalı bir γ eğrisi ve bir $z \in \mathbb{C} - \gamma$ noktası için

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

tamsayısına γ eğrisinin z etrafındaki *dönme sayısı (indeks)* denir.

1.30 Teorem (Argüment Prensibi). f bir D bölgesinde meromorf (singüler noktaları kutup noktası olan) bir fonksiyon ve γ, D de bulunan ve f fonksiyonunun hiçbir kutup ve sıfır yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. f fonksiyonunun γ içindeki sıfır ve kutup yerlerinin sayıları (katlılıklar, katlılığı kadar sayılmak üzere) sırayla Z_f ve P_f ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f = n(f(\gamma), 0)$$

dir. Buna göre argüment prensibi, f fonksiyonunun γ eğrisi içindeki sıfırlarının sayısının $\Gamma = f(\gamma)$ görüntü eğrisinin orijin etrafındaki sarma sayısına eşit olduğunu ifade eder (Palka 1991).

1.31 Teorem (Hurwitz Teoremi). (f_n) , bir D bölgesinde sıfırı olmayan analitik fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n \rightarrow f$ yakınsaması düzgün olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun D bölgesinde ya hiç sıfırı yoktur yada f özdeş olarak sıfırdır (Duren 1983).

1.32 Teorem. (f_n) , bir D bölgesinde analitik ve ünivalent fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n \rightarrow f$ yakınsaması düzgün olsun. Bu takdirde f fonksiyonu D bölgesinde ya ünivalent yada sabittir (Palka 1991).

2. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biri analitik ve yalınkat (univalent) fonksiyonlar teorisidir. Bu bölümde $\mathbb{D}$ birim dairesini üzerinde tanımlı yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı ve buna bağlı alt sınıfları oluşturularak bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı bağıntıları, distirsiyon teoremleri verilecektir.

2.1. Yalınkat Fonksiyonların S Sınıfı

Bu kesimde $\mathbb{D}$ birim dairesinde normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonlarının sınıfı oluşturularak, bu sınıfın çeşitli özellikleri incelenecektir.

2.1.1 Tanım. $\mathbb{D}$ birim dairesinde yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ biçiminde normalize edilmiş $f(z)$ analitik fonksiyonlarının sınıfı S ile gösterilir. Buna göre $\mathbb{D}$ de analitik ve yalınkat fonksiyonların kümesi $A_U(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$S = \{f \in A_U(\mathbb{D}) : f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$$

dir.

S sınıfının tanımı dikkate alındığında bu sınıfa ait bir f fonksiyonunu $\mathbb{D}$ de

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (2.1)$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. S sınıfına ait fonksiyonlardan dikkate değer olanı

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

biçiminde verilen *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyon $\mathbb{D}$ de

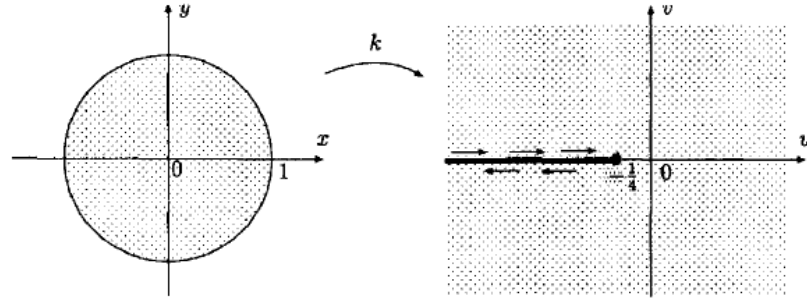
$$k(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n$$

biçiminde bir açılıma sahip olup, $\mathbb{D}$ dairesini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ üzerine konform olarak resmeder (Şekil 2.1). Koebe fonksiyonu, S sınıfına ait fonksiyonlar içinde $\mathbb{D}$ birim dairesini en geniş bölge üzerine yalınkat olarak resmeden bir fonksiyondur. Bununla beraber $k(\mathbb{D})$ bölgesi bu özelliğe sahip tek bölge değildir. Eğer γ belli bir w_0 , $|w_0| \geq 1/4$, noktasından sonsuza uzanan herhangi basit bir eğri ise bu takdirde $\mathbb{D}$ birim dairesini γ eğrisinin tümleyenine dönüştüren, S sınıfına ait bir fonksiyon bulunabilir.

Her bir $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$k_{\theta}(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun rotasyonunu oluşturur.



Şekil 2.1

S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

2.1.2 Örnek. a) $f(z) = z/(1-z)$ fonksiyon $\mathbb{D}$ yi $\text{Re } f(z) > -1/2$ yarı düzlemi üzerine bire bir olarak resmeder.

b) $f(z) = z/(1-z^2)$ fonksiyon $\mathbb{D}$ yi $\mathbb{C} - ((-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty))$ bölgesi üzerine bire bir resmeder.

c) $f(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyon $\mathbb{D}$ yu $-\frac{\pi}{4} < \text{Im } f(z) < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridi üzerine bire bir olarak resmeder.

Aşağıdaki teorem S sınıfına ait fonksiyonların bazı dönüşümler altında değişmez kaldığını gösterir.

2.1.3 Teorem. $f \in S$ fonksiyonu (2.1) açılımıyla verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki $g(z)$ fonksiyonları da S sınıfına aittir.

a) $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{a}_n z^n,$

b) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n,$

c) $0 < r < 1$ olmak üzere $g(z) = \frac{1}{r} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n,$

d) $w \notin f(\mathbb{D})$ olmak üzere $g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{w}} = z + (a_2 + 1/w)z^2 + \dots,$

e) $z_0 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)(f'(z_0))},$$

f) $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z \left(\frac{f(z^n)}{z^n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

İspat. d) $w \notin f(\mathbb{D})$ olduğundan g fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesinde analitik ve f fonksiyonunun normalizasyonu sağlaması, g fonksiyonunun da normalizasyonu sağlamasını gerektirir. Ayrıca g fonksiyonunun yalınkat olması, f fonksiyonunun yalınkat olmasının bir sonucudur.

e) $\phi(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$ birim daireyi kendi üzerine konform olarak dönüştüren bir dönüşüm

olup $c = 1/[(1 - |z_0|^2)(f'(z_0))]$ olarak alınırsa $g(z) = c[f(\phi(z)) - f(z_0)]$ biçiminde yazılabilir. Şimdi g fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterelim. f yalınkat olduğundan

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow f(\phi(z_1)) - f(z_0) = f(\phi(z_2)) - f(z_0) \Rightarrow \phi(z_1) = \phi(z_2)$$

olur. ϕ dönüşümü $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğundan, $z_1 = z_2$ bulunur. Bu ise g fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterir. $g'(0) = [f'(z_0)\phi'(0)]/[f'(z_0)\phi'(0)] = 1$ ve $g(0) = 0$ olduğundan $g \in S$ elde edilir.

f) $f \in S$ olduğundan g iyi tanımlı ve $\mathbb{D}$ de analiktir. β 1'in n . kökünden biri ise $z \in \mathbb{D}$ için $g(\beta z) = \beta g(z)$ dir. g fonksiyonunun yalınkat olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere $g(z_1) = g(z_2)$ olsun. Buradan $g''(z_1) = g''(z_2)$ ve $f(z_1'') = f(z_2'')$ olur. f , $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğundan $z_2 = \beta z_1$ olacak şekilde, $\beta^n = 1$ özelliğinde bir $\beta \in \mathbb{C}$ sayısı vardır. $g(\beta z) = \beta g(z)$ olduğundan $g(z_2) = g(\beta z_1) = \beta g(z_1) = \beta g(z_2)$ olur. Bu durumda ya $\beta = 1$ veya $g(z_2) = 0$ dir. Eğer $\beta = 1$ ise $z_1 = z_2$ dir. Eğer $g(z_2) = 0$ ise $z_1 = z_2 = 0$ olur. Böylece her iki durumda da g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır. Ayrıca $g(0) = 0$ ve $g'(0) = 1$ olup $g \in S$ elde edilir. ■

Bazen birim daire yerine birim dairenin dışını almak kullanışlı olabilir.

2.1.4 Tanım. $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ olmak üzere Δ da tanımlı

$$\varphi(\zeta) = \zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} \quad (2.2)$$

biçimindeki analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfı Σ , Σ sınıfına ait fakat $w_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların oluşturduğu alt sınıf Σ_0 ile gösterilir.

S sınıfı ile Σ_0 sınıfı arasındaki geçiş aşağıdaki teoremden verilmiştir.

2.1.5 Teorem. Eğer $f \in S$ fonksiyonu (2.1) açılımıyla verilmiş ise

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z - a_2 + \frac{(a_2^2 - a_3)}{z} + \dots \quad (2.3)$$

fonksiyonu Σ_0 sınıfına aittir. Tersine, $\varphi \in \Sigma_0$ fonksiyonu (2.2) biçiminde verilmiş ise

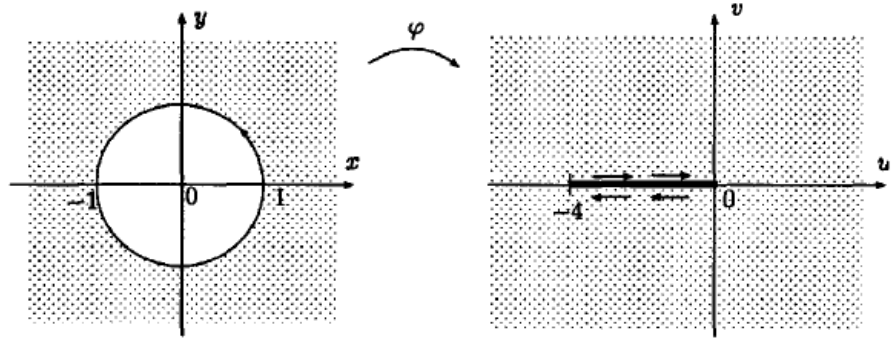
$$f(z) = \frac{1}{\varphi(1/z)} = z - c_0 z^2 + (c_0^2 - c_1) z^3 + \dots$$

fonksiyonu da S sınıfına aittir (Goodman 1983).

Eğer (2.3) bağıntısı Koebe fonksiyonuna uygulanırsa,

$$\varphi(z) = \frac{1}{k(1/z)} = z - 2 + \frac{1}{z}$$

olup bu fonksiyon Δ kümesini $\mathbb{C} - \{w : -4 < w < 4\}$ bölgesi üzerine resmeder (Şekil 2.2).



Şekil 2.2

Σ sınıfındaki her bir φ fonksiyonu Δ kümesini kompakt ve bağlantılı bir bölgenin tümleyeni üzerine dönüştürür. Şimdi bu bölgenin alanıyla ilgili tahmini verelim.

2.1.6 Teorem (Alan Teoremi). $\varphi(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n / z^n)$ fonksiyonu $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ kümesinde analitik ve yalınkat olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \leq 1 \quad (2.4)$$

dir. Eşitlik kompleks düzlemde alanı sıfır olan küme hariç, $f(\Delta)$ görüntü kümesinin bir bölgeyi göstermesi durumunda geçerlidir (Goodman 1983).

2.1.7 Teorem. $f \in S$ ise bu takdirde $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z) = k_{\theta}(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f \in S$ iken $g(z) = \sqrt{f(z^2)} \in S$ ve

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{g(1/\zeta)} = \zeta - \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{\zeta} + c_3 \frac{1}{\zeta^3} + c_5 \frac{1}{\zeta^5} + \dots$$

fonksiyonu Σ_0 sınıfına ait olup, alan teoremi gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 = |-a_2/2|^2 + 3|c_3|^2 + 5|c_5|^2 + \dots \leq 1 \quad (2.5)$$

olur. Buradan $|a_2| \leq 2$ elde edilir. Eğer $a_2 = 2e^{i\alpha}$ ise (2.5) ifadesinde her $n \geq 2$ için $c_n = 0$ olur. Bu durumda $\varphi(\zeta) = \zeta - e^{i\alpha}/\zeta$, $g(z) = z/(1 - e^{i\alpha}z)$ ve $f(z) = z/(1 - e^{i\alpha}z)^2 = e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z)$ olur. ■

2.1.8 Teorem (Le Branges Teoremi). $f \in S$ ise bu takdirde her $n \geq 1$ için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir (Hayman 1994).

Aşağıdaki teorem S sınıfına ait fonksiyonların görüntü kümesinin kapsadığı orijin merkezli en geniş dairenin $D_{1/4}$ dairesi olduğunu gösterir.

2.1.9 Teorem. $f \in S$ ise $f(\mathbb{D}) \supset D_{1/4}$ dür. Üstelik $\bigcap_{f \in S} f(\mathbb{D}) = D_{1/4}$ dür.

İspat. $w_0 \notin f(\mathbb{D})$ özelliğindeki $w_0 \in \mathbb{C}$ noktası için $|w_0| \geq 1/4$ olduğunu göstermek yetecektir.

$$g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0} \right) z^2 + \dots$$

biçiminde $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. 2.1.3 Teoremi gereği $g \in S$ dir. $|a_2| \leq 2$ olduğundan

$$\left| a_2 + \frac{1}{w_0} \right| \leq 2$$

ve

$$\left| \frac{1}{w_0} \right| \leq \left| a_2 + \frac{1}{w_0} \right| + |a_2| \leq 4$$

olur. Böylece $|w_0| \geq 1/4$ elde edilir. Başka bir deyişle $\bigcap_{f \in S} f(\mathbb{D}) \supset D_{1/4}$ dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu için sağlanır. Gerçekten, Koebe fonksiyonu için $|a_2 + \frac{1}{w_0}| = 2$ olup, $|w_0| = \frac{1}{4}$ elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem S sınıfındaki fonksiyonlar için distirsiyon teoremi olarak bilinir.

2.1.10 Teorem. $f \in S$ ve $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere;

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \quad (2.7)$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (2.8)$$

dır. Eşitlik Koebe fonksiyonunu ve onun uygun rotasyonları için geçerlidir.

İspat. İspat üç adımda yapılacaktır.

(i) Sabit bir $z \in \mathbb{D}$ noktası için $|z| = r \in (0,1)$ olsun. $f \in S$ iken 2.1.3 Teoremi gereği

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + b_2\zeta^2 + \dots \quad (2.9)$$

fonksiyonu da S sınıfına aittir. Üstelik

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2!} = \frac{1}{2} \left[(1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right]$$

dir. $|b_2| \leq 2$ olduğundan

$$\left| (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4 \quad (2.10)$$

olur. (2.10) eşitsizliğinin iki tarafını $\frac{|z|}{1-|z|^2}$ ile çarpılırsa

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

ve buradan

$$\left| \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

olur. Böylece

$$\left| \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

ve

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

elde edilir.

Öte yandan $f'(z) \neq 0$ ve $f'(0) = 1$ olduğundan $\log f'(z)|_{z=0} = 0$ olacak şekilde

$\log f'(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu bir dalı vardır. O halde $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(z) = \frac{\partial}{\partial r} (\log |f'(z)| + i \arg f'(z))$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| = \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} \{ \log f'(z) \} = \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]$$

olur. Bu eşitlik ve (2.10) bağıntısı birlikte kullanılırsa

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

olur. θ sabit tutulup r ye göre integral alınırsa, $f'(0) = 1$ olduğundan

$$\log \left[\frac{1-r}{(1+r)^3} \right] \leq \log |f'(re^{i\theta})| \leq \log \left[\frac{1+r}{(1-r)^3} \right]$$

veya üstel fonksiyonun artan oluşundan

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

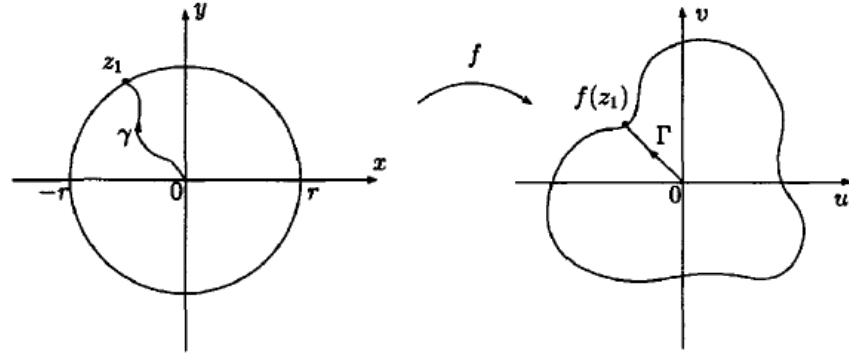
bulunur. Böylece (2.7) bağıntısı elde edilmiş olur.

(ii) $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$ olsun. 0 ile z noktalarını birleştiren doğru parçasını $[0, z]$ ile gösterelim. O halde (2.7) bağıntısının üst sınırı kullanılarak

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &= \left| \int_{[0,z]} f'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_0^r f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho \right| \leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.6) in üst sınırını bulmuş oluruz. Şimdi (2.6) bağıntısının alt sınırını bulalım. $m(r) = \min \{ |f(z)| : |z| = r \}$ denirse $\overline{D}_{m(r)}$ kapalı disk $\overline{D}_r$ diskinin görüntüsü tarafından kapsanmıştır. $z_1 \in \mathbb{D}$ ve $|f(z_1)| = m(r)$ olacak şekilde $|z_1| = r$ noktasını göz

önüne alalım. 0 ile $f(z_1)$ noktasını birleştiren ve tamamen $\overline{U}_{m(r)}$ kapalı dairesi içinde kalan doğru parçası Γ olsun (Şekil 2.3). $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$ denirse $\gamma, |z| \leq r$ dairesi içinde basit bir eğridir.



Şekil 2.3

$f'(\zeta)d\zeta$ ifadesinin γ üzerinde sabit argumente sahip olduğu ve (2.7) deki alt sınır bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} m(r) = |f(z_1)| &= \left| \int_{\Gamma} d\omega \right| = \left| \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta \right| \geq \int_{\gamma} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} |d\zeta| \\ &\geq \int_{\gamma} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} d|\zeta| = \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada γ üzerinde $\zeta = te^{i\alpha}$ olmak üzere $|\zeta| = t$, $|d\zeta| = [(dt)^2 + t^2(d\alpha)^2]^{1/2} \geq dt = d|\zeta|$ eşitsizliği kullanıldı. Böylece (2.6) bağıntısının sol tarafı elde edilmiş olur.

(iii). Şimdi (2.8) bağıntısını gösterelim. Bunun için (2.9) bağıntısı ile verilen g fonksiyonunu göz önüne alalım. g fonksiyonunu (2.6) bağıntısını sağladığından $\zeta \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leq |g(\zeta)| \leq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2}$$

yazılabilir. Bu ifade de g fonksiyonunu yerine yazılır ve $\zeta = -z$ konumu yapılırsa

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq \frac{|f(z)|}{(1-|z|^2)|f'(z)|} \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

elde edilir. ■

2.1.11 Teorem. S sınıfı $A(\mathbb{D})$ analitik fonksiyonların kompakt bir altkümesidir.

İspat. Bunun için $\mathbb{D}$ de lokal düzgün olarak $f_n \rightarrow f$ özelliğinde S sınıfına ait her (f_n) dizisi için $f \in S$ olduğunu göstermek yeterlidir. Hurwitz teoremi gereği bu durumda f limit fonksiyonu ya yalınkat yada sabittir. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 1$ olduğundan f $\mathbb{D}$ de yalınkat olup $f \in S$ dir. ■

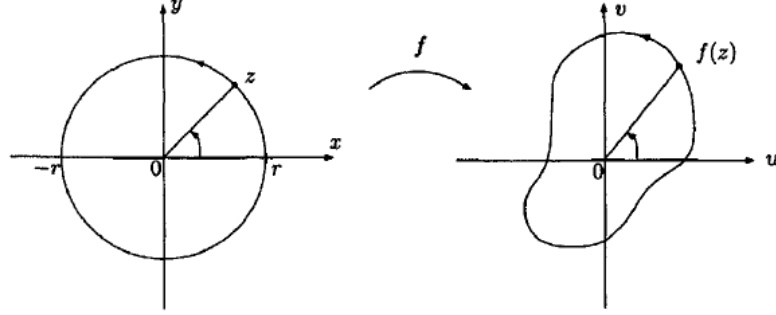
2.2. Yıldızıl ve Konveks Analitik Fonksiyonlar

Bu kesimde S sınıfının en önemli altsiniflarından olan yıldızıl ve konveks fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfları üzerinde durulacak. Her iki sınıf geometrik yoruma sahip olmanın yanında analitik olarak da karakterize edilebilir. Bu sınıflara ait fonksiyonların Taylor açılımından gelen katsayıları için sınırlar, S sınıfından çok daha kolay elde edilir. Yıldızıl fonksiyonların büyüme, genişleme ve yayılma sonuçlarının S sınıfı ile aynı olduğu görülecektir.

2.2.1 Tanım. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir küme olsun. Eğer $w_0 \in \Omega$ noktasını her $w \in \Omega$ noktasına birleştiren doğru parçası Ω içinde kalıyorsa Ω kümesine w_0 noktasına göre *yıldızıl* denir. Eğer bütün $w_1, w_2 \in \Omega$ noktaları için w_1 ile w_2 noktalarını birleştiren doğru parçası Ω içinde kalıyorsa, Ω kümesine *konvektir* denir. Buna göre, eğer Ω kümesi her bir noktasına göre yıldızıl ise Ω kümesi konvektir.

$r \in (0,1]$, $f \in A(D_r)$ ve $z_0 \in D_r$ olsun. Eğer f , D_r de yalınkat ve $f(D_r)$, $f(z_0) = w_0$ noktasına göre yıldızıl bir bölge ise, f fonksiyonuna D_r de z_0 noktasına göre *yıldızıl* denir. Orijine göre yıldızıl olan bölgelere de kısaca *yıldızıl* denir (Şekil 2.4). Ayrıca f ,

D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ kompleks düzlemde konveks bir bölge ise f fonksiyonuna D_r de *konvektir* denir. $\mathbb{D}$ birim dairesinde (2.1) açılımına sahip (normalize edilmiş) yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla S^* ve K ile gösterilir.



Şekil 2.4

2.2.2 Teorem. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır.

İspat. Önce f fonksiyonunun yıldızıl olduğunu kabul edelim. Bu takdirde f yalınkat ve $f'(0) \neq 0$ dır. $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ bölgesinin yıldızıl olduğunu gösterelim. Bunun için sabit bir $r \in (0,1)$, $t \in (0,1)$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = f^{-1}(t f(z))$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f yıldızıl olduğundan g fonksiyonu iyi tanımlı olup, $\mathbb{D}$ de analitiktir. Üstelik $\mathbb{D}$ de $g(0) = 0$ ve $|g(z)| < 1$ olup, Schwarz Lemmasının şartlarını sağlar. O halde $\mathbb{D}$ de $|g(z)| \leq |z|$ ve her $z \in D_r$ için $t f(z) = f(g(z)) \in f(D_r)$ olur. Böylece $f(D_r)$ yıldızıl bir bölgedir. Geometrik olarak $|z| = r$ eğrisinin f altındaki resmi orijine göre yıldızıl bir eğridir. Bu durumda $\arg f(re^{i\theta})$ fonksiyonu θ değişkeninin artan bir fonksiyonudur. Buradan $\theta \in [0, 2\pi]$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \geq 0$$

dır.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im}[\log f(re^{i\theta})] = \operatorname{Im}\left[\frac{izf'(z)}{f(z)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

olduğundan $|z| = r < 1$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$$

olur. Ancak $f'(0) \neq 0$ ve harmonik fonksiyonlar için minimum prensibine gereği $z \in D_r$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

bulunur. r sayısı keyfi olduğundan $\mathbb{D}$ üzerinde

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

elde edilir.

Tersine $f'(0) \neq 0$ ve $|z| < 1$ için $\operatorname{Re}[zf'(z)/f(z)] > 0$ olduğunu kabul edelim. $z \in \mathbb{D}^*$ için $f(z) \neq 0$ dır. Aksi halde $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de bir kutba sahip olabilir. Sabit bir $r \in (0,1)$ sayısı seçelim. İspatın birinci kısmında olduğu gibi basit bir hesaplamayla $\theta \in [0, 2\pi]$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$$

olduğu görülür. Buradan $\arg f(re^{i\theta})$ fonksiyonu θ değişkeninin artan bir fonksiyonu olur. Ayrıca f , $\mathbb{D}$ dairesinde sadece bir basit sifıra sahip olduğundan, argüment

prensibi (1.30 Teoremi) gereği, $\theta \in [0, 2\pi]$ için $f(re^{i\theta})$ fonksiyonunun argüment değişimi 2π dir. Gerçekten

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right\} = 2\pi$$

dir. Böylece $|z|=r$ çemberinin görüntüsü basit bir yıldızlı eğri ve $f(D_r)$ bir yıldızlı bölgedir. Üstelik f fonksiyonu $|z|=r$ eğrisi üzerinde bire bir olduğundan 1.23 Teoremi gereği f D_r dairesinde yalınkattır. r sayısı keyfi olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesi üzerinde yalınkattır. Sonuç olarak $f(\mathbb{D}) = \bigcup_{0 < r < 1} f(D_r)$ olduğundan $f(\mathbb{D})$ orijine göre yıldızlı bir bölgedir. ■

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonların analitik karakterini ifade etmektedir.

2.2.3 Teorem. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

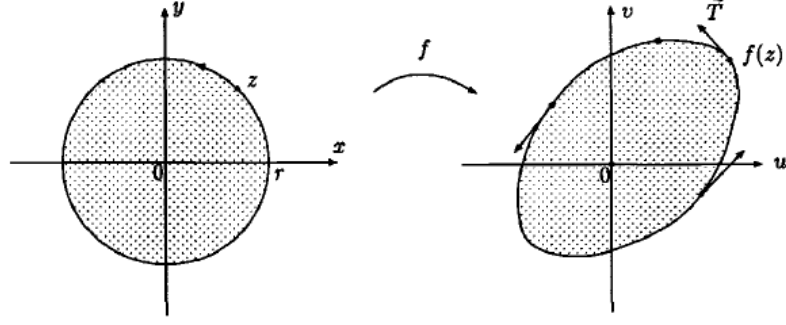
$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$$

dır.

İspat. f konveks olsun. Bu takdirde f fonksiyonu yalınkat ve dolayısıyla $f'(0) \neq 0$ dır. Her $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ görüntü kümesinin konveks olduğunu göstermeliyiz. $r \in (0,1)$ keyfi sabit bir sayı, $z_1, z_2 \in D_r$ için $z_2 \neq 0, |z_1| \leq |z_2|$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonu

$$g(z) = f^{-1} \left[(1-t)f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + t f(z) \right]$$

biçiminde tanımlanmış olsun. f konveks bir fonksiyon olduğundan g fonksiyonu iyi tanımlı ve $\mathbb{D}$ da analitiktir. Üstelik $g(0) = 0$ ve Schwarz lemması gereği $z \in \mathbb{D}$ için $|g(z)| \leq |z|$ dir. $z = z_2$ için $|g(z_2)| \leq |z_2| < r$ olup $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(D_r)$ dir. Böylece $f(D_r)$ bölgesinin konveks olduğu görülür (Şekil 2.5).



Şekil 2.5

$|z| = r$ çemberinin görüntüsü Γ_r olsun. Γ_r pozitif yönlü bir Jordan eğrisi ve onun iç bölgesi konveks bir bölgedir. Üstelik Γ_r eğrisi $w = f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, parametrik ifadesiyle verilir. $f(D_r)$ konveks bir bölge olduğundan Γ_r eğrisine teğet vektörün argumenti $\theta \in [0, 2\pi]$ değişkeninin azalmayan bir fonksiyonudur. Yani,

$$\psi(\theta) = \arg\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right] = \arg[ir e^{i\theta} f'(re^{i\theta})]$$

denirse $\theta \in [0, 2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq 0$ veya $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \text{Im}[\log(izf'(z))] \geq 0$$

dir. Basit hesaplamayla $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \text{Im}[\log(izf'(z))] = \text{Im}\left[i\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right] = \text{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$$

olduğu görülür. Buradan $|z|=r$ üzerinde

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

olur. Kesin eşitsizlik $z=0$ da sağlandığından harmonik fonksiyonlar için minumum prensibi gereği $z \in D_r$ için

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

olur. r sayısı keyfi olduğundan $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

elde edilir.

Tersine $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

olsun. Bu durum $z \in \mathbb{D}^*$ için $f'(z) \neq 0$ olmasını gerektirir. $r \in (0,1)$ keyfi sabit bir sayı olmak üzere yukarıdaki hesaplamadaki adımlar tersine atılacak olursa $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] \geq 0$$

olur. Buradan $\Gamma_r = f(\partial D_r)$ eğrisinin eğiminin argümentinin θ değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu olduğu görülür. Üstelik $[0, 2\pi]$ üzerinde $\psi(\theta)$ fonksiyonunun toplam değişimi 2π dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \psi'(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right] d\theta \\
&= \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \frac{dz}{iz} = 2\pi
\end{aligned}$$

dir. Böylece Γ_r eğrisinin basit konveks bir eğri, dolayısıyla $f(D_r)$ bölgesinin konveks bir bölge olduğu göstermiş olur. Buradan $f(\mathbb{D}) = \bigcup_{0 < r < 1} f(D_r)$ olduğundan, $f(\mathbb{D})$ bölgesinin konveks bir bölge olduğu sonucu elde edilir. Ayrıca f fonksiyonu $|z|=r$ çemberi üzerinde bire bir olduğundan, 1.23 Teoremi gereği f aynı zamanda her bir $r \in (0,1)$ için D_r üzerinde yalınkattır. Böylece f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat ve konvekstir. ■

Konvekslik için kullanışlı olan gerek ve yeter şartlar vardır. Bunlardan biri aşağıda verilmiştir.

2.2.4 Teorem. $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $z, \zeta \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \right] \geq 0 \quad (2.11)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in K$ olsun. $z, \zeta \in \mathbb{D}$ için

$$g(z, \zeta) = \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z + \zeta}{z - \zeta}$$

fonksiyonu $P = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}^2$ birim polidiskinde analitiktir. Çünkü

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} g(z, \zeta) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

dir. $|z| = r < 1$ eğrisinin f altındaki resmi konveks bir eğri olduğundan, çember içindeki her bir noktaya göre yıldızlıdır. Buradan $|\zeta| < r$ olmak üzere ζ sabiti için z , $|z| = r$ çemberi üzerinde değişirken $f(z)$ ve $f(\zeta)$ arasındaki vektörün argümenti $\arg z$ değişkeninin azalmayan bir fonksiyonudur. 2.2.2 Teoreminin ispatından yukarıdaki şartın $|\zeta| < |z| = r < 1$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right] > 0 \quad (2.12)$$

olduğu görülür. Eğer $|\zeta| = |z|$, $\zeta \neq z$ ise (2.12) bağıntısı

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right] \geq 0$$

olmasını gerektirir. Bu durumda $\operatorname{Re}[(z + \zeta)/(z - \zeta)] = 0$ olduğundan $\operatorname{Re} g(z, \zeta) \geq 0$ sonucuna ulaşılır. $z = \zeta$, $g(z, \zeta)$ fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktası olduğundan, $|z| = |\zeta| = r < 1$ için $\operatorname{Re} g(z, \zeta) \geq 0$ elde edilir.

Harmonik fonksiyonlar için minumum prensibi gereği (önce z , $|z| = r$, değişkeni sabit tutulup ζ değişkenini değiştirilir, sonra da ζ sabit tutup, z değiştirilir) $|z| < r$, $|\zeta| < r$ için $\operatorname{Re} g(z, \zeta) \geq 0$ olur. $r \rightarrow 1$ için istenilen (2.11) eşitsizliği elde edilir.

Tersine (2.11) eşitsizliği sağlansın. (2.11) de $\zeta \rightarrow z$ iken limite geçilirse $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \geq 0$$

elde edilir. Böylece harmonik fonksiyonlar için minumum prensibi (1.27 Teoremi) ve 2.2.3 Teoremi gereği f konvekstir. ■

2.2.4 Teoreminin ispatından normalize edilmiş analitik fonksiyonlar için aşağıdaki konvekslik kriteri çıkarılabilir.

2.2.5 Sonuç. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $|\zeta| < |z| < 1$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right] > 0,$$

olmasıdır (Graham).

2.2.2 ve 2.2.3 Teoremlerinden S^* ve K sınıfları arasında oldukça kullanışlı olan aşağıdaki bağıntıyı elde etmek mümkündür.

2.2.6 Teorem. $f, \mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = z f'(z)$ olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır (Goodman 1983).

Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları S^* sınıfına ait olduğundan 2.1.10 Teoreminde verilen S sınıfı için büyüme ve distirsiyon sonuçları S^* sınıfı için de geçerlidir.

2.2.7 Teorem. $f \in S^*$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Butakdirde

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (2.14)$$

dir. Eşitlik hali, Koebe fonksiyonu ve onun uygun bir rotasyonu için geçerlidir (Goodman 1983).

Konveks fonksiyonlar için büyüme ve distirsiyon sonucu aşağıdadır.

2.2.8 Teorem. $f \in K$ ve $|z| = r < 1$ olsun.

$$\frac{r}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)} \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \quad (2.16)$$

dir. Eşitlik $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| = 1$ olmak üzere; $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (2.16) eşitsizliği, 2.2.6 Teorem ve (2.13) bağıntısının bir sonucudur. (2.15) eşitsizliğinin üst sınırı (2.16) eşitsizliğinin üst sınırının integrali alınarak elde edilebilir. (2.15) eşitsizliğinin alt sınırını elde etmek için $|z| = r < 1$ özelliğinde bir z sabiti alalım. $f \in K$ olduğundan, 0 ile $f(z)$ noktalarını birleştiren Γ doğru parçası $f(\mathbb{D})$ içinde kalır. γ , Γ yolunun ters görüntüsü ise γ , $\mathbb{D}$ de 0 ile z noktalarını birleştiren basit bir eğridir. (2.16) bağıntısındaki alt sınır kullanılarak

$$|f(z)| = \left| \int_{\Gamma} d\omega \right| = \int_{\gamma} |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \geq \frac{r}{1+r}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuç konveks fonksiyonlar için örtme teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.2.9. $f \in K$ ise $D_{1/2} \subset f(\mathbb{D})$ dir.

İspat. $w \notin f(\mathbb{D})$ ise $|w| \geq 1/2$ olduğunu göstermeliyiz. $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = [f(z) - w]^2$ fonksiyonunu tanımlayalım. g fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de yalınkat ve $g(0) = w^2$, $g'(0) = -2w$ olduğunu görmek zor değildir. $z \in \mathbb{D}$ için $h(z) = (w^2 - g(z))/(2w)$ denirse $h \in S$ ve 2.1.9 Teoremi gereği $|w/2| = 1/4$ olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar. ■

3. HARMONİK YILDIZIL DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, reel ve sanal kısımları eşlenik olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonların (dönüşümlerin) sınıfı hakkında genel bilgiler verilecektir. Bu fonksiyonlar analitik olmadığından analitik yalınkat fonksiyonlarda olmayan bazı zorluklarla karşılaşmak kaçınılmaz olmaktadır. Konform dönüşümlerin bir genellemesi olan bu fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma James Clunie ve Terry Sheil-Small (1984) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada bazı geometrik özellikteki harmonik dönüşümler için oldukça güzel tahminler ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmadan faydalanarak, bu alanda çalışan birçok matematikçi bu sınıf ve alt sınıfları ile ilgili çok sayıda araştırma ortaya koymuş bulunmakta ve halen de konuyla ilgili çalışmalar devam etmektedir.

3.1. Kompleks Harmonik Dönüşümler

Önce reel ve kompleks harmonik fonksiyonu tanımlayalım. Bu kesimde verilen bilgilerin ayrıntıları (Duren 2004) kaynağında bulunabilir.

3.1.1 Tanım. Bir D bölgesinde tanımlı reel değerli $u(z) = u(x, y)$ fonksiyonu D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

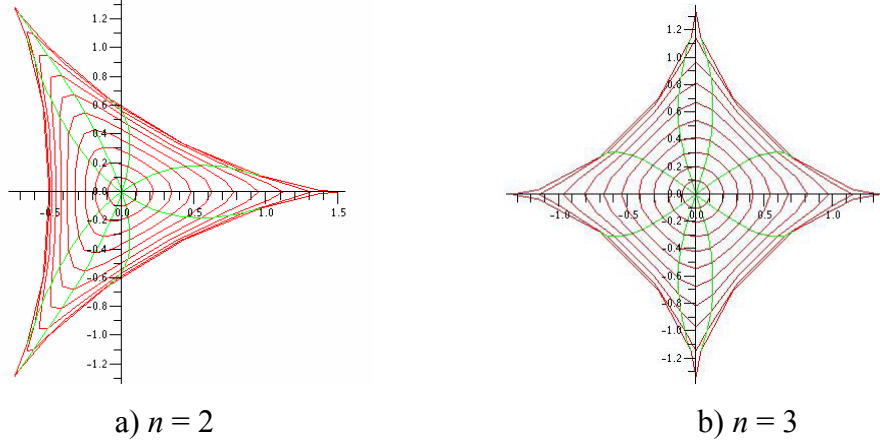
Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D de *reel harmonik fonksiyon* denir. Eğer $u(z) = u(x, y)$ ve $v(z) = v(x, y)$ fonksiyonları bir D bölgesinde reel harmonik ise $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonuna D de *kompleks harmonik fonksiyon* denir. $f = u + iv$ kompleks harmonik fonksiyonun birebir olması durumunda da f fonksiyonuna D de *harmonik yalınkat fonksiyon* denir.

Tanıma göre, kompleks değerli harmonik yalınkat bir fonksiyon bir bölgeyi başka bir bölge üzerine bire bir ve harmonik olarak dönüştüren bir dönüşümdür. Bu fonksiyonlar

analitik olmak zorunda olmadığından, analitik yalıncat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikleri harmonik yalıncat fonksiyonlara taşımak mümkün değildir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani f harmonik, φ analitik fonksiyonu için $f \circ \varphi$ harmonik olmasına rağmen, $\varphi \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı cebir oluşturmalarına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı cebir oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalıncat dönüşümün tersi de harmonik olmak zorunda değildir. Üstelik harmonik yalıncat dönüşümlerin sınır davranışları analitik yalıncat fonksiyonlardan çok daha karmaşıktır. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisi bir şekilde harmonik dönüşümlere taşımak mümkündür (Duren 2004).

Konform dönüşümlerde olduğu gibi düzlemde basit bağlantılı her hangi bir bölgede harmonik yalıncat dönüşümleri çalışmak yerine, birim dairede çalışmak genelliği bozmaz. Çünkü f , basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinden G bölgesi üzerine harmonik yalıncat bir dönüşüm ve φ de $\mathbb{D}$ birim diskini D bölgesi üzerine konform olarak resmeden bir dönüşüm ise $F = f \circ \varphi$, $\mathbb{D}$ diskini G üzerine resmeden harmonik yalıncat bir dönüşüm olur. Bu durumda esas dönüşüm ise $f = F \circ \varphi^{-1}$ biçimindedir.

En basit harmonik yalıncat dönüşüm örneği konform olması gerekmeyen $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$, $|\alpha| \neq |\beta|$ biçimindeki afin dönüşümlerdir. Bu dönüşümler $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi kendisi üzerine harmonik olarak dönüştürürler. Bir afin dönüşüm ile bir harmonik yalıncat dönüşümün bileşkesi olan $\alpha f + \gamma + \beta \bar{f}$ dönüşümü yine bir harmonik yalıncat dönüşümdür. Diğer bir örnek; $f(z) = z + \frac{1}{2} \bar{z}^2$ dönüşümüdür. Bu dönüşüm $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ açık birim diskinde yalıncat ve harmonik olup, $\mathbb{D}$ diskini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi ile çevrelenmiş bir eğrisel üçgen içine resmeder (Şekil 3.1). Benzer şekilde $n \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{n} \bar{z}^n$ fonksiyonu da harmonik yalıncat olup, bu dönüşüm altında açık birim diskin görüntüsü, $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$ köşeli eğrisel bir çokgendir (Duren 2004).



Şekil 3.1

1.14 Teoremi gereği analitik bir f fonksiyonunun bir z noktasında yerel olarak yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olması gerektiği biliniyor. Lewy (1936) de bu sonucun harmonik yalınkat dönüşümler için de geçerli olduğunu gösterdi.

3.1.2 Teorem. Bir $f = u + iv$ harmonik fonksiyonunun yerel olarak yalınkat ve yön koruyan olması için gerek ve yeter şart

$$|f_{\bar{z}}(z)| < |f_z(z)|$$

olmasıdır (Lewy 1936).

3.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonların S_H Sınıfı

Bu kısımda yalınkat analitik fonksiyonların genellemesi olarak harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bu sınıfa ait bazı önemli özelliklerden bahsedilecektir.

3.2.1 Tanım. h ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ birim dairesinde analitik olsun. $u = \text{Re}(h + g)$ $v = \text{Im}(h - g)$ olmak üzere $\mathbb{D}$ dairesinde harmonik bir $f = u + iv$ fonksiyonu $f = h + \bar{g}$ biçiminde yazılabilir. f fonksiyonunun bu yazılışına *standart gösterimi* denir ve bu yazılım tektir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

$\mathbb{D}$ dairesinde h ve g analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

ise, $\mathbb{D}$ dairesinde yön koruyan harmonik yalınkat $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu için $|g'(z)| < |h'(z)|$ dir. Bu durum $h'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu yüzden $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ almak genelliği bozmayacaktır. Böylece $\mathbb{D}$ dairesinde yön koruyan harmonik yalınkat $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \quad (3.1)$$

biçiminde gösterilebilir. Ayrıca F ve G fonksiyonları $\mathbb{D}$ de analitik olmak üzere $\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} f = u$ ve $\operatorname{Re} G = \operatorname{Im} f = v$ ise $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu için

$$h = \frac{F + iG}{2} \quad \text{ve} \quad g = \frac{F - iG}{2}$$

yazılabilir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

3.2.2 Tanım. (3.1) özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerin sınıfı S_H ile gösterilir. $g'(0) = 0$ özelliğindeki $f = h + \bar{g} \in S_H$ fonksiyonların sınıfı S_H^0 ile gösterilir. Buna göre $\mathbb{D}$ dairesinde $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n} \quad (3.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Eğer $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ ise bu takdirde $g'(0) = 0$ ve $|g'(z)/h'(z)| < 1$ olup Schwarz lemması gereği $|g'(z)| \leq |z| |h'(z)|$ olduğu açıktır. Buna göre $f \in S_H^0$ ise $\omega = \overline{f_z} / f_z$ fonksiyonu için $|\omega(z)| \leq |z|$ olduğu görülür.

S_H sınıfına ait bir fonksiyon dizisinin limit fonksiyonu harmonik olmasına rağmen yalınkat olmak zorunda olmadığından S_H kompakt değildir. Gerçekten

$$f_n(z) = z + \frac{n}{n+1} \bar{z}$$

biçiminde tanımlanan $f_n \in S_H$ afin dönüşümlerin bir dizisini göz önüne alalım. $z = x + iy$ için $f_n(z) \rightarrow f(z) = 2x$ yakınsaması $\mathbb{D}$ dairesinde düzgündür ancak limit fonksiyonu yalınkat değildir.

Her bir $f \in S_H$ fonksiyonu için $|b_1| < |a_1| = 1$ olduğundan

$$\varphi(w) = \frac{w - \bar{b}_1 \bar{w}}{1 - |b_1|^2} \quad (3.3)$$

fonksiyonu yön koruyan bir afin dönüşümdür. Böylece

$$f_0 = \varphi \circ f = \frac{f - \bar{b}_1 \overline{f}}{1 - |b_1|^2} = h_0 + \bar{g}_0$$

fonksiyonu

$$h_0(0) = g_0(0) = 0, \quad h'_0(0) = 1 \quad \text{ve} \quad g'_0(0) = 0$$

özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat bir dönüşümdür. Bu yüzden $f_0 \in S_H$ fonksiyonu $g'_0(0) = 0$ özelliğinde olup $f_0 \in S_H^0$ dır.

Eğer $f \in S_H$ fonksiyonunu $f_0 \in S_H^0$ fonksiyonuna taşıyan $f \rightarrow f_0 = \varphi \circ f$ dönüşümünün tersi alınırsa $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ elde edilir. Böylece $|b_1| < 1$ özelliğindeki belli bir $g'_0(0) = b_1$ değeri için S_H sınıfı ile S_H^0 sınıfı arasında bire-bir bir bağıntı

kurulmuş olur. Bu durum S_H sınıfında çözümü güç olan birçok problemin S_H^0 sınıfında çözümü yapılarak tekrar S_H sınıfına taşınmasını sağlar.

Aşağıdaki Clunie ve Sheil-Small'a (1984) ait sonuçlar bununla ilgili olup ekstremal problemlerin çalışmasında önemli bir yere sahiptirler.

3.2.3 Teorem. S_H^0 sınıfı kompakttır. Üstelik $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ dir.

Henüz S_H^0 sınıfı dolayısıyla da S_H sınıfı için genel katsayı bağıntıları ispat edilememiştir. Ancak Clunie ve Sheil-Small (1984), $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için katsayı eşitsizliklerinin

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1) \quad (3.4)$$

ve

$$\|a_n| - |b_n| \leq n$$

olduğunu tahmin etmişlerdir. Bu tahminlerine

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

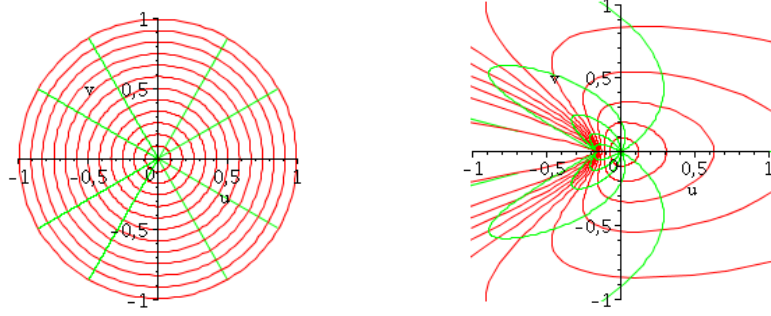
olmak üzere *harmonik Koebe fonksiyonu* $K = h + \bar{g}$ den hareketle ulaşmışlardır. Gerçekten (3.4) bağıntısı için eşitlik, harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır. $k(z) = z/(1-z)^2$ analitik Koebe fonksiyonu için

$$K = h + \bar{g} = h - g + 2\operatorname{Re}\{g\} = k + 2\operatorname{Re}\{g\}$$

veya

$$K(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right\} + i \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\} \quad (3.5)$$

olarak yazılabileceğinden $K \in S_H^0$ fonksiyonu birim daireyi reel eksenden $(-\infty, -\frac{1}{6}]$ çıkarılmış kompleks düzlem üzerine bire bir ve harmonik olarak resmeder (Şekil 3.2).



Şekil 3.2

$f_0 \in S_H^0$ ve $|b_1| < 1$ olmak üzere her bir $f = h + \bar{g} \in S_H$ fonksiyonu $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ biçiminde yazılabileceğinden (3.4) bağıntısı gereği $f \in S_H$ fonksiyonları için katsayı bağıntılarının

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2 + 1) \quad \text{ve} \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2 + 1) \quad (3.6)$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.4) ve (3.6) bağıntılarından S_H^0 da $|a_2| \leq \frac{5}{2}$, S_H da ise $|a_2| < 3$ tahminleri elde edilebilir.

3.3 Yıldızlı Harmonik Fonksiyonlar

3.3.1 Tanım. Birim dairenin $f \in S_H$ fonksiyonu altında görüntüsü orijine göre yıldızlı bir bölge ise f fonksiyonuna *yıldızlı harmonik yalınkat fonksiyon* denir ve bu fonksiyonların sınıfı S_H^* ile gösterilir. Yıldızlı olan $f \in S_H^0$ fonksiyonların sınıfı da S_H^{*0} ile gösterilir

Tanımın geometrik anlamı $f(\mathbb{D})$ görüntü kümesinin tamamı orijinden görünmesidir. Başka bir deyişle, $w_0 = f(z_0)$ noktası f fonksiyonunun görüntü kümesine ait ise,

orijin ile w_0 noktasını birleştiren doğru parçası da görüntü kümesine aittir. Orijine göre yıldızlı bir bölgenin sınır eğrisine *yıldızlı eğri* denir. Eğer f birim çemberi yıldızlı bir eğriye dönüştürüyor ise bu takdirde $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ fonksiyonu θ fonksiyonunun azalmayan fonksiyonu yani

$$\frac{d}{d\theta} \arg\{f(e^{i\theta})\} \geq 0$$

dır.

Bu kısımda, $f \in S_H^{*0}$ dönüşümlerinin genel özellikleri ile S_H^0 sınıfı için tahmin edilen fakat henüz ispatlanamamış (3.4) ile verilen bağıntıların yıldızlı fonksiyonlar için ispatlanabileceği gösterilecek.

3.3.2 Teorem. Her bir $f \in S_H^{*0}$ fonksiyonu (3.4) eşitsizliklerini sağlar. Eşitlik $K(z)$ harmonik Koebe fonksiyonu için geçerlidir. Ayrıca her bir yıldızlı $f \in S_H$ fonksiyonu (3.6) bağıntısını sağlar (Clunie ve Sheil-Small 1984).

3.3.3 Sonuç. Her bir $f \in S_H^{*0}$ fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3} \frac{3r + r^3}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik harmonik Koebe fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. 3.3.2 Teoremi gereği

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \\ &\leq \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(n+1) r^n + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(n-1) r^n \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 + 1) r^n = \frac{1}{3} \frac{3r + r^3}{(1-r)^3} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bir sonucun harmonik yalınkat fonksiyonlara kısmi bir genellemesinden ibarettir.

3.3.4 Teorem. $f = h + \bar{g} \in S_H^*$, H ve G fonksiyonları $H(0) = G(0) = 0$,

$$z H'(z) = h(z) \quad \text{ve} \quad z G'(z) = -g(z)$$

özelliğinde analitik iki fonksiyon ise bu takdirde $F = H + \bar{G}$ harmonik fonksiyonu birim daireyi konveks bir bölge üzerine bire bir olarak resmeder (Duren 2004).

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani $F = H + \bar{G}$, konveks harmonik bir fonksiyon iken $h(z) = z H'(z)$ ve $g(z) = -z G'(z)$ olmak üzere $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu yıldızlı olmak zorunda değildir. Örneğin, $L(z) = \operatorname{Re}[z/(1-z)] + i \operatorname{Im}[z/(1-z)^2]$ fonksiyonu için $L = H + \bar{G}$ alındığında elde edilecek olan $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu yalınkat değildir.

3.4 α Mertebeli Yıldızlı Harmonik Fonksiyonlar

3.4.1 Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha \quad (3.7)$$

bağıntısını sağlayan (3.1) tipindeki fonksiyonlara α mertebeli yıldızlı harmonik fonksiyon denir. α mertebeli yıldızlı harmonik fonksiyonların sınıfı $S_H^*(\alpha)$ ile gösterilir. Buna göre $S_H^*(\alpha) \subset S_H$ ve $S_H^*(0) = S_H^*$ olduğu açıktır.

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z^n \quad (3.8)$$

olmak üzere $f = h + \bar{g} \in S_H^*(\alpha)$ fonksiyonlarının alt sınıfı $T_H^*(\alpha)$ ile gösterilir.

3.4.2 Teorem. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (3.1) bağıntısıyla verilmiş olsun. Ayrıca $a_1 = 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) \leq 2 \quad (3.9)$$

bağıntısı sağlanmış olsun. Bu takdirde f $\mathbb{D}$ de harmonik yalınkattır ve $f \in S_H^*(\alpha)$ dır.

İspat. $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} |h'(z)| &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| > \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| r^{n-1} \geq |g'(z)| \end{aligned}$$

olduğundan f $\mathbb{D}$ de yerel olarak yalınkat ve yön koruyandır. ■

Şimdi f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğunu gösterelim. Eğer $g(z) \equiv 0$ ise $f(z)$ analitiktir ve f fonksiyonunun yalınkatlığı f nin yıldızlı olmasından görülür. Eğer g fonksiyonu özdeş olarak sıfır değilse $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ve $z_1 \neq z_2$ olmak üzere $\mathbb{D}$ basit bağlantılı ve konveks olduğundan, $0 \leq t \leq 1$ için $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2 \in \mathbb{D}$ dir. O halde

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_0^1 [(z_2 - z_1)h'(z(t)) + \overline{(z_2 - z_1)g'(z(t))}] dt$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki kısmını $z_2 - z_1 \neq 0$ sayısına bölüp, reel kısmı alınırsa

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} &= \int_0^1 \operatorname{Re} \left[h'(z(t)) + \frac{\overline{z_2 - z_1}}{z_2 - z_1} \overline{g'(z(t))} \right] dt \\ &> \int_0^1 [\operatorname{Re} h'(z(t)) - |g'(z(t))|] dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Diğer taraftan (3.9) gereği

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} h'(z) - |g'(z)| &\geq \operatorname{Re} h'(z) - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| \\ &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha}{1 - \alpha} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha}{1 - \alpha} |b_n| \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durum (3.10) ile birlikte düşünülürse f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $f \in S_H^*(\alpha)$ olduğunu gösterelim. (3.7) bağıntısına göre (3.9) bağıntısının sağlanması durumunda $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r < 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} \right) \geq \alpha$$

olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için de $\operatorname{Re} w \geq \alpha \Leftrightarrow |1 - \alpha + w| \geq |1 + \alpha - w|$ önermesi kullanılarak $A(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)}$ ve $B(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ olmak üzere

$$|A(z) + (1 - \alpha)B(z)| - |A(z) + (1 + \alpha)B(z)| \geq 0 \quad (3.11)$$

olduğunu göstermek yetecektir. $A(z)$ ve $B(z)$ değerleri (3.11) da yerlerine yazılır ve (3.9) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} &|A(z) + (1 - \alpha)B(z)| - |A(z) + (1 + \alpha)B(z)| \\ &= |(1 - \alpha)h(z) + zh'(z) + \overline{(1 - \alpha)g(z) - zg'(z)}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -|(1+\alpha)h(z) - zh'(z) + \overline{(1+\alpha)g(z) + zg'(z)}| \\
& = \left| (2-\alpha)z + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-\alpha)a_n z^n - \overline{\sum_{n=1}^{\infty} (n-1+\alpha)b_n z^n} \right| \\
& \quad - \left| -\alpha z + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1-\alpha)a_n z^n - \overline{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1+\alpha)b_n z^n} \right| \\
& \geq (2-\alpha)|z| - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-\alpha)|a_n||z|^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1+\alpha)|b_n||z|^n \\
& \quad - \alpha|z| - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1-\alpha)|a_n||z|^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1+\alpha)|b_n||z|^n \\
& = 2(1-\alpha)|z| \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n||z|^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n||z|^{n-1} \right\} \\
& \geq 2(1-\alpha)|z| \left\{ 1 - \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) \right\} \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=2}^{\infty} |y_n| = 1$ olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{n-\alpha} x_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{n+\alpha} \bar{y}_n \bar{z}^n \quad (3.12)$$

tipindeki yıldızlı harmonik dönüşümler (3.9) ile verilen katsayı sınırının kesin olduğunu gösterir. ■

(3.12) biçimindeki fonksiyonlar $S_H^*(\alpha)$ sınıfına aittir. Çünkü

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 2$$

dir.

3.4.3 Teorem. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (3.8) ile verilmiş olsun. $a_1 = 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $f \in T_H^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) \leq 2 \quad (3.13)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in T_H^*(\alpha)$ ise $f = h + \bar{g} \in S_H^*(\alpha)$ olup 3.4.2 Teoreminden (3.13) bağıntısı sağlanır.

Tersine, (3.13) bağıntısı sağlanmış olsun. $f \in T_H^*(\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $f \notin T_H^*(\alpha)$ kabul edelim. (3.8) bağıntısıyla verilen $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun α ($0 \leq \alpha < 1$) mertebeli yıldızlı olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) - \alpha \geq 0$$

olmasıdır. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + g(z)} - \alpha \\ &= \operatorname{Re} \frac{(1-\alpha)z - \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha) |a_n| z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha) |b_n| \bar{z}^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik $|z| = r < 1$ özelliğindeki bütün z ler için sağlanır. z değerleri $0 \leq z = r < 1$ olmak üzere pozitif reel eksen üzerindeki seçilirse

$$\frac{(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha) |a_n| r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha) |b_n| r^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^{n-1}} \geq 0 \quad (3.14)$$

bulunur. Eger (3.13) bağıntısı sağlanmazsa, r değeri 1'e yeterince yaklaştıkça (3.14) ifadesindeki pay negatif olur. Yani; (0,1) aralığında (3.14) ifadesindeki bölümü negatif yapan bir $z_0 = r_0$ vardır. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla $f \in T_H^*(\alpha)$ olmak zorundadır.

3.4.4 Teorem. $f \in T_H^*(\alpha)$ ise $|z| = r < 1$ için

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)r + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) r^2$$

ve

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)r - \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) r^2$$

dir.

İspat. $f \in T_H^*(\alpha)$ olsun. f fonksiyonunun mutlak değerini alarak

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^2 \\ &= (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{2-\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} |b_1| \right) r^2 \\ &= (1 + |b_1|)r + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) r^2, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq (1 - |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^n \\
&\geq (1 - |b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)r^2 \\
&= (1 - |b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{2-\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\
&\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) r^2 \\
&\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} |b_1| \right) r^2 \\
&= (1 - |b_1|)r - \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) r^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik $|b_1| \leq (1-\alpha)/(1+\alpha)$ olmak üzere

$$f(z) = z + |b_1| \bar{z} + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) \bar{z}^2$$

ve

$$f(z) = (1 - |b_1|)z - \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} |b_1| \right) z^2$$

fonksiyonları için geçerlidir.

3.4.4 Teoremindeki ikinci eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç. $f \in T_H^*(\alpha)$ ise;

$$\left\{ w : |w| < \frac{1}{2-\alpha} (1 + (2\alpha-1)|b_1|) \right\} \subset f(\Delta)$$

dir.

3.5 Negatif Katsayılı Yıldızlı Harmonik Fonksiyonlar

3.5.1 Tanım. $|z| = r < 1$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ ve

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \quad (3.15)$$

olmak üzere $f = h + \bar{g} \in S_H^{*0}$ yıldızlı fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf N_H^{*0} ile gösterilir.

3.5.2 Teorem. (3.2) bağıntısıyla verilen $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun katsayıları

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde $f \in S_H^{*0}$ dır.

İspat. Öncelikle $|z| = r < 1$ için

$$|h'(z)| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| r^{n-1} \geq |g'(z)|$$

olduğundan f fonksiyonu yerel yalınkat ve yön koruyandır. Geriye $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < r < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\arg f(re^{i\theta})\} > 0 \quad (3.16)$$

olduğunu göstermek kalır.

$$f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n e^{in\theta} + \bar{b}_n e^{-in\theta}) r^n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) &= \operatorname{Im}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta})\right) \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n e^{i(n-1)\theta} - \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})r^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})r^{n-1}}\right\}\end{aligned}$$

bulunur. $z = re^{i\theta}$ için

$$A(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n e^{i(n-1)\theta} - \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})r^{n-1} \text{ ve } B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})r^{n-1}$$

denirse

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) = \operatorname{Re} \frac{1 + A(z)}{1 + B(z)}$$

olur. Burada

$$\frac{1 + A(z)}{1 + B(z)} = \frac{1 + w(z)}{1 + w(z)} \quad (3.17)$$

denirse (3.16) eşitsizliğini göstermek için $|w(z)| \leq r$ olduğunu göstermek yetecektir.

Buradan

$$\begin{aligned}w(z) &= \frac{A - B}{2 + A + B} \\ &= \frac{\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)a_n e^{i(n-1)\theta} - (n+1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}] r^{n-1}}{2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)a_n e^{i(n-1)\theta} - (n-1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}] r^{n-1}}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|w(z)| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)|a_n| + (n+1)|b_n|] r}{2 - \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)|a_n| + (n-1)|b_n|] r}$$

elde edilir. Bu son ifadeden $\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1$ iken ancak ve ancak $|w(z)| \leq r$ dir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

3.5.2 Teoreminin katsayı sınırları bize yalınkathlık için yeter şartı verir.

3.5.3 Teorem. 3.5.2 Teoreminin şartları altında f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de harmonik ve yalınkattır.

İspat. Eğer $g(z) \equiv 0$ ise f fonksiyonu analitiktir. Bu durumda f fonksiyonunun yalınkathlığı onun yıldızıl oluşundan elde edilir. Eğer $g(z) \neq 0$ ve $z_1 \neq z_2$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| &\geq 1 - \left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} b_n (z_1^n - z_2^n)}{(z_1 - z_2) \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n)} \right| \\ &> 1 - \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n |b_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|} \geq 0 \end{aligned}$$

olup, f fonksiyonunun yalınkat olduğu görülür. ■

3.5.4 Teorem. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (3.15) bağıntısıyla verilmiş olsun. $f \in N_H^{*0}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n + b_n) \leq 1$$

olmasıdır.

İspat. Teoremin bir yönü 3.5.2 Teoreminde verilmiştir. Diğer yönünü göstermek için, katsayı bağıntısı sağlanmazsa $f \notin N_H^{*0}$ olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için de

f fonksiyonunun yalınkat olmadığını göstermek yeterli olacaktır. $z = r > 0$ için $f(r) = r - \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) r^n$ ve $f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n + b_n) r^{n-1}$ olur. $f'(0) = 1$ ve $f'(1) < 0$ olduğundan $f'(r_0) = 0$ özelliğinde bir r_0 , $r_0 < 1$, sayısı vardır. Böylece r_0 noktası $f(r)$ fonksiyonunun bir yerel maksimum noktası olup, $f(r)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında bire bir olmamış olur. ■

3.5.5 Sonuç. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (3.15) bağıntısıyla verilmiş olsun. $f \in N_H^{*0}$ olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun harmonik ve yalınkat olmasıdır.

3.5.6 Teorem. Eğer $f \in N_H^{*0}$ ise $|z| = r$ olmak üzere

$$r - \frac{r^2}{2} \leq |f(z)| \leq r + \frac{r^2}{2}$$

dir. Eşitlik $f(z) = z - z^2/2$ ve $f(z) = z - \bar{z}^2/2$ fonksiyonları için geçerlidir.

İspat. $2 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \leq \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n + b_n) \leq 1$ olduğundan

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \leq r + \frac{r^2}{2}$$

ve

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) \geq r - \frac{r^2}{2}$$

elde edilir. ■

3.5.6 Teoremindeki sol tarafki eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

3.5.7 Sonuç. Eğer $f \in N_H^{*0}$ ise $\{w : |w| < 1/2\} \subset f(\mathbb{D})$ dir.

3.6 Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

(3.1) biçiminde verilen ve

$$\sum_{n=2}^{\infty} n (|a_n| + |b_n|) \leq 1 - |b_1|; \quad 0 \leq |b_1| < 1 \quad (3.18)$$

katsayı bağıntısını sağlayan $f = h + \bar{g} \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı HS ile gösterelim. $b_1 = 0$ özelliğindeki HS sınıfının elamanlarının oluşturduğu alt sınıfı HS^0 ile gösterelim.

Önce HS ve HS^0 sınıfına ait fonksiyonların yalınkatlığını ve yıldızlılığını gösterelim.

3.6.1 Teorem. HS , yön koruyan harmonik dönüşümlerin bir sınıfıdır.

İspat. $f \in HS$ ve $|z_1| \leq |z_2| < 1$ için

$$|h(z_1) - h(z_2)| \geq |z_1 - z_2| \left(1 - |z_2| \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \right)$$

ve

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \left(|b_1| + |z_2| \sum_{n=2}^{\infty} n |b_n| \right)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} |h(z_1) - h(z_2)| &\geq |f(z_1) - f(z_2)| - |g(z_1) - g(z_2)| \\ &\geq |z_1 - z_2| (1 - |b_1|)(1 - |z_2|) > 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliklerden

$$J_f = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 \geq (|h'(z)| + |g'(z)|)(1 - |b_1|)(1 - |z|) > 0$$

olur. Bu ise $f \in HS$ fonksiyonunun yön koruyan ve yalınkat olduğunu gösterir. ■

3.6.1 Teorem. $f \in HS$ ise $f(\mathbb{D})$ yıldızlı bir bölgedir.

İspat. $r, 0 < r < 1$ sabit bir sayı ve $C_r = f(|z|=r)$ $f \in HS^0$ olsun. Buradan C_r basit kapalı düzgün bir eğridir. $f(D_r)$ bölgesinin yıldızlı bir bölge olduğunu göstermek için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\frac{d}{d\theta} \arg h(re^{i\theta}) > 0 \quad (3.19)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.1) bağıntısına göre (3.19) eşitsizliği

$$1 + \operatorname{Re} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} - (n+1)\bar{b}_n r^{n-1} e^{-i(n+1)\theta}]}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n r^{n-1} e^{-i(n+1)\theta})} > 0 \quad (3.20)$$

biçimini alır.

$$A_n = a_n r^{n-1}, \quad B_n = \bar{b}_n r^{n-1}, \quad z_n = e^{i(n-1)\theta} \quad \text{ve} \quad \varsigma_n = e^{-i(n+1)\theta}$$

konumu yapılırsa, (3.20) ifadesi

$$\left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n z_n + B_n \varsigma_n) \right|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n z_n + B_n \varsigma_n) \right) \overline{\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)A_n z_n - (n+1)B_n \varsigma_n]} \right\} > 0$$

ifadesine eşit olduğu görülür. Buradan (3.18) bağıntısı ve üçgen eşitsizliğinden gereği

$$\left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n z_n + B_n \zeta_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)A_n z_n - (n_1)B_n \zeta_n] \right|^2 - \frac{1}{4} \left| \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)A_n z_n - (n+1)B_n \zeta_n] \right|^2 > 0$$

yazılabilir. Bazı hesaplamalar neticesinde A pozitif sabit bir sayı olmak üzere

$$\frac{d \arg f(re^{i\theta})}{d\theta} \geq A \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \right) \geq A(1-r) > 0$$

elde edilir. Bu durum C_r eğrisinin yıldızlı olduğunu gösterir.

$$f(\mathbb{D}) = \bigcup_r f(D_r)$$

eşitliğinden de $f(\mathbb{D})$ bölgesinin yıldızlı olduğu sonucu çıkar. ■

Teorem 3.6.2. HS^0 sınıfına ait her bir fonksiyon $r < \frac{1}{2}$ olmak üzere D_r dairelerini konveks bir bölge üzerine resmeder.

İspat. $f \in HS^0$ ve $r, 0 < r < 1$ sabit olsun. Bu durumda $r^{-1}f(rz) \in HS^0$ ve

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|) r^{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} n (|a_n| + |b_n|) (nr^{n-1}) \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n (|a_n| + |b_n|) \leq 1 \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik $nr^{n-1} \leq 1$ olmak şartıyla doğrudur. Bu ise $r \leq \frac{1}{2}$ olması demektir. ■

Aşağıdaki teorem HS sınıfına ait bazı geometrik değerlendirmeler ve distorsiyon sonucunu vermektedir.

Teorem 3.6.3. Eğer $f \in HS$ ise bu durumda

$$|f(z)| \leq |z|(1+|b_1|) + \frac{1-|b_1|}{2}|z|^2 \quad (3.21)$$

$$(1-|b_1|) \left(|z| - \frac{|z|^2}{2} \right) \leq |f(z)| \quad (3.22)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik uygun seçilen θ reel sayısı ve

$$h_\theta(z) = z + |b_1| e^{i\theta} \bar{z} + \frac{1-|b_1|}{2} \bar{z}^2$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (3.21) bağıntısının doğruluğunu gösterelim.

$$|f(z)| \leq |z|(1+|b_1|) + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

olduğu biliniyor. (3.18) gereği

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{1-|b_1|}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)(|a_n| + |b_n|) \leq \frac{1-|b_1|}{2}$$

elde edilir. Bu ise (3.21) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(3.22) eşitsizliğinin doğruluğu da benzer şekilde gösterilir. ■

KAYNAKLAR

- Avci, Y., E. Zlotkiewicz. 1990.** On Harmonic Univalent Mappings. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. XLIV. 1-7.
- Clunie, J., T. Sheil-Small. 1984.** Harmonic Univalent Functions. Annales Acad. Sci. Fennicae. 9: 3-25.
- Conway, J. B. 1973.** Functions of One Complex Variable I. Springer-Verlag, New York, pp: 1-28
- Duren, P. 1983.** Univalent Functions. Springer-Verlag, New York, 383 pp.
- Duren, P. 2004.** Harmonic Mappings in the Plane. Cambridge University Press, New York, pp: 1-54.
- Goodman, A. W. 1983.** Univalent Fonksiyonlar I. Mariner Publishing Company, Inc. USA, 246 pp.
- Hayman, W. K. 1994.** Multivalent Functions. Cambridge University Press, pp: 230-248.
- Jahangiri J. M. 1998.** Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk. J. Math. Analysis App. 235: 470-477.
- Jakubowski, Z. J. 1993.** Harmonic Mappings with a Positive Real Part. Materialy XIV Konferencji Szkoleniowej Z Teorii Zagadnien Ekstremalnych. p. 17-23.
- Kasana H. S. 2005.** Complex Variables Theory and Appl. Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, pp. 153-175.
- Lewy, H. 1936.** On The Non-Vanishing of The Jacobian In Certain One-to-One Mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42: 689-692.
- Palka, B. P. 1991.** An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag, New York, 560 pp.
- Silverman, H. 1997.** Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients. J. Math. Analysis App. 220: 283-289.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı
Doğum Yeri ve Tarihi
Yabancı Dili

: Sibel KOPARAL
: Bursa – 01.02.1987
: İngilizce

Eğitim Durumu
Lise
Lisans
Yüksek Lisans

: Atatürk Lisesi – 2005
: Uludağ Üniversitesi – 2009
: Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011