

**LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLER VE TAM ÇÖZÜMLERİ**

Pelin DOĞAN ÇANKAL



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE TAM
ÇÖZÜMLERİ**

Pelin DOĞAN ÇANKAL
0000-0002-7241-3045

Doç. Dr. Emrullah YAŞAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2020
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Pelin DOĞAN ÇANKAL tarafından hazırlanan “LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE TAM ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Başkan : Doç. Dr. Emrullah YAŞAR
0000-0003-4732-5753
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nisa ÇELİK
0000-0003-1209-991X
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İlker Burak GİRESUNLU
0000-0002-2190-0003
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

07.02.2020

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/02/2020

Pelin DOĞAN ÇANKAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE TAM ÇÖZÜMLERİ

Pelin DOĞAN ÇANKAL

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Bu tezde, bazı oluşum tipi $((1)+(1), (2)+(1)$ ve $(3)+(1)$ boyutlu) lineer olmayan reel ve kompleks kısmi türevli diferansiyel denklemler ele alındı. Bu denklemler çeşitli bilim dallarındaki birçok fiziksel olayı betimleyen lineer olmayan matematiksel modellerdir. Söz konusu denklemlerin analitik tam çözümleri elde edilmeye çalışıldı. Bu bağlamda literatürde yoğun bir şekilde incelenmekte ve geliştirilmekte olan $\exp(-\varphi(\varepsilon))$, Kudryashov ve tanh fonksiyon metotları ele alındı. Bu yöntemler göz önüne alınan fiziksel modellere ayrı ayrı tatbik edildi. Bunun yanında lineer olmayan denklemlerin bilineerleştirilmesine dayanan Hirota yaklaşımı incelendi. Bu yaklaşımdaki bazı zorlukları hafifletmek için önerilen basitleştirilmiş Hirota metodu kullanılarak çoklu soliton çözümlerin nasıl elde edildiği araştırıldı. Çalışmamızın son kısmında ise denklemin mertebesi, derecesi veya lineerlik özelliklerine herhangi bir kısıtlama yapılmasına gerek bırakmayan Lie grup yaklaşımı ele alındı. Elde edilen sonuçların kıyaslamaları, çözüm tiplerinin fiziksel anlamları ve çözümlerin grafiksel yapıları gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Tam çözüm, soliton, Lie simetrisi, oluşum türü denklemler

2020, vii + 69 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND EXACT SOLUTIONS

Pelin DOĞAN ÇANKAL

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrullah Yaşar

In this thesis, some evolution type $((1)+(1), (2)+(1)$ and $(3)+(1)$ dimensional) nonlinear real and complex partial differential equations are considered. These equations are nonlinear mathematical models that describe many physical phenomena in various disciplines. Analytical exact solutions of these equations were tried to be obtained. In this context, Kudryashov and tanh function methods, which are extensively studied and developed in the literature, are discussed. These methods were applied separately to the physical models considered. In addition, the Hirota approach based on the bilinearization of nonlinear equations was examined. In order to alleviate some of the difficulties in this approach, we investigated how multiple soliton solutions were obtained by using the proposed simplified Hirota method. In the last part of our study, Lie group approach, which does not require any restriction on the order, degree or linearity properties of the equation, is discussed. Comparisons of the obtained results, physical meanings of the solution types and graphical structures of the solutions were also demonstrated.

Key words: Exact solution, soliton, Lie symmetry, evolution type equations

2020, vii + 69 pages.

TEŞEKKÜR

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden tezin son aşamasına gelene kadar çalışmalarında bana ışık tutan, tecrübe ve bilgi birikimleriyle kendilerinden çok şey öğrendiğim, destek ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Emrullah YAŞAR' a şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğreniminin ders aşamasında vermiş olduğu emeklerden dolayı sayın Doç. Dr. Kenan YILDIRIM' a, çalışmalarım süresince tecrübelerini benden esirgemeyen, bana yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Şükran KONCA' ya, çalışma ortamındaki güler yüzleri ve manevi desteklerinden dolayı değerli hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Nisa ÇELİK ve Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR' a teşekkürlerimi sunarım.

Beni bu günlere getiren, sevgi ve anlayışları ile her zaman her koşulda yanımda olan sevgili aileme ve beni destekleyerek her konuda bana yardımcı olan çok değerli hayat arkadaşşıma sonsuz teşekkürler.

Pelin DOĞAN ÇANKAL
07/02/2020

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	9
3.1. Tanh Fonksiyon Yöntemi.....	10
3.2. $Exp(-\varphi(\varepsilon))$ Yöntemi.....	11
3.3. Modifiye Kudryashov Yöntemi.....	13
3.4. Basitleştirilmiş Hirota-Bilineer Yöntemi.....	15
3.5. Lie Simetrileri Yardımıyla KDD' lerin Tam Çözümleri.....	17
4. BULGULAR.....	21
4.1. Tanh Fonksiyon Yönteminin Denklem (4.4)' e Uygulanması.....	23
4.2. $Exp(-\varphi(\varepsilon))$ Yönteminin Denklem (4.4)' e Uygulanması.....	26
4.3. Modifiye Kudryashov Yönteminin Denklem (4.4)' e Uygulanması.....	32
4.4. Basitleştirilmiş Hirota Bilineer Yöntemi ile (2+1) Boyutlu Gardner Denklemine Çoklu Kink Çözümlerinin Elde Edilmesi.....	35
4.5. Basitleştirilmiş Hirota Bilineer Yöntemi ile Yeni (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş KP-Boussinesq Denklemine Çoklu Soliton Çözümlerinin Elde Edilmesi.....	41
4.6. Bir Boyutlu Isı Denklemine Lie Simetri Analizi.....	48
4.7. Isı Denklemine Grup-İnvariant (Değişmez) Çözümleri.....	59
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	65
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
ξ^i	Bağımsız değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümü
η^j	Bağımlı değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümü
E_α	Lineer olmayan oluşum türü denklem sistemi
sLs	Lucas simetrik sinüs fonksiyonu
cLs	Lucas simetrik kosinüs fonksiyonu
tLs	Lucas simetrik tanjant fonksiyonu
$ctLs$	Lucas simetrik kotanjant fonksiyonu
$u^1, u^2, \dots, u^m$	m tane bağımlı değişken
$x^1, x^2, \dots, x^n$	n tane bağımsız değişken
L_n	n -boyutlu Lie cebiri
$\tanh$	tanjant hiperbolik fonksiyonu
D_i	Total türev operatörü
u_{nx}	u ' nun x ' e göre n . mertebeden türevi
u_i^α	u^α ' nın x^i bağımsız değişkenine göre türevi
$X^{(k)}$	X üreticinin k . mertebe uzanımıdır

Kısaltmalar	Açıklama
ADD	Adi Diferensiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferensiyel Denklem
KP-Boussinesq	Kadomtsev-Petviashvili-Boussinesq
KdV	Korteweg-de Vries

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1.1. $y=0$ olduğunda $ u(x,y,t) ^2$ için 3D grafiğidir; burada tüm parametre değerleri 1' dir (karanlık soliton)	25
Şekil 4.1.2. $y=0$ olduğunda $ v(x,y,t) ^2$ için 3D grafiğidir; burada tüm parametre değerleri 1' dir (karanlık soliton)	26
Şekil 4.2.1. $y=0$ olduğunda $ u(x,y,t) ^2$ için 3D grafiğidir; burada $\mu=-1$, $\lambda=1$, $\gamma_1=1$, $\gamma_3=1$, $\eta_1=1$, $\eta_3=1$ ve $C=0$ ' dır (birleşik dalga çözümü).....	31
Şekil 4.2.2. $y=0$ olduğunda $v(x,y,t)$ için 3D grafiğidir; burada $\mu=-1$, $\lambda=1$, $\gamma_1=1$, $\gamma_3=1$, $\eta_1=1$, $\eta_3=1$ ve $C=0$ ' dır (birleşik dalga çözümü)	32
Şekil 4.3.1. $y=0$ olduğunda $ u(x,y,t) ^2$ için 3D grafiğidir; burada $a=1,5$ ve diğer tüm parametre değerleri 1' dir (Lucas birleşik hiperbolik fonksiyonu)	35
Şekil 4.3.2. $y=0$ olduğunda $ v(x,y,t) ^2$ için 3D grafiğidir; burada $a=1,5$ ve diğer tüm parametre değerleri 1' dir (Lucas birleşik hiperbolik fonksiyonu)	35
Şekil 4.4.1. $y=0$ iken (4.4.1) denkleminin tekli-kink çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $\alpha=1$, $\beta=2$, $\sigma=3$ ve $k_1=1$ ' dir	39
Şekil 4.4.2. $y=0$ iken (4.4.1) denkleminin ikili-kink çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $\alpha=1$, $\beta=2$, $\sigma=3$, $k_1=1$ ve $k_2=2$ ' dir	40
Şekil 4.4.3. $y=0$ iken (4.4.1) denkleminin üçlü-kink çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $\alpha=1$, $\beta=2$, $\sigma=3$, $k_1=1$, $k_2=2$ ve $k_3=3$ ' tür.....	41
Şekil 4.5.1. $y=0$ ve $z=0$ iken (4.5.1) denkleminin tekli-soliton çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $k_1=1$, $r_1=2$ ve $s_1=3$ ' tür.....	44
Şekil 4.5.2. $y=0$ ve $z=0$ iken (4.5.1) denkleminin ikili-soliton çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $k_1=-0,5$, $k_2=0,6$, $r_1=-0,1$, $r_2=0,2$, $s_1=-0,8$ ve $s_2=0,7$ ' dir	46

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 4.6.1. (4.6.1) denkleminin vektör alanları arasındaki kamütatör bağıntıları.....	55

1. GİRİŞ

Literatürde var olan çalışmalardan bilinmektedir ki, birçok fiziksel olay diferensiyel denklem veya sistemleri (adi, kısmi, integro, fark denklemleri vs.) ile modellenmektedir. Mesela bir homojenize çubuktaki ısı iletimi 2. mertebeden

$$u_t = ku_{xx} \quad (1.1)$$

denklemini ile modellenmektedir. Burada x , uzaysal değişken t zaman ve u ise sıcaklık değişkenini göstermektedir (k termal katsayıdır). Bir başka örnek ise sıg su dalgalarını modelleyen Korteweg-de Vries (KdV) denklemini olup 3. mertebeden lineer olmayan

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

biçimindedir. Burada x yine uzaysal değişken, t zamansal değişken u ise dalga hareketi değişkenidir.

Parabolik ve hiperbolik denklemler sınıfı t zaman değişkenini içerdiği için birçok fizik ve mühendislik problemlerinde karşımıza çıkmaktadır. Bu tür denklemler örneğin akışkanlar mekaniği, sıg su dalga teorisi, lineer olmayan optik, nükleer fizik, elektromanyetik alan teorisi, matematiksel biyoloji, ekonomi vb. birçok alanda gözlemlenebilir. Dolayısıyla bu tür denklemlerin matematiksel olarak incelenip çözüm fonksiyonlarının elde edilmesi, bu fiziksel olayların daha iyi yorumlanıp fiziksel olgunun açıklanması için oldukça önem arz etmektedir. Bu sebeplerden dolayı son 30-40 yıl içerisinde

$$F(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (1.3)$$

denklemlerinin nümerik ve analitik çözümlerinin inşası oldukça yoğun çalışılan bir araştırma alanıdır. En basit bir nümerik şemanın çalışılması için dahi, bir test fonksiyonu gerekmesinden dolayı bu tez çalışmasında analitik yöntemlerle (1.3) biçimindeki bazı özel denklemlerin tam çözümleri elde edilmeye çalışılmıştır.

Literatürde var olan farklı türdeki metotları ayrıntılı bir şekilde ele alıp bunların (1+1), (2+1) ve (3+1) boyutlu denklemlere uygulamaları ve nümerik simülasyonları sunulmuştur. Tezde sunulan yaklaşımların diğer oluşum türü denklemlere de uygulanabilirliği açıktır.

Tez, beş bölümden oluşmuştur. İkinci bölümde, lineer olmayan bazı kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan metotlar için gerekli olan temel tanım ve ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, literatürde var olan tanjant hiperbolik ($\tanh$) fonksiyon yöntemi, $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ yöntemi, değiştirilmiş Kudryashov yöntemi, basitleştirilmiş Hirota-bilineer yöntemi ve Lie simetri analizi tüm adımlarıyla birlikte sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde, kuantum mekaniksel hareketi tanımlamak için kullanılan, fiziğin temel denklemlerinden biri olan tek boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemi, uygulamalı bilimlerde kullanılan (akışkanlar mekaniği, optik, sıg su dalga teorisi vb.) ve bu alanlarda oldukça önemli olan (2+1) boyutlu Gardner denklemi ve yeni genelleştirilmiş (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili-Boussinesq (KP-Boussinesq) denklemi, homojenize çubukta ısı iletimini modelleyen (1+1) boyutlu ısı denkleminin tam çözümleri; üçüncü bölümde verilen yöntemler kullanılarak elde edilmiştir. Bunun yanında elde edilen çözümlerden bazılarının, belirli parametrelere göre grafiksel simülasyonları yapılarak modellerin grafikleri çizilmiştir.

Beşinci bölümde ise sonuçlar kısmına yer verilmiştir. Bu bölümde, elde edilen sonuçların fiziksel yorumları yapılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, literatürde yer alan lineer olmayan bazı kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan yöntemler için gerekli olan temel tanım ve ön bilgiler verilecektir.

Tanım (Diferensiyel Denklem): Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren denklemlerdir.

Eğer bir diferensiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon, yalnız bir bağımsız değişkene bağımlı ise diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem (ADD) denir. Genel olarak, y bağımlı, x bağımsız değişkeni göstermek üzere, n . mertebeden bir adi diferensiyel denklem

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Bir diferensiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon, iki veya daha çok bağımsız değişkene bağımlı ise diferensiyel denkleme kısmi diferensiyel denklem (KDD) denir. Genel olarak u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem;

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Diferensiyel denklemler, inceleme kolaylığı bakımından, mertebe, derece ve lineerlik özelliklerine göre sınıflandırılır.

Bir diferensiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferensiyel denklemin mertebesi denir.

Eğer bir diferensiyel denklem var olan tüm türevlere göre bir polinom denklem biçiminde ise en yüksek mertebeden türevin kuvvetine, diferensiyel denklemin derecesi denir (Çağlıyan ve ark. 2013, Sezer ve Daşcıoğlu 2016).

Tanım (Dengeleme prensibi): Toplam şeklinde verilen tam çözüm fonksiyonunun üst sınırını temsil etmektedir. Lineer olmayan herhangi bir ADD’ de, en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen en küçük pozitif değerli tam sayıdır. Herhangi bir ADD’ de en yüksek mertebeden lineer terim

$$\frac{d^{\alpha} F(z)}{dz^{\alpha}} \quad (2.1)$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim

$$F(z)^{\beta} \left(\frac{d^{\gamma} F(z)}{dz^{\gamma}} \right)^{\theta} \quad (2.2)$$

ile verilsin. Burada α , β , γ , θ pozitif tam sayılardır. M dengelenme terimi olmak üzere

$$F(z) = \frac{a}{z^M} \quad (2.3)$$

dönüşümünün (a reel sayıyı ifade eder), sırasıyla (2.1) ve (2.2) terimlerinde yerine yazılıp birbirlerine eşitlendiğinde

$$M + \alpha = M\beta + \theta(M + \gamma) \quad (2.4)$$

dengelenme bağıntısı bulunur (Güner 2014, Yıldırım 2019).

Tanım (Kamütatör): n -parametrelı Lie grup dönüşümü sonsuz küçük simetri üretici V_i ve $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ parametresine göre verilsin. Herhangi iki simetri üretici V_i ve V_j olmak üzere $[,]$ kamütatörü

$$[V_i, V_j] = V_i V_j - V_j V_i \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır. K bir cisim ve L bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. L vektör uzayı yukarıda tanımlı ikili işleme göre kapalı ise n -boyutlu Lie cebiri denir ve L_n ile gösterilir (Olver 1986).

k . mertebe lineer olmayan oluşum türü denklem sistemi

$$E_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

şeklinde ele alalım (Olver 1986, Bluman ve Kumei 1989, Ibragimov 1995, Naz ve ark. 2008). Burada

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

n tane bağımsız değişken,

$$u = (u^1, u^2, \dots, u^m) \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

m tane bağımlı değişken ve $u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(k)}$ ifadeleri sırasıyla birinci, ikinci, ..., k 'inci mertebeden kısmi türevleri temsil eder.

u^α nın x^i bağımsız değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= D_i(u^\alpha), \\ u_{ij}^\alpha &= D_j D_i(u^\alpha) \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak alınır. Burada total türev operatörü

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.6) sisteminin hem bağımsız hem de bağımlı değişkenler için bir parametrelili sonsuz küçüklikteki Lie dönüşüm grubu

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) + O(\varepsilon^2), \quad i=1,2,\dots,n, \\ \tilde{u}^i &= u^i + \varepsilon \eta^i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) + O(\varepsilon^2), \quad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak verilir. Burada $\varepsilon \ll 1$ dönüşümün küçük bir parametresidir. ξ^i ve η^j sırasıyla bağımsız ve bağımlı değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümleridir.

(2.11) dönüşüm grubuna karşılık gelen sonsuz küçüklikteki X üretici

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (2.12)$$

olarak verilir.

(2.6) sisteminin sonsuz küçük dönüşümleri altında değişmezlik koşulu veya başka bir değişle (2.12) üretici belirleyici denklem

$$X^{(k)} [E_\alpha] \Big|_{E_\alpha(x,u,u_{(1)},\dots,u_{(k)})=0} = 0 \quad (2.13)$$

olarak verilir. Burada $X^{(k)}$ ifadesi (2.11) üretcinin k . mertebe uzanımıdır ve bu operatör

$$X^{(k)} = X + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1, \dots, i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_s}^\alpha}$$

veya

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1, \dots, i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_s}^\alpha} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} \zeta_i^\alpha &= D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j), \\ \zeta_{i_1, \dots, i_s}^\alpha &= D_{i_s}(\zeta_{i_1, \dots, i_{s-1}}^\alpha) - u_{j_1, \dots, j_{s-1}}^\alpha D_{i_s}(\xi^j), \quad s > 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

olarak verilir. Örneğin 2. mertebeden (1+1) boyutlu

$$E(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}) = 0 \quad (2.16)$$

denkleminin karşılık Lie simetri üretci (2.12) denkleminin

$$X = \xi^x(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.17)$$

ifadesine karşılık gelirken bu üretcin 2. uzanımı (2.14) denkleminin

$$X^{(2)} = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \zeta_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} \quad (2.18)$$

ifadesine karşılık gelir. Burada ζ_x , ζ_t , ζ_{xx} , ζ_{tt} ve ζ_{xt} terimleri (2.15) denkleminde

$$\begin{aligned} \zeta_x &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^x) - u_t D_x(\xi^t), \\ \zeta_t &= D_t(\eta) - u_x D_t(\xi^x) - u_t D_t(\xi^t), \\ \zeta_{xx} &= D_x(\zeta_x) - u_{xx} D_x(\xi^x) - u_{tx} D_x(\xi^t), \\ \zeta_{tt} &= D_t(\zeta_t) - u_{xt} D_t(\xi^x) - u_{tt} D_t(\xi^t), \\ \zeta_{xt} &= D_t(\zeta_x) - u_{xt} D_t(\xi^x) - u_{tt} D_t(\xi^t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

olarak verilir. (2.19) denklemindeki D_x ve D_t terimleri (2.10) denkleminde

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t}, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} \end{aligned} \quad (2.20)$$

elde edilir (Yıldırım 2019).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda, ikinci bölümde bahsi geçen çeşitli oluşum tipi denklemleri matematiksel olarak incelememize olanak veren bazı yöntemler adım adım sunulmuştur. Bu yöntemler kısaca,

- i) *Tanh* fonksiyon açılımı
- ii) *Exp*($-\phi(\varepsilon)$) fonksiyon yaklaşımı
- iii) Modifiye Kudryashov yöntemi
- iv) Basitleştirilmiş Hirota bilineer yöntemi
- v) Lie simetri grupları yaklaşımı

olarak verilmiştir.

Yukarıdaki ilk üç yöntem için aşağıdaki indirgeme süreci öncelikli olarak ele alınır:

İlk olarak

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

formundaki türeve göre polinom olan lineer olmayan oluşum denklemini göz önüne alalım. Burada u_{nx} , u' nun x' e göre n. mertebeden türevini gösterir.

(3.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini elde edebilmek için $\xi = c(x - \lambda t)$ dalga değişkeni takdim edilir. u bağımlı değişkeni ise

$$u(x, t) = U(\xi) \quad (3.2)$$

olarak yazılır. Burada yerleştirilmiş $U(\xi)$ dalga çözümü λ dalga hızı ile ilerlemektedir. Eski bağımsız değişkenlerin türev operatörleri, yeni ξ değişkeni cinsinden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= -c\lambda \frac{d}{d\xi}, \\
\frac{\partial}{\partial x} &= c \frac{d}{d\xi}, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= c^2 \frac{d^2}{d\xi^2}, \\
\frac{\partial^3}{\partial x^3} &= c^3 \frac{d^3}{d\xi^3},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde temsil edilir. (3.3) değişken değişimi kullanılarak (3.1)' de verilen denklem,

$$P(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{3.4}$$

denkleme dönüştürülür.

3.1. Tanh Fonksiyon Yöntemi

Bu alt bölümde, tanh fonksiyon yönteminin adımları sunulmuştur (Malfliet 1992, Fan ve Hona 2002, Wazwaz 2004). Bu yaklaşım, ilerleyen dalga çözümlerinin tanh fonksiyonu cinsinden ifade edilmesi ön varsayımına dayanmaktadır.

1. Adım: (3.4)' deki ADD' nin belirsiz integrali alınarak (integrasyon sabitini sıfır kabul edilir) basitleştirilmiş bir ADD elde edilir.

2. Adım: Daha sonra yeni bir bağımsız değişken

$$Y = \tanh(\varepsilon), \tag{3.1.1}$$

tanıtılır. Bu yeni değişken türevlerin değişmesine yol açar:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon} &= (1-Y^2) \frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} &= (1-Y^2) \left(-2Y \frac{d}{dY} + (1-Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right).\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

Diğer türevler de benzer şekilde elde edilebilir.

3. Adım: Bir ansatz

$$U(\varepsilon) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k, \tag{3.1.3}$$

tanımlanır. Burada M, çoğu durumda sonradan belirlenebilecek pozitif bir tam sayıdır (sonlu seri genişleme mertebesi yani elde edilen (3.4)' deki ADD' de homojen dengeleme yapılarak elde edilen sayı). M parametresini belirlemek için (3.4)' deki ADD' deki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim dengelenir.

4. Adım : (3.1.2) ve (3.1.3)' ün (3.4)' teki ADD' de yerine yazılmasıyla Y' nin kuvvetlerini içeren bir denklem ortaya çıkar. Y' nin benzer kuvvetlerinin katsayılarının birbirine eşitlenmesiyle $a_k, (k=0...M)$, c ve λ ' yı içeren cebirsel denklem sistemine ulaşılır (Parkes ve Duffy 1996). $a_k, (k=0...M)$, c ve λ parametreleri belirlendikten sonra M' nin de pozitif bir tam sayı olduğu göz önünde bulundurularak (3.1.3) kullanıldığında kapalı formda analitik bir çözüm elde edilir.

3.2. $\text{Exp}(-\varphi(\varepsilon))$ Yöntemi

Yöntemin temel özellikleri He ve Wu (2006), Zahran (2015), Mohyud-Din ve Ali (2017) ve Hosseini ve ark. (2018) tarafından verilmiştir. (2 + 1) boyutlu lineer olmayan oluşum denklemlerini (polinom türevlerini içeren) göz önüne alınır:

$$F(u, u_x, u_y, u_t, u_{xy}, u_{xt}, u_{yx}, u_{yt}, \dots) = 0. \quad (3.2.1)$$

Buradaki u , bağımlı değişken olup ve x, y, t ise bağımsız değişkenlerdir. $u(x, y, t) = U(\varepsilon)$, $\varepsilon = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 t$ dalga değişkeni dönüşümü kullanılarak, (3.2.1) denklemi, aşağıdaki lineer olmayan ADD' ye dönüştürülür:

$$G(U, U', U'', \dots) = 0. \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) denklemi için aşağıdaki sonlu seri genişletilmiş çözümü araştırılır:

$$U(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \exp(-n\varphi(\varepsilon)) = a_0 + a_1 \exp(-\varphi(\varepsilon)) + \dots + a_N \exp(-N\varphi(\varepsilon)), \quad a_N \neq 0. \quad (3.2.3)$$

(3.2.3) denkleminde katsayılar a_n , $n=1, 2, \dots, N$ daha sonradan belirlenecektir. Pozitif tamsayı N , lineer olmayan en yüksek dereceli terim ve lineer terim arasındaki homojen dengeleme ile hesaplanır. $\varphi(\varepsilon)$ analitik fonksiyonu aşağıdaki birinci dereceden lineer olmayan ADD' ye karşılık gelir:

$$\varphi'(\varepsilon) = \exp(-\varphi(\varepsilon)) + \mu \exp(\varphi(\varepsilon)) + \lambda. \quad (3.2.4)$$

Ardından katsayı sınıflandırmalarına göre (3.2.4) denkleminin bazı çözüm takımları bulunur:

Durum 1: Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $\mu \neq 0$ ise

$$\varphi_1(\varepsilon) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda}{2\mu} \right). \quad (3.2.5)$$

Durum 2: Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$, $\mu = 0$ ve $\lambda \neq 0$ ise

$$\varphi_2(\varepsilon) = -\ln\left(\frac{\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1}\right). \quad (3.2.6)$$

Durum 3: Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ve $\mu \neq 0$ ise

$$\varphi_3(\varepsilon) = \ln\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4\mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda}{2\mu}\right). \quad (3.2.7)$$

Maple programı yardımıyla (3.2.3) denklemi, (3.2.2) denkleminde yerine yazılır. Bu işlem sonrasında aynı dereceli $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ terimlerinin katsayıları birbirlerine eşitlendiğinde, a_n , η_1 , η_2 ve η_3 ' ü içeren bir cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem çözüldükten sonra bu katsayılar kolayca yakalanır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında (3.2.3)' ün, (3.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini verdiği görülür.

3.3. Modifiye Kudryashov Yöntemi

Modifiye Kudryashov yönteminin ön basamakları yapılan çalışmalarda (Kudryashov 2012, Ege ve Mısırlı 2014, Hosseini ve ark. 2018) verilmiştir. 3.2 yönteminde olduğu gibidir. Aynı hareketli dalga dönüşümü ile orijinal lineer olmayan oluşum denklemi, lineer olmayan ADD' ye dönüştürülür.

$$U(\varepsilon) = a_0 + a_1 Q(\varepsilon) + \dots + a_N Q^N(\varepsilon), \quad a_N \neq 0, \quad (3.3.1)$$

varsayılan çözüm formudur. Burada sabitler a_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ daha sonra belirlenecek olup N homojen dengeleme tekniği ile belirlenen pozitif bir sayıdır ve

$$Q(\varepsilon) = 1 / (1 + d a^\varepsilon) \quad (3.3.2)$$

aşağıdaki lineer olmayan ADD' yi karşılayan açık bir fonksiyondur:

$$Q'(\varepsilon) = Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1) \ln a. \quad (3.3.3)$$

Maple programı yardımıyla (3.3.3) denklemi, (3.2.2) denkleminde yerine yazılıp benzer $Q(\varepsilon)$ terimlerinin katsayıları eşitlendiğinde, a_n , η_1 , η_2 ve η_3 terimlerini içeren cebirsel bir sistem elde edilir. Elde edilen cebirsel sistemden katsayıların bulunmasıyla (3.3.1) denklemi, (3.2.1) denkleminin tam hareketli dalga çözümlerini verir.

Stakhov ve Rozin (2005), Zayed ve Allurfi (2015)' nin çalışmalarından elde edilen çıkarımla, (3.3.2) denkleminin Lucas simetrik hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları açısından tanımlanabileceği açıkça görülür. Bu çalışmalardan Lucas simetrik hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının sırasıyla şu şekilde tanımlandığı kabul edilir:

$$sLs(\varepsilon) = a^\varepsilon - a^{-\varepsilon}, \quad (3.3.4)$$

$$cLs(\varepsilon) = a^\varepsilon + a^{-\varepsilon}. \quad (3.3.5)$$

Benzer şekilde Lucas simetrik hiperbolik tanjant ve kotanjant fonksiyonları olarak okunur:

$$tLs(\varepsilon) = \frac{a^\varepsilon - a^{-\varepsilon}}{a^\varepsilon + a^{-\varepsilon}}, \quad ctLs(\varepsilon) = \frac{a^\varepsilon + a^{-\varepsilon}}{a^\varepsilon - a^{-\varepsilon}}. \quad (3.3.6)$$

Ayrıca, Lucas simetrik hiperbolik sinüs ile kosinüs arasında aşağıdaki gibi bir özdeşliğin var olduğu gösterilmiştir (Stakhov ve Rozin 2005, Zayed ve Alurfi 2015):

$$[cLs(\varepsilon)]^2 - [sLs(\varepsilon)]^2 = 4 \quad (3.3.7)$$

Eğer (3.3.3) denkleminde özel olarak $a = e$ seçilirse klasik Kudryashov yöntemi elde edilir (Kudryashov 2012).

3.4. Basitleştirilmiş Hirota-Bilineer Yöntemi

Hirota metodu, bilinear forma getirilebilen lineer olmayan KDD' lerin tam çözümlerini bulmak için kullanılır (Hirota 2004). Şayet mevcutsa lineer olmayan KDD' ler için bilinear formların bulunması kolay bir işlem değildir. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için Hereman ve Nusayır (1997) tarafından, Hirota yönteminin basitleştirilmiş bir hali takdim edildi. Basitleştirilmiş Hirota yöntemi, bilinear formların yapımına bağlı olmayıp bunun yerine; çoklu-kink ve çoklu-soliton çözümlerinin üstel fonksiyonların polinomları olarak kabul edilebileceğini varsaymaktadır (Wazwaz 2014, 2016). Bu suretle söz konusu denklemlerin yalnız gezen (solitary), çoklu-kink ve çoklu-soliton çözümleri oluşturulabilir. Bu yöntemle göz önüne alınan denklem(lerin) tam çözümleri –bilinear formları araştırılmadan- bir pertürbasyon şemasının çözülmesiyle elde edilir. Bunun için çeşitli bilgisayar paketleri kullanılabilir.

KDD' lerin çoklu-kink ve çoklu-soliton çözümlerini elde edebilmek için çözüm adımları aşağıdaki şekilde verilebilir:

1. Adım: Ele alınan KDD' deki lineer terimlerde

$$u(x, y, t) = e^{\theta_i}, \quad \theta_i = k_i x + r_i y - c_i t \quad (3.4.1)$$

ifadesinin yerine yazılmasıyla c_i için saçılım bağıntısı bulunur.

2. Adım: Denklemden yer alan lineer olmayan terimler ile lineer terimler arasında homojen dengeleme yapılarak indirgeme sayısı olan M bulunur.

3. Adım: Denklemin çözüm tipi –aşağıdaki değişken dönüşümü ile birlikte- bulunan indirgeme sayısına ve yardımcı fonksiyona bağlı olarak

$$u(x, y, t) = R(\ln(f(x, y, t)))_{x_M} \quad (3.4.2)$$

şeklinde kabul edilir. Burada x_M ifadesi x bağımsız değişkenin M defa kısmi türevini gösterir. (3.4.2)' deki değişken dönüşümü ile birlikte orijinal bağımlı değişken u , artık yeni bir değişken olan f ve türevleri cinsinden ifade edilir. (3.4.2) numaralı dönüşümdeki yardımcı fonksiyon;

tekli-soliton çözümü için

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1}, \quad (3.4.3)$$

ikili-soliton çözümü için

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2}, \quad (3.4.4)$$

üçlü-soliton çözümü için

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}, \quad (3.4.5)$$

tekli-kink çözümü için

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1}, \quad (3.4.6)$$

ikili-kink çözümü için

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad (3.4.7)$$

üçlü-kink çözümü için

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \quad (3.4.8)$$

şeklinde tanımlanır (Wazwaz 2014, 2016). Burada $\theta_i, (i=1,2,3)$ ' ler faz değişkenleri

olup (3.4.1)' de verildiği gibi bulunabilirken; a_{12} , a_{13} , a_{23} ve b_{123} faz değişimleri, tanımlanan yardımcı fonksiyonun (çoklu soliton çözümün durumuna göre, (3.4.3)-(3.4.5) bağıntılarından biri) (3.4.2) ile birlikte denklemde yerine yazılmasıyla bulunur. (3.4.2) numaralı dönüşümde yer alan R sabiti ise (3.4.2) ve yardımcı fonksiyonun ele alınan denklemde yerine yazılmasıyla bulunur.

4. Adım: Bulunan değerlerin (3.4.2)' de yerine yazılmasıyla göz önüne alınan KDD' nin çoklu-kink ve çoklu-soliton çözümleri elde edilmiş olur.

3.5. Lie Simetrileri Yardımıyla KDD' lerin Tam Çözümleri

Bu bölümde, Lie simetri analizi ile KDD' lerin tam çözümlerine ulaşma süreci verilmiştir (Olver 1986, Ibragimov ve Kovalev 2009, San 2011).

u bağımlı değişken, x ve t ise bağımsız değişkenler olsun. n . mertebeden bir KDD' yi

$$H(x, t, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) \quad (3.5.1)$$

göz önüne alalım.

Bir bağımlı iki bağımsız değişken içeren bir KDD' nin tam çözümlerine ulaşmamızı sağlayan adımlar aşağıdaki şekilde verilmiştir (Olver, 1986):

1. Adım: (3.5.1) denklemini değişmez bırakan

$$\begin{aligned} x^* &= x + a\xi(x, t, u) + O(a^2) \\ t^* &= t + a\tau(x, t, u) + O(a^2) \\ u^* &= u + a\phi(x, t, u) + O(a^2) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

iki parametrelili Lie grup dönüşümleri verilsin. Buradaki ξ , τ ve ϕ sonsuz küçük fonksiyonları bağımsız değişkenler olan x , t ve bağımlı değişken olan u 'ya bağımlıdır.

$O(a^2)$ terimi ise nokta dönüşümündeki sonsuz küçük kaymayı ifade eder. Her dönüşüm grubuna bir vektör alanı karşılık geleceğinden; (3.5.2) dönüşüm grubu ile ilişkili (x, t, u) uzayındaki vektör alanı

$$V = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.5.3)$$

biçimindedir.

2. Adım: (3.5.1) denkleminin mertebesi n olduğundan (3.5.3)' ün n . uzanımı

$$pr^{(n)}V = V + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \dots + \phi^{x_k x_m} \frac{\partial}{\partial u_{x_k x_m}} \quad (3.5.4)$$

şeklinde. Burada $k + m = n$ ($1 < k, m < n$ olmak üzere) olup $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{tt}, \phi^{xt}, \dots, \phi^{x_k x_m}$ ler (3.5.3)' ün uzatılmış sonsuz küçük katsayı fonksiyonları (üreteçleri) dir. Bunlar,

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = D_x \phi - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau \\ &= \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t, \\ \phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = D_t \phi - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau \\ &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \xi_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = D_x^2 \phi - u_x D_x^2 \xi - u_t D_x^2 \tau - 2u_{xx} D_x \xi - 2u_{xt} D_x \tau \\ &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 \\ &\quad - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} \end{aligned}$$

...

şeklinde verilir (Olver 1986).

3. Adım: (3.5.1) denklemini için değişmezlik koşulu

$$pr^{(n)}V\{H\}\big|_{H=0} = 0 \quad (3.5.6)$$

şeklindedir. (3.5.6) eşitliğinde (uzanımın H denkleminde uygulanıp), (3.5.5)' de verilen uzatılmış sonsuz küçük fonksiyonlarının yerine yazılmasıyla u ' nun $1, 2, \dots, n$. mertebe kısmi türevlerinin çeşitli monomiallerini içeren eşitlik ortaya çıkar.

4. Adım: Üçüncü adımda elde edilen eşitlikte yer alan u ' nun $1, 2, \dots, n$. mertebe kısmi türevlerinin çeşitli monomiallerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, aşırı belirleyici denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemi ξ , τ ve ϕ bilinmeyenlerine göre çözüldüğünde sonsuz küçük fonksiyonları ξ , τ ve ϕ elde edilmiş olur.

5. Adım: Dördüncü adımda bulunan sonsuz küçük fonksiyonları V vektör alanında yerine yazılarak V_i simetri üreteçleri bulunur. Dolayısıyla (3.5.1) denkleminin simetri gruplarının Lie cebiri, V_i simetri üreteçleri ile gerilir. Bu adımda V_i üreteçlerinin kamütatör tablosu (tablo değerleri (2.5) eşitliği kullanılarak bulunur) oluşturularak ikili işleme göre kapalı olduğu görülür (kapalı olması V_i üreteçlerinin lineer birleşiminden oluşan tabanın, Lie cebirini ürettiğini gösterir).

6. Adım: Beşinci adımda elde edilen her bir simetri üretecine, denk gelen bir dönüşüm grubu mevcuttur. Bu dönüşüm grupları Olver (1986) ,Ibragimov ve Kovalev (2009), San (2012)' ın çalışmalarında olduğu gibi bulunabilir.

V_i simetri üretecinin dönüşüm grupları (her bir bileşen için):

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \varepsilon} \\ \tau(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{t}_i}{\partial \varepsilon} \\ \phi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

ifadelerine

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i|_{\varepsilon=0} &= x_i \\ \tilde{t}_i|_{\varepsilon=0} &= t_i \\ \tilde{u}_i|_{\varepsilon=0} &= u_i\end{aligned}\tag{3.5.8}$$

başlangıç şartlarının uygulanması ile bulunur (San, 2012)

7. Adım: Son adım olarak; (3.5.1)' de verilen denklemin, simetri üreteçleri yardımıyla dönüşüm grupları (denklemini değişmez bırakan) bulunur ve böylelikle bahsi geçen denklemin farklı tam çözümleri yazılır. Ayrıca bulunan Lie dönüşüm gruplarıyla (3.5.1)' de verilen (2+1) boyutlu KDD' nin, (1+1) boyutlu KDD' ye ya da ADD' ye indirgenmesi sağlanır. Bu indirgeme nihayetinde vektör alanına bağlı yazılan

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\phi}\tag{3.5.9}$$

karakteristik denklemin çözülmesiyle mümkündür. Buradan da invaryantlar kullanılarak kısmi değişken sayısı azaltılır. Bulunan ADD' nin çözülmesiyle de (3.5.1) denkleminin farklı çözümleri bulunmuş olur.

4. BULGULAR

Tek boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemi, kuantum mekaniksel hareketi tanımlamak için fiziğin temel denklemdir. Aynı zamanda Schrödinger dalga denklemi olarak da adlandırılan

$$iq_t + 2|q|^2 q + q_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

denklemi kompleks bir KDD olup, $q(x, t)$ denklemin dalga hareketini ifade eder.

Strashan (1992), kendinden-ikili Yang Mills denklemini boyutsal olarak azaltarak lineer olmayan Schrödinger denkleminin bir genellemesi olan bir $(2 + 1)$ boyutlu uzay-zamansal yerel olmayan sistemi

$$\begin{aligned} kq_t &= \frac{1}{2} q_{xy} - q \int \partial_y [p.q] d_x, \\ -kp_t &= \frac{1}{2} p_{xy} - p \int \partial_y [p.q] d_x \end{aligned} \quad (4.2)$$

tanıttı ve geometrik bakış açısından bakıldığında integrallenebilir olduğunu gösterdi (Zakharov 1980, Radha ve Lakshmanan 1994).

$$v_x(p, q) = 2\partial_y [p.q] \quad (4.3)$$

potansiyel fonksiyonu ve $p = -q^* = u$ ve $k = -i/2$, değişken değişimleri ile (4.2) denklemi, aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xy} + uv, \\ v_x &= 2(|u|^2)_y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4) denklemi, $\partial_x = \partial_y$ iken klasik lineer olmayan Schrödinger denklemine dönüşür.

Öncelikle, tezde kullanılan yöntemlerden ilk üçü için ele alınan (4.4) denkleminin indirgeme süreci gösterilecektir.

(4.4) denkleminin tam çözümlerini ortaya koyabilmek için,

$$u(x, y, t) = U(\varepsilon)e^{i\psi}, \quad v(x, y, t) = V(\varepsilon) \quad (4.5)$$

dönüşümü kullanılır. Burada

$$\psi = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 t \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 t \quad (4.6)$$

dır. (4.6) denklemindeki γ_i ve η_i ($i=1,2,3$) daha sonra belirlenecek keyfi sabitlerdir (Younis, M. ve ark. 2018). (4.5) denkleminin, (4.4) denkleminde yerine yazılması ve ardından ulaşılan denklemin gerçek ve sanal bölümlerinin ayrıştırılması yoluyla sırasıyla

$$\eta_1 \eta_2 U''(\varepsilon) + U(\varepsilon)V(\varepsilon) + (\gamma_3 - \gamma_1 \eta_2)U(\varepsilon) = 0, \quad (4.7)$$

$$(\eta_1 \eta_2 + \gamma_1 \eta_2 + \eta_3)U'(\varepsilon) = 0, \quad (4.8)$$

ve

$$\eta_1 V'(\varepsilon) = 2\eta_2 (U^2(\varepsilon))' \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.8) denkleminin aşağıdaki kısıtı taşıması gerektiği kolayca görülmektedir:

$$(\eta_1 \eta_2 + \gamma_1 \eta_2 + \eta_3) = 0. \quad (4.10)$$

Ardından (4.9) denkleminin ε ' a göre integrasyonundan sonra

$$V(\varepsilon) = \frac{2\eta_2}{\eta_1} U^2(\varepsilon) \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) denklemi, (4.7) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U''(\varepsilon) + \frac{2}{\eta_1^2} U^3(\varepsilon) + \left(\frac{\gamma_3 - \gamma_1 \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \right) U(\varepsilon) = 0. \quad (4.12)$$

ikinci dereceden lineer olmayan ADD elde edilir.

4.1. Tanh Fonksiyon Yönteminin Denklem (4.4)' e Uygulanması

Bu alt bölümde, denklem (4.4)' ün tam çözümleri tanh fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilecektir. (4.12)' deki lineer ve lineer olmayan en yüksek dereceli terimlerden dengeleme sayısının $N = 1$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla çözüm formumuz (3.1.3)' den

$$U(\varepsilon) = a_0 + a_1 \tanh(\varepsilon) \quad (4.1.1)$$

biçimindedir. Maple programı yardımı ile (4.1.1) denklemi, (4.12) denkleminde yerine yazılır ve aynı dereceli $\tanh(\varepsilon)$ terimlerinin katsayıları eşitlenir. Böylece a_n , η_1 , η_2 ve η_3 ' ü içeren cebirsel bir sistem oluşturulur. $\tanh(\varepsilon)$ ' un benzer kuvvetteki katsayıları aşağıda sıralanmıştır:

$$\tanh^3(\varepsilon) : \quad 2a_1^2 + \frac{2a_1^3}{\eta_1^2} = 0,$$

$$\tanh^2(\varepsilon) : \quad \frac{6a_0 a_1^2}{\eta_1^2} = 0,$$

$$\tanh(\varepsilon) : \quad -2a_1^2 + \frac{6a_0^2 a_1}{\eta_1^2} - \frac{a_1 \gamma_1}{\eta_1} + \frac{a_1 \gamma_3}{\eta_1 \eta_2} = 0$$

$$\text{Sabit : } \frac{2a_0^3}{\eta_1^2} - \frac{a_0\gamma_1}{\eta_1} + \frac{a_0\gamma_3}{\eta_1\eta_2} = 0.$$

Maple programı yardımı ile yukarıdaki cebirsel sistem çözüldükten sonra aşağıdaki katsayı sınıfları elde edilir:

$$\text{Sınıf 1. } a_0 = 0, a_1 = 1, \eta_1 = i, \eta_2 = -\frac{\gamma_3 + 2\gamma_1}{\gamma_1}, \eta_3 = \eta_3.$$

$$\text{Sınıf 2. } a_0 = 0, a_1 = 1, \eta_1 = i, \eta_2 = \frac{\gamma_3 - 2\gamma_1}{\gamma_1}, \eta_3 = \eta_3.$$

$$\text{Sınıf 3. } a_0 = 0, a_1 = 1, \eta_1 = -i, \eta_2 = -\frac{\gamma_3 + 2\gamma_1}{\gamma_1}, \eta_3 = \eta_3.$$

$$\text{Sınıf 4. } a_0 = 0, a_1 = 1, \eta_1 = -i, \eta_2 = \frac{\gamma_3 - 2\gamma_1}{\gamma_1}, \eta_3 = \eta_3.$$

Böylelikle, (4.4) denkleminin dark (karanlık) soliton çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

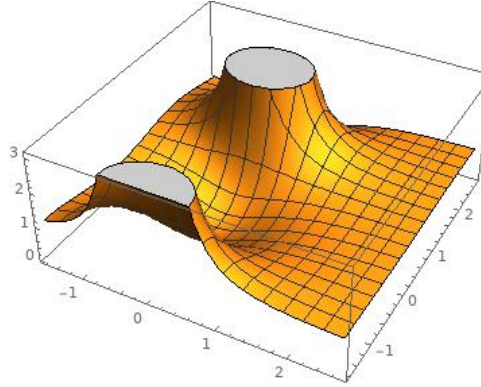
$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= \tanh\left(ix + \left(\frac{i^2\gamma_3 - 2\gamma_1}{\gamma_1}\right)y + \eta_3 t\right) e^{i\psi}, \\ v_1(x, y, t) &= \frac{2i^2\gamma_3 - 4\gamma_1}{\gamma_1 i} \tanh^2\left(ix + \left(\frac{i^2\gamma_3 - 2\gamma_1}{\gamma_1}\right)y + \eta_3 t\right). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) &= \tanh\left(ix + \left(-\frac{i^2\gamma_3 + 2\gamma_1}{\gamma_1}\right)y + \eta_3 t\right) e^{i\psi}, \\ v_2(x, y, t) &= -\frac{2i^2\gamma_3 + 4\gamma_1}{\gamma_1 i} \tanh^2\left(ix + \left(-\frac{i^2\gamma_3 + 2\gamma_1}{\gamma_1}\right)y + \eta_3 t\right). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

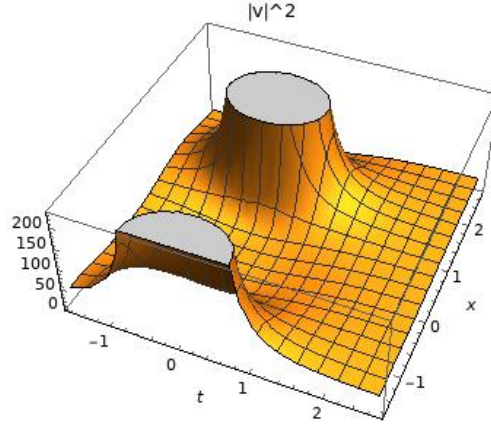
$$\begin{aligned}
u_3(x, y, t) &= \tanh \left(-ix + \left(\frac{i^2 \gamma_3 - 2\gamma_1}{\gamma_1} \right) y + \eta_3 t \right) e^{i\psi}, \\
v_3(x, y, t) &= \frac{-2i^2 \gamma_3 + 4\gamma_1}{\gamma_1 i} \tanh^2 \left(-ix + \left(\frac{i^2 \gamma_3 - 2\gamma_1}{\gamma_1} \right) y + \eta_3 t \right).
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, y, t) &= \tanh \left(-ix + \left(-\frac{i^2 \gamma_3 + 2\gamma_1}{\gamma_1} \right) y + \eta_3 t \right) e^{i\psi}, \\
v_4(x, y, t) &= \frac{2i^2 \gamma_3 + 4\gamma_1}{\gamma_1 i} \tanh^2 \left(-ix + \left(-\frac{i^2 \gamma_3 + 2\gamma_1}{\gamma_1} \right) y + \eta_3 t \right).
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Denklem (2.4)' ün, (4.1.2) çözümüne ait grafikleri ($y=0$ olmak üzere) Şekil 4.2.1 ve 4.2.2' de verilmiştir.



Şekil 4.1.1. $y=0$ olduğunda $|u(x, y, t)|^2$ için 3D grafiğidir; burada tüm parametre değerleri 1'dir (karanlık soliton)



Şekil 4.1.2. $y = 0$ olduğunda $|v(x, y, t)|^2$ için 3D grafiğidir; burada tüm parametre değerleri 1'dir (karanlık soliton)

4.2. $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ Yönteminin Denklem (4.4)' e Uygulanması

Bu bölümde, $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ yöntemi kullanılarak denklem (4.4)' ün tam çözümleri aranmıştır. Yukarıda belirtildiği gibi, (4.4) denklemi, (4.5) denkleminde verilen dalga değişkenleri tarafından ikinci dereceden lineer olmayan ADD' ye ((4.12) denklemine) dönüştürülür. Öncelikle, (4.12) denklemindeki U'' ile U^3 terimleri dengelenir ve sonlu seri mertebesi $N=1$ olarak elde edilir. Bu nedenle çözüm formu (3.2.3)' ten

$$U(\varepsilon) = a_0 + a_1 \exp(-\varphi(\varepsilon)) \quad (4.2.1)$$

şeklindedir.

(4.2.1) denkleminin, (4.12) denkleminde yerine yazılıp benzer (aynı dereceli) $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ terimlerinin katsayılarının eşitlenmesiyle a_n , η_1 , η_2 ve η_3 ifadelerini içeren aşağıdaki cebirsel sistem elde edilir:

$$\exp(-3\varphi(\varepsilon)) \text{ Katsayısı: } 2a_1\eta_2(a_1^2 + \eta_1^2) = 0,$$

$$\exp(-2\varphi(\varepsilon)) \text{ Katsayısı: } 3a_1\eta_2(\lambda\eta_1^2 + 2a_0a_1) = 0,$$

$$\exp(-\varphi(\varepsilon)) \text{ Katsayısı: } 2a_1\left(\left(\frac{1}{2}\lambda^2 + \mu\right)\eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_1\gamma_1 + 3a_0^2\right)\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_1\gamma_3 = 0,$$

$$\text{Sabit: } \left(\lambda\mu a_1\eta_1^2 + 2a_0^3 - a_0\eta_1\gamma_1\right)\eta_2 + a_0\eta_1\gamma_3 = 0.$$

Bu denklemler Maple programı yardımı ile çözülürse aşağıdaki katsayı sınıfları elde edilir:

$$\text{Sınıf 1. } a_0 = \frac{1}{2}i\lambda\eta_1, \quad a_1 = i\eta_1, \quad \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_2 = \frac{2\gamma_3}{\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1}, \quad \eta_3 = \eta_3.$$

$$\text{Sınıf 2. } a_0 = \frac{1}{2}i\lambda\eta_1, \quad a_1 = -i\eta_1, \quad \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_2 = \frac{2\gamma_3}{\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1}, \quad \eta_3 = \eta_3.$$

$$\text{Sınıf 3. } a_0 = -\frac{1}{2}i\lambda\eta_1, \quad a_1 = i\eta_1, \quad \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_2 = \frac{2\gamma_3}{\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1}, \quad \eta_3 = \eta_3.$$

$$\text{Sınıf 4. } a_0 = -\frac{1}{2}i\lambda\eta_1, \quad a_1 = -i\eta_1, \quad \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_2 = \frac{2\gamma_3}{\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1}, \quad \eta_3 = \eta_3.$$

Böylelikle, yukarıdaki katsayı sınıflarına karşılık gelen (4.4) denkleminin, (4.5) denklem formuna ait olan tam çözümü (denklem (4.11) ve denklem (4.2.1) ile birlikte) oluşturulur:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= \left(\frac{1}{2}i\lambda\eta_1 + i\eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right) e^{i\psi}, \\ v_1(x, y, t) &= \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1)} \left(\frac{1}{2}i\lambda\eta_1 + i\eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right)^2. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, y, t) &= \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - i \eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right) e^{i\psi}, \\
v_2(x, y, t) &= \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2 \eta_1 - 4\mu \eta_1 + 2\gamma_1)} \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - i \eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + i \eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right) e^{i\psi}, \\
v_3(x, y, t) &= \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2 \eta_1 - 4\mu \eta_1 + 2\gamma_1)} \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + i \eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - i \eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right) e^{i\psi}, \\
v_4(x, y, t) &= \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2 \eta_1 - 4\mu \eta_1 + 2\gamma_1)} \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - i \eta_1 e^{-\varphi(\varepsilon)} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

(3.2.5)-(3.2.7)' de sınıflandırılan $\varphi(\varepsilon)$ değerleri (4.2.2)-(4.2.5)' te yerine yazılırsa (4.4)' te verilen (2+1) boyutlu lineer olmayan Schrödinger denkleminin aşağıdaki tam çözüm takımları elde edilir:

Durum 1: Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $\mu \neq 0$ ise, kombine (karma) dalga çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, t) &= \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2\mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu / 2})(\varepsilon + C))}{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu / 2})(\varepsilon + C)) - \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu / 2})(\varepsilon + C))} \right) e^{i\psi}, \\
v_1(x, y, t) &= \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2 \eta_1 - 4\mu \eta_1 + 2\gamma_1)} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2\mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu / 2})(\varepsilon + C))}{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu / 2})(\varepsilon + C)) - \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4\mu / 2})(\varepsilon + C))} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, y, t) &= \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - \frac{2 \mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))}{-\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))} \right) e^{i \psi}, \\
v_2(x, y, t) &= \frac{4 \gamma_3}{\eta_1 (\lambda^2 \eta_1 - 4 \mu \eta_1 + 2 \gamma_1)} \\
&\times \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - \frac{2 \mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))}{-\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2 \mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))}{-\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))} \right) e^{i \psi}, \\
v_3(x, y, t) &= \frac{4 \gamma_3}{\eta_1 (\lambda^2 \eta_1 - 4 \mu \eta_1 + 2 \gamma_1)} \\
&\times \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2 \mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))}{-\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2 \mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))}{\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C)) + \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))} \right) e^{i \psi}, \\
v_4(x, y, t) &= \frac{4 \gamma_3}{\eta_1 (\lambda^2 \eta_1 - 4 \mu \eta_1 + 2 \gamma_1)} \\
&\times \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2 \mu i \eta_1 \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))}{\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} \sinh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C)) + \lambda \cosh((\sqrt{\lambda^2 - 4 \mu} / 2)(\varepsilon + C))} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Durum 2: Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$, $\mu = 0$ ve $\lambda \neq 0$ ise, kombine (karma) dalga çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$u_1(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 + \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right) e^{i\psi}, \quad (4.2.10)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1)} \left(\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 + \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right)^2.$$

$$u_2(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 - \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right) e^{i\psi}, \quad (4.2.11)$$

$$v_2(x, y, t) = \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1)} \left(\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 - \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right)^2.$$

$$u_3(x, y, t) = \left(-\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 + \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right) e^{i\psi}, \quad (4.2.12)$$

$$v_3(x, y, t) = \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1)} \left(-\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 + \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right)^2.$$

$$u_4(x, y, t) = \left(-\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 - \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right) e^{i\psi}, \quad (4.2.13)$$

$$v_4(x, y, t) = \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1)} \left(-\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 - \frac{i\eta_1\lambda}{\cosh(\lambda(\varepsilon + C)) + \sinh(\lambda(\varepsilon + C)) - 1} \right)^2.$$

Durum 3: $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise $\mu \neq 0$ ise, periyodik dalga çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$u_1(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 + \frac{2\mu i\eta_1}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4\mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right) e^{i\psi}, \quad (4.2.14)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{4\gamma_3}{\eta_1(\lambda^2\eta_1 - 4\mu\eta_1 + 2\gamma_1)} \left(\frac{1}{2} i\lambda\eta_1 + \frac{2\mu i\eta_1}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4\mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right)^2.$$

$$u_2(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - \frac{2 \mu i \eta_1}{\sqrt{4 \mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4 \mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right) e^{i \psi}, \quad (4.2.15)$$

$$v_2(x, y, t) = \frac{4 \gamma_3}{\eta_1 (\lambda^2 \eta_1 - 4 \mu \eta_1 + 2 \gamma_1)} \left(\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - \frac{2 \mu i \eta_1}{\sqrt{4 \mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4 \mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right)^2.$$

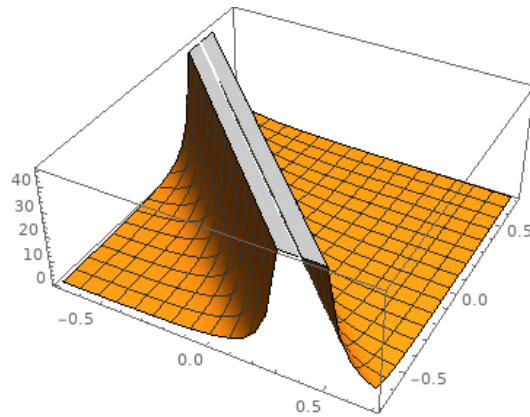
$$u_3(x, y, t) = \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2 \mu i \eta_1}{\sqrt{4 \mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4 \mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right) e^{i \psi}, \quad (4.2.16)$$

$$v_3(x, y, t) = \frac{4 \gamma_3}{\eta_1 (\lambda^2 \eta_1 - 4 \mu \eta_1 + 2 \gamma_1)} \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 + \frac{2 \mu i \eta_1}{\sqrt{4 \mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4 \mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right)^2.$$

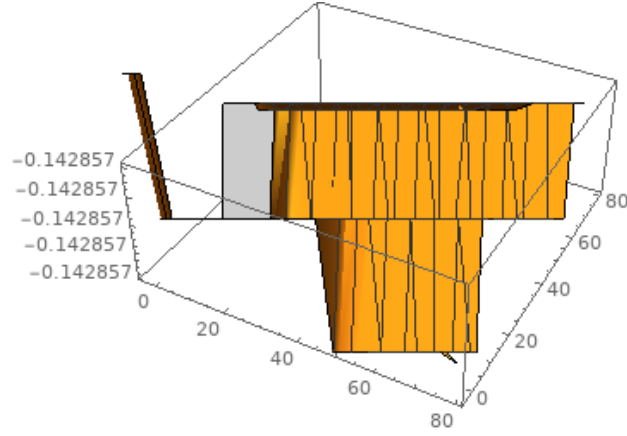
$$u_4(x, y, t) = \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - \frac{2 \mu i \eta_1}{\sqrt{4 \mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4 \mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right) e^{i \psi}, \quad (4.2.17)$$

$$v_4(x, y, t) = \frac{4 \gamma_3}{\eta_1 (\lambda^2 \eta_1 - 4 \mu \eta_1 + 2 \gamma_1)} \left(-\frac{1}{2} i \lambda \eta_1 - \frac{2 \mu i \eta_1}{\sqrt{4 \mu - \lambda^2} \tan((\sqrt{4 \mu - \lambda^2} / 2)(\varepsilon + C)) - \lambda} \right)^2.$$

Denklem (2.4)' ün, (4.2.6) çözümüne ait grafikleri ($y = 0$ olmak üzere) Şekil 4.2.1 ve 4.2.2' de verilmiştir.



Şekil 4.2.1. $y = 0$ olduğunda $|u(x, y, t)|^2$ için 3D grafiğidir; burada $\mu = -1$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1$, $\eta_1 = 1$, $\eta_3 = 1$ ve $C = 0$ 'dır (birleşik dalga çözümü)



Şekil 4.2.2. $y = 0$ olduğunda $v(x, y, t)$ için 3D grafiğidir; burada $\mu = -1$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1$, $\eta_1 = 1$, $\eta_3 = 1$ ve $C = 0$ 'dır (birleşik dalga çözümü)

4.3. Modifiye Kudryashov Yönteminin Denklem (4.4)' e Uygulanması

Bir önceki alt bölümden (4.12) denkleminin seri genişleme mertebesinde $N = 1$ olduğu biliniyor. Bu nedenle, indirgenmiş ADD olan (4.12)' nin çözüm formu (3.3.1)' den

$$U(\varepsilon) = a_0 + a_1 Q(\varepsilon) \quad (4.3.1)$$

şeklindedir.

Maple programı yardımı ile (4.3.1) denklemi, (4.12) denkleminde yerine yazılıp aynı dereceli $Q(\varepsilon)$ terimlerinin katsayıları eşitlendiğinde a_n , η_1 , η_2 ve η_3 'ü içeren bir cebirsel sisteme ulaşılır. Bu sistem aşağıdaki şekildedir:

$$Q^3(\varepsilon) \text{ Katsayısı: } 2a_1 \ln(a)^2 + \frac{2a_1^3}{\eta_1^2} = 0,$$

$$Q^2(\varepsilon) \text{ Katsayısı: } -3a_1 \ln(a)^2 + \frac{6a_0 a_1^2}{\eta_1^2} = 0,$$

$$Q(\varepsilon) \text{ Katsayısı: } a_1 \ln(a)^2 + \frac{6a_0^2 a_1}{\eta_1^2} - \frac{a_1 \gamma_1}{\eta_1} + \frac{a_1 \gamma_3}{\eta_1 \eta_2} = 0,$$

$$\text{Sabit: } \frac{2a_0^3}{\eta_1^2} - \frac{a_0 \gamma_1}{\eta_1} + \frac{a_0 \gamma_3}{\eta_1 \eta_2} = 0.$$

Yukarıdaki sistemin çözülmesinden sonra iki farklı sonuç elde edilir:

$$\text{Sınıf 1. } a_0 = -\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1, \quad a_1 = \ln(a) \eta_1, \quad \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_2 = \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3}, \quad \eta_3 = \gamma_3,$$

$$\text{Sınıf 2. } a_0 = \frac{1}{2} \ln(a) \eta_1, \quad a_1 = -\ln(a) \eta_1, \quad \eta_1 = \eta_1, \quad \eta_2 = \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3}, \quad \eta_3 = \gamma_3.$$

Böylece, (4.4) denkleminin tam hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 + \ln(a) \eta_1 Q(\varepsilon) \right) e^{i\psi}, \\ v_1(x, y, t) &= \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{\eta_1 \gamma_3} \left(-\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 + \ln(a) \eta_1 Q(\varepsilon) \right)^2, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) &= \left(\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 - \ln(a) \eta_1 Q(\varepsilon) \right) e^{i\psi}, \\ v_2(x, y, t) &= \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{\eta_1 \gamma_3} \left(\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 - \ln(a) \eta_1 Q(\varepsilon) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$(4.3.2) \text{ ve } (4.3.3)' \text{ te } (3.3.3) \text{ birinci mertebe yardımcı denkleminin } Q(\varepsilon) = \frac{1}{1 + da^\varepsilon}$$

çözümü yazılırsa:

$$u_1(x, y, t) = \left(-\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 + \frac{\ln(a) \eta_1}{1 + da^{\eta_1 x + \left(\frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3} \right) y + \gamma_3 t}} \right) e^{i\psi}, \quad (4.3.4)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{\eta_1 \gamma_3} \left(-\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 + \frac{\ln(a) \eta_1}{1 + da^{\eta_1 x + \left(\frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3} \right) y + \gamma_3 t}} \right)^2.$$

$$u_2(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 - \frac{\ln(a) \eta_1}{1 + da^{\eta_1 x + \left(\frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3} \right) y + \gamma_3 t}} \right) e^{i\psi}, \quad (4.3.5)$$

$$v_2(x, y, t) = \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{\eta_1 \gamma_3} \left(\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 - \frac{\ln(a) \eta_1}{1 + da^{\eta_1 x + \left(\frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3} \right) y + \gamma_3 t}} \right)^2.$$

çözüm takımları elde edilir. Burada d ve a keyfi sabitlerdir. (4.3.4) denklemi Lucas fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

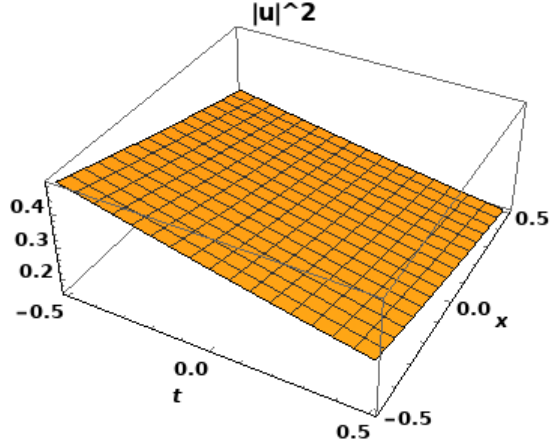
$$u_1(x, y, t) = \left(-\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 + \frac{2 \ln(a) \eta_1}{2 + d(sLs(\varepsilon) + cLs(\varepsilon))} \right) e^{i\psi}, \quad (4.3.6)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{\eta_1 \gamma_3} \left(-\frac{1}{2} \ln(a) \eta_1 + \frac{2 \ln(a) \eta_1}{d(sLs(\varepsilon) + cLs(\varepsilon))} \right)^2.$$

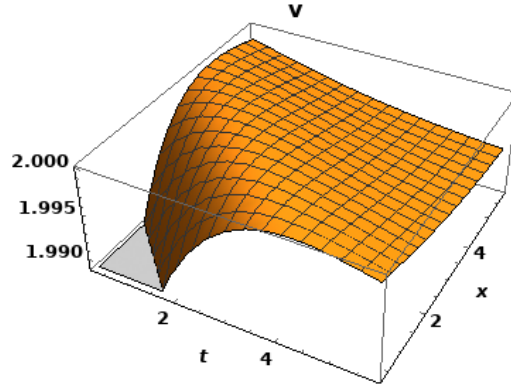
$sLs(\varepsilon)$ ve $cLs(\varepsilon)$ Lucas simetrik hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları olup burada

$$\varepsilon = \eta_1 x + \left(\frac{2\gamma_1 - \ln(a)^2 \eta_1}{2\gamma_3} \right) y + \gamma_3 t \text{ dir.}$$

Denklem (2.4)' ün, (4.3.6) çözümüne ait grafikleri ($y = 0$ olmak üzere) Şekil 4.3.1 ve 4.3.2' de verilmiştir.



Şekil 4.3.1. $y = 0$ olduğunda $|u(x, y, t)|^2$ için 3D grafiğidir; burada $a = 1,5$ ve diğer tüm parametre değerleri 1'dir (Lucas birleşik hiperbolik fonksiyonu)



Şekil 4.3.2. $y = 0$ olduğunda $|v(x, y, t)|^2$ için 3D grafiğidir; burada $a = 1,5$ ve diğer tüm parametre değerleri 1'dir (Lucas birleşik hiperbolik fonksiyonu)

4.4. Basitleştirilmiş Hirota Bilineer Yöntemi ile (2+1) Boyutlu Gardner Denkleminin Çoklu Kink Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu alt bölümde, (2+1) boyutlu

$$u_t + 6\beta u u_x + u_{xxx} - \frac{3}{2}\alpha^2 u^2 u_x^2 + 3\sigma^2 \partial_x^{-1} u_{yy} - 3\alpha \sigma \partial_x^{-1} u_y = 0, \quad (4.4.1)$$

Gardner denkleminin çoklu kink çözümleri aranmıştır (Wazwaz 2014). Burada ∂_x^{-1} , ∂_x 'in tersidir (integral operatörüdür). Aynı zamanda $\partial_x \partial_x^{-1} = \partial_x^{-1} \partial_x = 1$ ve sonsuza kadar azalan koşul altında

$$(\partial_x^{-1} f)(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (4.4.2)$$

dir. Öncelikli olarak ters operatörden kurtulmak için,

$$u(x, y, t) = v_x(x, y, t) \quad (4.4.3)$$

potansiyel dönüşümü kullanılır ve (4.4.1) denklemi,

$$v_{xt} + 6\beta v_x v_{xx} + v_{xxxx} - \frac{3}{2} \alpha^2 v_x^2 v_{xx} + 3\sigma^2 v_{yy} - 3\alpha \sigma v_{xx} v_y = 0 \quad (4.4.4)$$

denklemine dönüştürülür.

c_i saçılım bağıntısını belirlemek için,

$$v(x, y, t) = e^{\theta_i}, \quad \theta_i = k_i x + r_i y - c_i t \quad (4.4.5)$$

ifadeleri (4.4.4) denklemindeki lineer terimlerde yerine yazılır. Elde edilen eşitlikten c_i saçılım bağıntısı:

$$c_i = k_i^3 + \frac{3\sigma^2 r_i^2}{k_i} \quad (4.4.6)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla buradan saçılım değişkeninin

$$\theta_i = k_i x + r_i y - \left(k_i^3 + \frac{3\sigma^2 r_i^2}{k_i} \right) t \quad (4.4.7)$$

olduğu görülür.

(4.4.4) denkleminde yer alan lineer olmayan terimler ile lineer terimler arasında homojen dengeleme yapılarak dengeleme sayısı 1 olarak bulunur. Bulunan bu dengeleme sayısına bağlı olarak (4.4.1) denkleminin çoklu-kink çözümleri için Cole-Hopf dönüşümü kullanılır. (4.4.1) denkleminde;

$$u(x, y, t) = R(\ln f(x, y, t))_x \quad (4.4.8)$$

ve bu nedenle

$$v(x, y, t) = R(\ln f(x, y, t)) \quad (4.4.9)$$

olduğu varsayılır ((4.4.3)' ten dolayı).

Hirota' nın basitleştirilmiş yöntemi, (4.4.1) denkleminin tekli-kink çözümü için ((3.4.6)' dan)

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + r_1 y - \left(k_1^3 + \frac{3\sigma^2 r_1^2}{k_1} \right) t} \quad (4.4.10)$$

yardımcı fonksiyonun kullanımını kabul eder.

(4.4.9) ve (4.4.10) eşitlikleri birlikte, (4.4.4) denkleminde yerine yazılır ve R için çözülürse

$$R = \frac{2}{\alpha} \quad (4.4.11)$$

olarak bulunur. Bunun yanında,

$$r_i = \frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4.12)$$

kısıtını karşılayan r_i katsayıları varsa ele alınan denklemin kink çözümleri bulunur. Bu sonuçlara dayanarak (4.4.6)'daki saçılım bağıntısı yeniden yazılırsa

$$c_i = \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha\beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4.13)$$

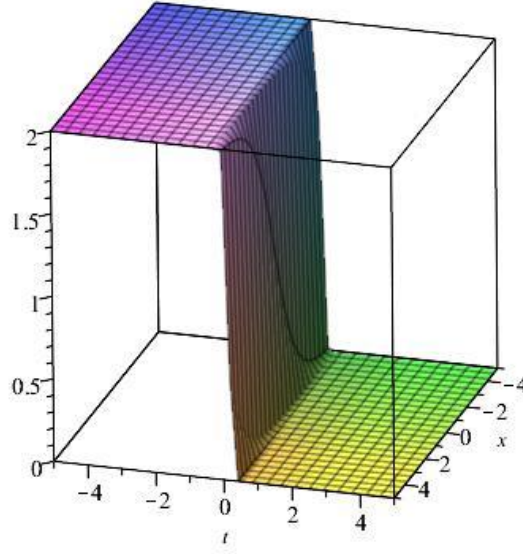
halini alır.

(4.4.3)'deki potansiyel dönüşümün kullanılmasıyla (4.4.1) denkleminin tekli-kink çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{2k_1 e^{\frac{k_1 x + \frac{k_1(2\beta - \alpha k_1)}{\sigma\alpha} y - \frac{4k_1(\alpha^2 k_1^2 - 3\alpha\beta k_1 + 3\beta^2)}{\alpha^2} t}}}{\alpha \left(1 + e^{\frac{k_1 x + \frac{k_1(2\beta - \alpha k_1)}{\sigma\alpha} y - \frac{4k_1(\alpha^2 k_1^2 - 3\alpha\beta k_1 + 3\beta^2)}{\alpha^2} t} \right)} \quad (4.4.14)$$

olarak elde edilir.

(4.4.1) denkleminin, (4.4.14)'te verilen tekli-kink çözümüne ait olan grafiği Şekil 4.4.1' de verilmiştir.



Şekil 4.4.1. $y = 0$ iken (4.4.1) denkleminin tekli-kink çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\sigma = 3$ ve $k_1 = 1$ ' dir

İkili-kink çözümü için yardımcı fonksiyon (3.4.7)' den;

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} = 1 + e^{k_1 x + r_1 y - \left(k_1^3 + \frac{3\sigma^2 r_1^2}{k_1}\right)t} + e^{k_2 x + r_2 y - \left(k_2^3 + \frac{3\sigma^2 r_2^2}{k_2}\right)t} \quad (4.4.15)$$

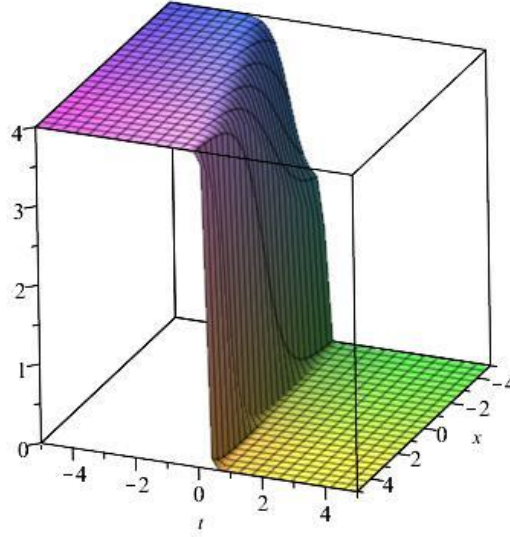
olarak alınır.

Elde edilen sonuçların (4.4.9)' da yerine yazılması ve (4.4.3)' deki potansiyel dönüşümün kullanılmasıyla (4.4.1) denkleminin ikili-kink çözümü:

$$u(x, y, t) = \frac{2 \sum_{i=1}^2 k_i e^{k_i x + \frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma \alpha} y - \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha \beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2} t}}{\alpha \left(1 + \sum_{i=1}^2 e^{k_i x + \frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma \alpha} y - \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha \beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2} t} \right)} \quad (4.4.16)$$

olarak bulunur.

(4.4.1) denkleminin, (4.4.16)' da verilen ikili-kink çözümüne ait olan grafiği Şekil 4.4.2' de verilmiştir.



Şekil 4.4.2. $y = 0$ iken (4.4.1) denkleminin ikili-kink çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\sigma = 3$, $k_1 = 1$ ve $k_2 = 2$ ' dir

Üçlü-kink çözümü için yardımcı fonksiyon (3.4.8)' den;

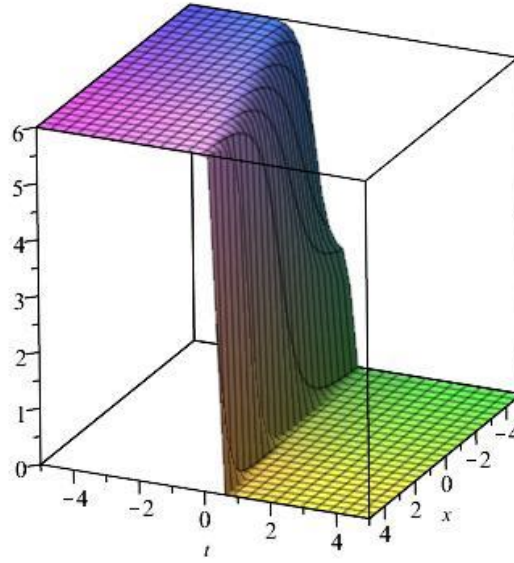
$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} = 1 + e^{k_1 x + r_1 y - \left(k_1^3 + \frac{3\sigma^2 r_1^2}{k_1}\right)t} + e^{k_2 x + r_2 y - \left(k_2^3 + \frac{3\sigma^2 r_2^2}{k_2}\right)t} + e^{k_3 x + r_3 y - \left(k_3^3 + \frac{3\sigma^2 r_3^2}{k_3}\right)t} \quad (4.4.17)$$

olarak alınır.

Tekli ve ikili kink çözümlerindekine benzer şekilde devam edildiğinde, (4.4.1) denkleminin üçlü-kink çözümü:

$$u(x, y, t) = \frac{2 \sum_{i=1}^3 k_i e^{k_i x + \frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma \alpha} y - \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha \beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2} t}}{\alpha \left(1 + \sum_{i=1}^3 e^{k_i x + \frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma \alpha} y - \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha \beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2} t} \right)} \quad (4.4.18)$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.4.3. $y = 0$ iken (4.4.1) denkleminin üçlü-kink çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\sigma = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ ve $k_3 = 3$ ' tür

Bu (4.4.1)' de verilen (2+1) boyutlu Gardner denkleminin, sonlu N sayısı için N -kink çözümlerinin var olduğunu gösterir (burada $N \geq 1$ dir). Elde edilen sonuçlara göre genel N -kink çözümleri

$$u(x, y, t) = \frac{2 \sum_{i=1}^N k_i e^{\frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma \alpha} y - \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha \beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2} t}}{\alpha \left(1 + \sum_{i=1}^N e^{\frac{k_i(2\beta - \alpha k_i)}{\sigma \alpha} y - \frac{4k_i(\alpha^2 k_i^2 - 3\alpha \beta k_i + 3\beta^2)}{\alpha^2} t} \right)} \quad (4.4.19)$$

formu ile verilir.

4.5. Basitleştirilmiş Hirota Bilineer Yöntemi ile Yeni (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş KP-Boussinesq Denkleminin Çoklu Soliton Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu alt bölümde, Hereman ve Nuseir' in (1997) çalışmasında geliştirilen ve lineer olmayan KDD' nin çoklu soliton çözümlerini belirlemek için kullandıkları basitleştirilmiş Hirota yöntemi kullanıldı.

Yeni (3+1) boyutlu genelleştirilmiş

$$u_{xxxxy} + 3(u_x u_y)_x + u_{tx} + u_{tt} - u_{zz} = 0 \quad (4.5.1)$$

KP-Boussinesq denkleminin çoklu soliton çözümleri aranmıştır (Wazwaz ve El-Tantawy 2017). Buradaki $u = u(x, y, z, t)$ ' dir.

(4.5.1) denkleminin lineer terimlerinde

$$u(x, y, z, t) = e^{\theta_i}, \quad \theta_i = k_i x + r_i y + s_i z - c_i t \quad (4.5.2)$$

ifadelerinin yerine yazılmasıyla c_i için

$$c_i = \frac{(k_i + r_i) + \sqrt{(k_i + r_i)^2 + 4(s_i^2 - k_i^3 r_i)}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5.3)$$

saçılım bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla buradan, saçılım değişkeni

$$\theta_i = e^{k_i x + r_i y + s_i z - \frac{(k_i + r_i) + \sqrt{(k_i + r_i)^2 + 4(s_i^2 - k_i^3 r_i)}}{2} t} \quad (4.5.4)$$

biçiminde yazılır.

Sonrasında ele alınan (4.5.1) numaralı denklemde yer alan lineer olmayan terimler ile lineer terimler arasında homojen dengeleme yapılarak dengeleme sayısı 1 olarak bulunur. Bulunan bu dengeleme sayısına bağlı olarak, ele alınan denklemin çoklu soliton çözümleri için

$$u(x, y, z, t) = R(\ln f(x, y, z, t))_x \quad (4.5.5)$$

değişken dönüşümü kullanılır. Buradaki $f(x, y, z, t)$ yardımcı fonksiyonu (3.4.3)' te

verildiği gibi

$$f(x, y, z, t) = 1 + e^{\theta_1} \quad (4.5.6)$$

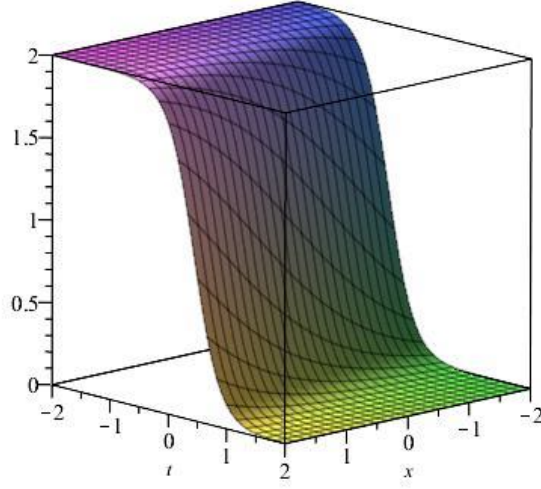
biçiminde alınır. Tekli soliton çözümü için $\theta_1 = e^{\frac{k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t}{1 + e^{\frac{k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t}}}$ olmak üzere, (4.5.5) ile (4.5.6) ifadeleri birlikte (4.5.1) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen eşitlik çözüldüğünde $R = 2$ olarak bulunur.

Sonuç olarak (4.5.1)' de verilen, yeni (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin tekli-soliton çözümü, (4.5.6) değerinin (4.5.5)' te yerine yazılmasıyla ($R = 2$ olmak üzere)

$$u(x, y, z, t) = \frac{2k_1 e^{\frac{k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t}{1 + e^{\frac{k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t}}}}}{1 + e^{\frac{k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t}}}} \quad (4.5.7)$$

olarak bulunur ($(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1) \geq 0$ olması şartıyla).

(4.5.1) denkleminin, (4.5.7)' de verilen tekli-soliton çözümüne ait olan grafiği Şekil 4.5.1' te verilmiştir.



Şekil 4.5.1. $y=0$ ve $z=0$ iken (4.5.1) denkleminin tekli-soliton çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $k_1=1$, $r_1=2$ ve $s_1=3$ ’ tür

(4.5.1) denkleminin ikili soliton çözümü için (3.4.4)’ deki gibi verilen

$$f(x, y, z, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (4.5.8)$$

yardımcı fonkiyonu kullanılır. (4.5.8) yardımcı fonksiyonu (4.5.1) denkleminde yerine yazılır ve buradaki θ_1 ile θ_2 (4.5.4)’ te verildiği gibi alındığında a_{12} faz değişimi

$$a_{12} = \frac{(k_1 + r_1)(k_2 + r_2) - 6k_1k_2(k_1 - k_2)(r_1 - r_2) - 2(k_1^3r_2 + k_2^3r_1) + 4s_1s_2 - \mu_1\mu_2}{(k_1 + r_1)(k_2 + r_2) - 6k_1k_2(k_1 + k_2)(r_1 + r_2) - 2(k_1^3r_2 + k_2^3r_1) + 4s_1s_2 - \mu_1\mu_2} \quad (4.5.9)$$

biçiminde bulunur. Burada $n=1,2$ olmak üzere $\mu_n = \sqrt{(k_n + r_n)^2 + 4(s_n^2 - k_n^3r_n)}$ ’ dir.

Genel durum için faz değişimi ($1 \leq i \leq j \leq 3$ olmak üzere)

$$a_{ij} = \frac{(k_i + r_i)(k_j + r_j) - 6k_ik_j(k_i - k_j)(r_i - r_j) - 2(k_i^3r_j + k_j^3r_i) + 4s_is_j - \mu_i\mu_j}{(k_i + r_i)(k_j + r_j) - 6k_ik_j(k_i + k_j)(r_i + r_j) - 2(k_i^3r_j + k_j^3r_i) + 4s_is_j - \mu_i\mu_j} \quad (4.5.10)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $n=1,2,3$ olmak üzere $\mu_n = \sqrt{(k_n + r_n)^2 + 4(s_n^2 - k_n^3 r_n)}$, dir.

Böylece (4.5.8)' deki yardımcı fonksiyon (4.5.4) ve (4.5.10)' dan

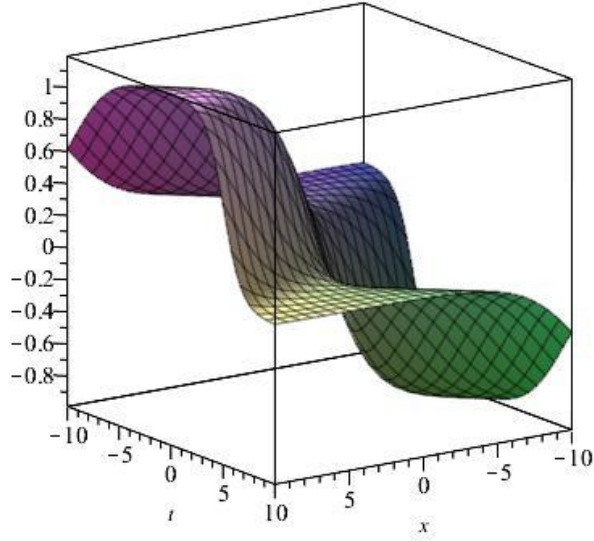
$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) = & 1 + \exp \left(k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t \right) \\
& + \exp \left(k_2 x + r_2 y + s_2 z - \frac{(k_2 + r_2) + \sqrt{(k_2 + r_2)^2 + 4(s_2^2 - k_2^3 r_2)}}{2} t \right) \\
& + \frac{(k_1 + r_1)(k_2 + r_2) - 6k_1 k_2 (k_1 - k_2)(r_1 - r_2) - 2(k_1^3 r_2 + k_2^3 r_1) + 4s_1 s_2 - \mu_1 \mu_2}{(k_1 + r_1)(k_2 + r_2) - 6k_1 k_2 (k_1 + k_2)(r_1 + r_2) - 2(k_1^3 r_2 + k_2^3 r_1) + 4s_1 s_2 - \mu_1 \mu_2} \\
& \times \exp \left[\frac{(k_1 + k_2)x + (r_1 + r_2)y + (s_1 + s_2)z}{\left(\frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} \right) + \left(\frac{(k_2 + r_2) + \sqrt{(k_2 + r_2)^2 + 4(s_2^2 - k_2^3 r_2)}}{2} \right)} t \right]
\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

şeklinde yazılır.

İkili-soliton çözümünü açıkça belirlemek için (4.5.11)' de bulunan yardımcı fonksiyon (4.5.5)' deki eşitlikte yerine yazılır ($R = 2$ olmak üzere).

Ele alınan denklemin tekli-soliton ve ikili-soliton çözümlerinde, uzaysal değişkenlerin katsayılarının $(k_j, r_j, s_j, j = 1, 2)$ serbest parametre olduğuna dikkat edilmelidir.

(4.5.1) denkleminin, (4.5.11)' de verilen yardımcı fonksiyona göre yazılmasıyla ikili-soliton çözümüne ait olan grafik, Şekil 4.5.2' de verilmiştir.



Şekil 4.5.2. $y=0$ ve $z=0$ iken (4.5.1) denkleminin ikili-soliton çözümünün 3D grafiğidir; burada parametre değerleri $k_1 = -0,5$, $k_2 = 0,6$, $r_1 = -0,1$, $r_2 = 0,2$, $s_1 = -0,8$ ve $s_2 = 0,7$ ' dir

Ele alınan (4.5.1) denkleminin üçlü-soliton çözümlerini belirleyebilmek için (3.4.5)' te de verildiği gibi

$$f(x, y, z, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \quad (4.5.12)$$

yardımcı fonksiyonu kullanılır. Bu yardımcı fonksiyon için de benzer adımlar (ikili-soliton çözümündeki gibi) izlendiğinde (4.5.12) ifadesi

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) = & 1 + \exp \left(k_1 x + r_1 y + s_1 z - \frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} t \right) \\
& + \exp \left(k_2 x + r_2 y + s_2 z - \frac{(k_2 + r_2) + \sqrt{(k_2 + r_2)^2 + 4(s_2^2 - k_2^3 r_2)}}{2} t \right) \\
& + \exp \left(k_3 x + r_3 y + s_3 z - \frac{(k_3 + r_3) + \sqrt{(k_3 + r_3)^2 + 4(s_3^2 - k_3^3 r_3)}}{2} t \right) \\
& + \frac{(k_1 + r_1)(k_2 + r_2) - 6k_1 k_2 (k_1 - k_2)(r_1 - r_2) - 2(k_1^3 r_2 + k_2^3 r_1) + 4s_1 s_2 - \mu_1 \mu_2}{(k_1 + r_1)(k_2 + r_2) - 6k_1 k_2 (k_1 + k_2)(r_1 + r_2) - 2(k_1^3 r_2 + k_2^3 r_1) + 4s_1 s_2 - \mu_1 \mu_2} \\
& \times \exp \left[\frac{(k_1 + k_2)x + (r_1 + r_2)y + (s_1 + s_2)z}{- \left(\frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} + \frac{(k_2 + r_2) + \sqrt{(k_2 + r_2)^2 + 4(s_2^2 - k_2^3 r_2)}}{2} \right) t} \right] \\
& + \frac{(k_1 + r_1)(k_3 + r_3) - 6k_1 k_3 (k_1 - k_3)(r_1 - r_3) - 2(k_1^3 r_3 + k_3^3 r_1) + 4s_1 s_3 - \mu_1 \mu_3}{(k_1 + r_1)(k_3 + r_3) - 6k_1 k_3 (k_1 + k_3)(r_1 + r_3) - 2(k_1^3 r_3 + k_3^3 r_1) + 4s_1 s_3 - \mu_1 \mu_3} \\
& \times \exp \left[\frac{(k_1 + k_3)x + (r_1 + r_3)y + (s_1 + s_3)z}{- \left(\frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} + \frac{(k_3 + r_3) + \sqrt{(k_3 + r_3)^2 + 4(s_3^2 - k_3^3 r_3)}}{2} \right) t} \right] \\
& + \frac{(k_2 + r_2)(k_3 + r_3) - 6k_2 k_3 (k_2 - k_3)(r_2 - r_3) - 2(k_2^3 r_3 + k_3^3 r_2) + 4s_2 s_3 - \mu_2 \mu_3}{(k_2 + r_2)(k_3 + r_3) - 6k_2 k_3 (k_2 + k_3)(r_2 + r_3) - 2(k_2^3 r_3 + k_3^3 r_2) + 4s_2 s_3 - \mu_2 \mu_3} \\
& \times \exp \left[\frac{(k_2 + k_3)x + (r_2 + r_3)y + (s_2 + s_3)z}{- \left(\frac{(k_2 + r_2) + \sqrt{(k_2 + r_2)^2 + 4(s_2^2 - k_2^3 r_2)}}{2} + \frac{(k_3 + r_3) + \sqrt{(k_3 + r_3)^2 + 4(s_3^2 - k_3^3 r_3)}}{2} \right) t} \right] \\
& + b_{123} \exp \left[\frac{(k_1 + k_2 + k_3)x + (r_1 + r_2 + r_3)y + (s_1 + s_2 + s_3)z}{- \left(\frac{(k_1 + r_1) + \sqrt{(k_1 + r_1)^2 + 4(s_1^2 - k_1^3 r_1)}}{2} + \frac{(k_2 + r_2) + \sqrt{(k_2 + r_2)^2 + 4(s_2^2 - k_2^3 r_2)}}{2} + \frac{(k_3 + r_3) + \sqrt{(k_3 + r_3)^2 + 4(s_3^2 - k_3^3 r_3)}}{2} \right) t} \right]
\end{aligned}
\tag{4.5.13}$$

ifadesine dönüşür. İkili-soliton çözümünde olduğu gibi benzer adımlarla devam edildiğinde faz değişimi $b_{123} = a_{12} a_{23} a_{13}$ olarak bulunur. Ancak burada, uzaysal

değişkenlerin katsayılarının $(k_j, r_j, s_j, j=1,2)$, serbest parametreler olması halinde üçlü-soliton çözümlerinin var olmadığı bulunmuştur. Bunun yerine, Maple programı kullanılarak üçlü-soliton çözümlerinin yalnızca

$$r_i = \alpha k_i, \quad s_i = \beta k_i, \quad i=1,2,3. \quad (4.5.14)$$

durumunda var olduğu görülür (α ve β reel sabitlerdir). Üçlü-soliton çözümlerini açıkça belirlemek için (4.5.13) ve (4.5.14)' te elde edilen sonuçlar (4.5.5)' deki eşitlikte yerine yerine yazılır ($R=2$ olmak üzere).

4.6. (1+1) Boyutlu Isı Denkleminin Lie Simetri Analizi

Isı denklemi, çubukta ısı iletimini modelleyen (1+1) boyutlu

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (4.6.1)$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir. Aynı zamanda kısmi türevli homojen bir diferansiyel denklemdir. Burada x ve t bağımsız değişken olup u bağımlı değişkendir. Bu alt bölümde, (4.6.1) denkleminde Lie dönüşüm grupları yöntemi kullanıldı (Olver 1986).

1. Adım: Dönüşüm grubu ile ilişkili (x, t, u) uzayındaki vektör alanı

$$V = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.6.2)$$

biçiminde olsun. Buradaki olası tüm ξ , τ ve ϕ sonsuz küçük katsayı fonksiyonlarını belirlemek istiyoruz. Bunlara karşılık gelen bir parametrelili grup ısı denkleminin bir simetri grubudur.

2. Adım: (4.6.1) denkleminin mertebesi 2 olduğundan (4.6.1)' in 2. uzanımı

$$pr^{(n)}V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \quad (4.6.3)$$

şeklindedir. Burada $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{xt}$ ve ϕ^{tt} ' ler (4.6.2)' nin uzatılmış sonsuz küçük katsayı fonksiyonları (üreteçleri) dir. Bunlar (3.5.5)' de verildiği gibidir.

3. Adım: (4.6.1) denkleminin değişmezlik koşulu (3.5.6)' dan yazılırsa

$$pr^{(2)}V\{u_t - u_{xx} = 0\} \Big|_{u_t - u_{xx} = 0} = 0 \quad (4.6.4)$$

olur. İkinci adımda verilen uzatılmış sonsuz küçük fonksiyonları (4.6.4)' te yerine yazılır ve $u_t = u_{xx}$ olarak alınır aşağıdaki eşitlik ortaya çıkar:

$$\begin{aligned} \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x \\ -\tau_{xx} u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t \\ + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

4. Adım: (4.6.5) eşitliğinde $u_t = u_{xx}$ yazılıp u ' nun birinci ve ikinci mertebe kısmi türevlerinin çeşitli monomiallerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde (4.6.1) denkleminde ait simetri grubunun aşırı belirleyici denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

<u>Terimler</u>	<u>Katsayılar</u>	
$u_x u_{xt}$	$0 = -2\tau_u$	(4.6.6)
u_{xt}	$0 = -2\tau_x$	(4.6.7)
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$	(4.6.8)
$u_x^2 u_{xx}$	$0 = -\tau_{uu}$	(4.6.9)
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u$	(4.6.10)
u_{xx}	$\phi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x$	(4.6.11)
u_x^3	$0 = -\xi_{uu}$	(4.6.12)
u_x^2	$0 = \phi_{uu} - 2\xi_{xu}$	(4.6.13)
u_x	$-\xi_t = 2\phi_{xu} - \xi_{xx}$	(4.6.14)
1	$\phi_t = \phi_{xx}$	(4.6.15)

(4.6.6) ve (4.6.7) denklemlerine bakılırsa τ 'nın yalnızca t 'ye bağlı bir fonksiyon olduğu açıkça görülür.

(4.6.10) denklemden

$$\begin{aligned} -\xi_u &= -2\tau_{xu} - 3\xi_u \\ 2\xi_u &= -2\tau_{xu} \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

$$\xi_u = -\tau_{xu} \text{ ((4.6.7)' den } \tau_{xu} = 0 \text{ gelir)}$$

$$\xi_u = 0$$

elde edilir. Buradan ξ 'nin u 'ya bağlı bir fonksiyon olmadığı açıkça görülür. (4.6.11) denklemden

$$\begin{aligned} \phi_u - \tau_t &= -\tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x \\ \tau_t &= \tau_{xx} + 2\xi_x \text{ ((4.6.7)' den } \tau_{xx} = 0 \text{ gelir)} \\ \tau_t &= 2\xi_x \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

elde edilir. Buradan

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t) \quad (4.6.18)$$

bulunur ki σ , t ' ye bağı bir fonksiyondur. (4.6.13) denkleminde ϕ ' nin, u ' nun bir lineer fonksiyonu olduğu görülür. Yani

$$\phi(x,t,u) = \beta(x,t)u + \alpha(x,t) \quad (4.6.19)$$

olup burada α ve β keyfi fonksiyonlardır. (4.6.14) denkleminde göre $\xi_t = -2\beta_x$ ($\xi_{xx} = 0$), bu yüzden β , x 'in en çok ikinci dereceden denklemi olmalıdır:

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t). \quad (4.6.20)$$

Son olarak denklem (4.6.15), hem α ' nın hem de β ' nın ısı denkleminin çözümleri olmasını gerektirir:

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \quad \beta_t = \beta_{xx}. \quad (4.6.21)$$

Önceki β formunu kullanarak yani $\beta_t = \beta_{xx}$ 'den

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t) \right) = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$$

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0 \quad \text{ve} \quad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt} \quad (4.6.22)$$

eşitlikleri bulunur. Böylece τ , t ' nin bir kuadratik fonksiyonu, σ , t ' nin bir doğrusal fonksiyonu ve ξ, ϕ fonksiyonlarını doğrudan ρ , σ ve τ ' dan elde edebiliriz:

(4.6.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\sigma_{tt} &= 0 \\ \sigma(t) &= 2c_5t + c_1\end{aligned}\tag{4.6.23}$$

$$\begin{aligned}\tau_{ttt} &= 0 \\ \tau &= 4c_6t^2 + 2c_4t + c_2 \\ \tau_t &= 4c_6t + 2c_4 \\ \tau_{tt} &= 4c_6\end{aligned}\tag{4.6.24}$$

$$\begin{aligned}\rho_t &= -\frac{1}{4}\tau_{tt} \\ \rho_t &= -2c_6 \\ \rho(t) &= -2c_6t + c_3\end{aligned}\tag{4.6.25}$$

elde edilir. (4.6.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t) \\ \xi(x, t) &= \frac{1}{2}(8c_6t + 2c_4)x + (2c_5t + c_1) \\ \xi(x, t) &= 4c_6xt + c_4x + 2c_5t + c_1\end{aligned}\tag{4.6.26}$$

elde edilir. (4.6.19) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\phi(x, t, u) &= \beta(x, t)u + \alpha(x, t) \\ \phi(x, t, u) &= (-c_6x^2 - c_5x - 2c_6t + c_3)u + \alpha(x, t)\end{aligned}\tag{4.6.27}$$

elde edilir. Tüm belirleyici denklemleri yerine getirdiğimizde, ısı denkleminin en genel sonsuz küçük üreticinin ((4.6.24), (4.6.26) ve (4.6.27)' den)

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt, \\ \tau &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2, \\ \phi &= (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2)u + \alpha(x, t),\end{aligned}\tag{4.6.28}$$

katsayı fonksiyonlarına sahip olduğu görülür. Burada $c_1, \dots, c_6$ keyfi sabitler ve $\alpha(x, t)$ ısı denkleminin keyfi çözümüdür.

5. Adım: Dördüncü adımda bulunan sonsuz küçükler (4.6.3)' de verilen V vektör alanında (simetri üretecinde) yerine yazılır. Bulunan eşitlikte c_i ($i=1, \dots, 6$) sabitlerinin farklı değerlerine göre farklı V_i simetri üreticilerine ulaşılır:

- $c_1 = 1$ ve $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ olarak alındığında

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.6.29)$$

- $c_2 = 1$ ve $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ olarak alındığında

$$V_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.6.30)$$

- $c_3 = 1$ ve $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ olarak alındığında

$$V_3 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.6.31)$$

- $c_4 = 1$ ve $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$ olarak alındığında

$$V_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.6.32)$$

- $c_5 = 1$ ve $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0$ olarak alındığında

$$V_5 = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.6.33)$$

- $c_6 = 1$ ve $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ olarak alındığında

$$V_6 = 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.6.34)$$

ve sonsuz boyutlu alt cebiri ise

$$V_\alpha = \alpha(x, t) \partial u \quad (4.6.35)$$

olur. Burada α ısı denkleminin keyfi bir çözümüdür. Bu vektör alanları (simetri üreteçleri) arasındaki kamütatör bağıntıları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Oluşturulan tabloda bulunan vektör alanları (simetri üreteçleri) arasındaki kamütasyon bağıntılarının i . satırı ve j . sütunu $[V_i, V_j]$ ile temsil edilir. V_i üreteçlerinin kamütatör tablosu oluşturularak ikili işleme göre kapalı olup olmadığına bakacağız. Tablo oluşturmadan önce birkaç tablo değerinin hesaplanmasını (3.5.7)'de tanımlandığı gibi gösterelim:

$$[V_1, V_4] = V_1 \cdot V_4 - V_4 \cdot V_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right) - \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = V_1$$

$$[V_1, V_5] = V_1 \cdot V_5 - V_5 \cdot V_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(2t \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u} \right) - \left(2t \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial x} = u \frac{\partial}{\partial u} = V_3$$

Benzer şekilde diğer tablo değerleri yukarıda olduğu gibi hesaplanabilir.

Çizelge 4.6.1. (4.6.1) denkleminin vektör alanları arasındaki kamütatör bağıntılarını göstermektedir

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_α
V_1	0	0	0	V_1	$-V_3$	$2V_5$	V_{α_x}
V_2	0	0	0	$2V_2$	$2V_1$	$4V_4-2V_3$	V_{α_t}
V_3	0	0	0	0	0	0	$-V_\alpha$
V_4	$-V_1$	$-2V_2$	0	0	V_5	$2V_6$	$V_{\alpha'}$
V_5	V_3	$-2V_1$	0	$-V_5$	0	0	$V_{\alpha''}$
V_6	$-2V_5$	$2V_3-4V_4$	0	$-2V_6$	0	0	$V_{\alpha'''}$
V_α	$-V_{\alpha_x}$	$-V_{\alpha_t}$	V_α	$-V_{\alpha'}$	$-V_{\alpha''}$	$-V_{\alpha'''}$	0

Oluşturulan kamütatör tablosundan (bkz. Çizelge 4.6.1) V_i üreteçlerinin ikili işleme göre kapalı olduğu açıkça görülmektedir. Yani (4.6.1) denkleminde ait simetri gruplarının Lie cebirinin, $V_1, \dots, V_6$ simetri üreteçleri ile gerildiği sonucunu çıkarırız.

Burada

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= x\alpha_x + 2t\alpha_t, \\
 \alpha'' &= 2t\alpha_x + x\alpha, \\
 \alpha''' &= 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha
 \end{aligned}
 \tag{4.6.36}$$

olur. Eğer α ısı denkleminin herhangi bir çözümü ise α_x , α_t , α' , α'' ve α''' yukarıda verildiği gibidir.

6. Adım: $V_6 = 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u}$ simetri üreteğine denk gelen dönüşüm grubunu (3.5.7) ve (3.5.8) yardımıyla bulalım:

$$a) \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon} = \tau(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = 4\tilde{t}^2$$

$$\frac{d\tilde{t}}{t^2} = 4d\varepsilon$$

$$\tilde{t} = -\frac{1}{4\varepsilon + c}$$

$$\tilde{t}|_{\varepsilon=0} = t \text{ başlangıç koşulu altında } c = -\frac{1}{t} \text{ olur.}$$

$$\text{Yerine yazılırsa } \tilde{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t} \text{ bulunur.}$$

$$\text{b) } \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = \xi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = 4\tilde{x}\tilde{t}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = \frac{4td\varepsilon}{1-4\varepsilon t}$$

$$\ln \tilde{x} = -\ln(1-4\varepsilon t) + \ln c$$

$$\tilde{x} = \frac{c}{1-4\varepsilon t}$$

$$\tilde{x}|_{\varepsilon=0} = x \text{ başlangıç koşulu altında } c = x \text{ olur.}$$

$$\text{Yerine yazılırsa } \tilde{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t} \text{ bulunur.}$$

$$\text{c) } \frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} = \phi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = -(\tilde{x}^2 + 2\tilde{t})\tilde{u}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = -\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}\right)^2 d\varepsilon - \frac{2t}{1-4\varepsilon t} d\varepsilon$$

$$\ln \tilde{u} = -\frac{1}{4} \frac{x^2}{(1-4\varepsilon t)t} + \ln \sqrt{1-4\varepsilon t} + \ln c$$

$$\tilde{u} = c\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(1-4\varepsilon t)t}\right\}$$

$$\tilde{u}|_{\varepsilon=0} = u \text{ başlangıç koşulu altında } u = c.\exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\} \Rightarrow c = u \exp\left\{\frac{x^2}{4t}\right\} \text{ olur.}$$

$$\text{Yerine yazılırsa } \tilde{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right\} \text{ bulunur.}$$

Böylece $G_6 : (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t}, u\sqrt{1-4\epsilon t} \exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right\} \right)$ olarak bulunmuş olur.

Diğer simetri üreteçleri için de benzer işlemler uygulanırsa aşağıdaki dönüşüm grupları elde edilir.

$$\begin{aligned}
G_1 : (x + \epsilon, t, u), \\
G_2 : (x, t + \epsilon, u), \\
G_3 : (x, t, \exp(\epsilon)u), \\
G_4 : (\exp(\epsilon)x, \exp(2\epsilon)t, u) \\
G_5 : (x + 2\epsilon t, t, u \exp(-\epsilon x - \epsilon^2 t)), \\
G_6 : \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t}, u\sqrt{1-4\epsilon t} \exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right\} \right), \\
G_\alpha : (x, t, u + \epsilon\alpha(x, t)).
\end{aligned} \tag{4.6.37}$$

7. Adım: G_6 dönüşüm grubu için denklemi değişmez bırakan çözümü elde edelim:

$$G_6 : (x, t, u) \rightarrow \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t}, u\sqrt{1-4\epsilon t} \exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right\} \right) \text{ dönüşümünde;}$$

$$\tilde{u} = u\sqrt{1-4\epsilon t} \exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right\}$$

$$\tilde{u} = f(x, t)\sqrt{1-4\epsilon t} \exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right\}$$

$$\tilde{u} = f\left(\tilde{x} - 4\epsilon\tilde{t}, \frac{\tilde{t}}{1+4\epsilon\tilde{t}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon\tilde{t}}} \exp\left\{-\epsilon\tilde{x}^2(1+4\epsilon\tilde{t})(1-4\epsilon\tilde{t})^2\right\}$$

$$u = f\left(x - 4\epsilon t, \frac{t}{1+4\epsilon t}\right) \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon t}} \exp\left\{-\epsilon x^2(1+4\epsilon t)(1-4\epsilon t)^2\right\}$$

bulunur.

Her G_i grubu bir simetri grubu olduğu için $u = f(x, t)$ ısı denkleminin bir çözümü ise (4.6.37)' deki -denklemi değişmez bırakan- simetri gruplarına karşılık gelen çözümler aşağıdaki gibi bulunur (Benzer şekilde tüm G_i grupları için hesaplamalar yapıldığında

yukarıdaki -denklemini değişmez bırakan- simetri gruplarına karşılık gelen çözümler aşağıdaki gibi bulunur):

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= f(x - \varepsilon, t), \\
u^{(2)} &= f(x, t - \varepsilon), \\
u^{(3)} &= e^{\varepsilon} f(x, t), \\
u^{(4)} &= f(e^{-\varepsilon} x, e^{-\varepsilon} t), \\
u^{(5)} &= e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t), \\
u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{1 + 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 + 4\varepsilon t}\right), \\
u^{(\alpha)} &= f(x, t) + \varepsilon \alpha(x, t).
\end{aligned} \tag{4.6.38}$$

Burada ε herhangi bir reel sayı ve $\alpha(x, t)$ ise ısı denkleminin diğer bir çözüdür.

G_3 ve G_α simetri grupları ısı denkleminin lineerliğini yansıtır. Bu sayede çözümlere eklemelerde bulunup bunları sabitlerle çarparak yeni çözümler bulabiliriz. G_1 ve G_2 grupları, denklemin zaman ve uzaysal değişmezliğini göstermekle birlikte ısı denkleminin sabit katsayılara sahip olduğu gerçeğini ortaya koymaktadır. G_4 ’te iyi bilinen ölçeklendirme simetrisi ortaya çıkarken, G_5 hareketli bir koordinat çerçevesinde bir çeşit Galilean dönüşümü oluşturmaktadır. Son olarak G_6 grubu lokal bir dönüşüm grubunu temsil eder. Bu grup görünüşte, temel fizik prensiplerinden değildir, ancak aşağıda belirtilen oldukça önemli bir sonucu vardır. $u = c$ alınarak sadece sabit bir çözüm olmasına izin verildiğinde

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}\right\} \tag{4.6.39}$$

fonksiyonunun bir çözüm olduğu sonucuna varılır. Özellikle $c = \sqrt{\varepsilon/\pi}$ olarak alınırsa $(x_0, t_0) = (0, -1/4\varepsilon)$ noktasındaki ısı denklemine, temel çözümü elde ederiz. Buradaki belirsizliğin ortadan kaldırılması, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken ε ’a göre L-hospital kuralının

uygulanması ile mümkündür. Temel çözümü

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{\frac{-x^2}{4t}\right\} \quad (4.6.40)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen (4.6.40) çözümü fizikte bilinen Green Fonksiyonu' dur. En genel tek parametrelili simetri grubu, verilen vektör alanlarının genel lineer bir kombinasyonu olan $c_1V_1 + \dots + c_6V_6 + V_\alpha$ dikkate alınarak elde edilir. Ancak grup dönüşümleri için bu şekildeki açık formüller oldukça karmaşıktır. Bunun yerine $G_1, \dots, G_6, G_\alpha$ 'nın çeşitli bir parametre alt grubundaki dönüşümlerin bileşimi olarak rastgele bir grup dönüşümü tanımlanabilir. Tanımlan bu yeni grup dönüşümü g ile temsil edilsin. Burada g grubu,

$$g = \exp(V_\alpha) \cdot \exp(\varepsilon_6 V_6) \cdot \dots \cdot \exp(\varepsilon_1 V_1) \quad (4.6.41)$$

şeklinde tek olarak ifade edilebilir.

Böylece, grup dönüşümleri ile verilen bir çözümden elde edilebilecek en genel çözüm

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon_6 t}} \exp\left\{\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_5 x + \varepsilon_6 x^2 - \varepsilon_5^2 t}{1+4\varepsilon_6 t}\right\} \cdot f\left(\frac{e^{-\varepsilon_4}(x-2\varepsilon_5 t)}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_1, \frac{e^{-2\varepsilon_4 t}}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_2\right) + \alpha(x, t) \quad (4.6.42)$$

biçimindedir. Burada $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$ reel sabitler olup α ısı denkleminin keyfi bir çözümüdür.

4.7. Isı Denkleminin Grup-İnvariant (Değişmez) Çözümleri

Bu bölümde simetri grupları bulunan (4.6.1) ısı denkleminin grup değişmez çözümlerini elde edeceğiz (Olver 1986). Isı denkleminin simetri grupları, denkleme özgü altı parametrelili bir simetri grubundan ve denklemin lineerliğinden kaynaklanan sonsuz boyutlu bir alt grubundan oluştuğunu yukarıda gördük. Tam simetri grubunun her bir

parametrelili alt grubu -formları genel olarak araştırılan özel alt gruba bağlı olacak olan- indirgenmiş, ADD' den belirlenecek bir grup değişmez çözümlerin sınıfı olacaktır.

Hareketli dalga çözümleri:

Genel olarak, bir KDD için hareketli dalga çözümleri, söz konusu grubun bağımsız değişkenler uzayında -bir dönüşüm grubu olduğu- özel grup değişmez çözümleri olarak ortaya çıkar. Bu örnekte, $\partial_t + c\partial_x$ tarafından üretilen, c ' nin sabit bir değişmez olduğu, dalgaların hızını belirleyecek olan

$$(x, t, u) \rightarrow (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (4.7.1)$$

dönüşüm grubunu göz önüne alalım. Bu grubun değişmezlerini bulmak için

$$c \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.7.2)$$

vektör alanına bağlı karakteristik denklem (invariantı) yazılır:

$$\frac{dx}{c} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}. \quad (4.7.3)$$

Bu sistemin çözülmesiyle

$$y = x - ct, \quad v = u, \quad (4.7.4)$$

olur. Böylece grup değişmez çözümü $v = h(y)$, sabit c hızıyla hareket eden, değişmeyen profil dalgasını belirleyen $u = h(x - ct)$ şeklini alır. u türevlerini x ve t terimlerine göre v ve y cinsinden yazmak istenirse;

$$u_t = v_y y_t = -cv_y, \quad u_x = v_y, \quad u_{xx} = v_{yy}, \quad (4.7.5)$$

ve benzerleri bulunur (Burada $u_x, u_t, y_t, v_y, u_{xx}, v_{yy}$ vb. türevleri normal tek değişkenli türevleri ifade edilmek üzere kullanıldı. Örneğin; u_x ifadesi u ' nun x ' e göre birinci türevini, yani tek değişkenli türevi göstermektedir.). Bu ifadelerin ısı denkleminde yerine yazılmasıyla, hareketli dalga çözümleri için indirgenmiş ADD:

$$-cv_y = v_{yy} \quad (4.7.6)$$

olarak bulunur. Bu doğrusal, sabit katsayılı denklemin genel çözümü k ve l isteğe bağlı sabitler olmak üzere

$$v(y) = ke^{-cy} + l \quad (4.7.7)$$

olur. Önceden bulunan (4.7.4)' deki eşitlikler (4.7.7)' de yerine yazılırsa ısı denkleminin en genel hareketli dalga çözümü

$$u(x, t) = ke^{-c(x-ct)} + l \quad (4.7.8)$$

formunda bulunur.

Ölçekleme-değişmez çözümleri:

Isı denkleminin iki tane tek parametrelili ölçeklendirme simetrisi grubu vardır.

$$(x, t, u) \rightarrow (\lambda x, \lambda^2 t, \lambda^{2a} u), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (4.7.9)$$

ölçekleme-değişmez grubuna karşılık gelen sonsuz küçük üreteçlerinin

$$x\partial_x + 2t\partial_t + 2au\partial_u, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4.7.10)$$

lineer bir kombinasyonunu düşünüyoruz. Bu grubun invaryantlarını bulmak için

$$x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 2t \cdot \frac{\partial}{\partial t} + 2au \cdot \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.7.11)$$

vektör alanına bağlı karakteristik denklem yazılır:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{2au}. \quad (4.7.12)$$

Bu sistemin çözülmesiyle $\{(x, t, u) : t > 0\}$ yarı alanında, bu tek parametrelili grubun invaryantları

$$y = x/\sqrt{t}, \quad v = t^{-a}u, \quad (4.7.13)$$

fonksiyonları tarafından sağlanır. Burada u' nun v cinsinden çeşitli türevleri alındığında

$$\begin{aligned} u &= t^a v, \\ u_x &= t^{a-1/2} v_y, \\ u_{xx} &= t^{a-1} v_{yy}, \\ u_t &= -\frac{1}{2} x t^{a-3/2} v_y + a t^{a-1} v = t^{a-1} \left(-\frac{1}{2} y v_y + a v \right). \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

bulunur. Burada t parametre değişkeni olarak görüldü ve u' nun x ve t cinsinden türevleri, y ve v cinsinden ifade edildi. Bu ifadeler ısı denkleminde yerine yazıldığında

$$t^{a-1} v_{yy} = t^{a-1} \left(-\frac{1}{2} y v_y + a v \right) \quad (4.7.15)$$

bulunur.

Genel teori tarafından garanti edildiği gibi, (4.7.15) denklemi parametrik olarak t değişkeninden meydana gelmediği, yani ölçekleme-değişmez çözümleri için indirgenmiş denklemi oluşturan

$$v_{yy} + \frac{1}{2} y v_y - a v = 0, \quad (4.7.16)$$

ile eşdeğerdir. Bu lineer ADD' nin çözümleri, parabolik silindir fonksiyonları açısından yazılabilir. Gerçekten de

$$w = v \exp\left(\frac{1}{8} y^2\right) \quad (4.7.17)$$

ayarlanırsa w , Weber' in diferansiyel denkleminin ölçeklendirilmiş bir formunu karşılar:

$$w_{yy} = \left[\left(a + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{16} y^2 \right] w. \quad (4.7.18)$$

Bu denklemin genel çözümü

$$w(y) = kU\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \tilde{k}V\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.7.19)$$

şeklindedir. Burada $U(b, z)$ ve $V(b, z)$ parabolik silindir fonksiyonlarıdır (Abramowitz ve Stegun 1965). Böylece, ısı denkleminin genel ölçekleme-değişmez çözümü,

$$u(x, t) = t^a e^{-x^2/8t} \left\{ kU\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right) + \tilde{k}V\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right) \right\}, \quad (4.7.20)$$

şeklini alır. Özel ölçekleme-değişmez çözümlere öncülük eden belirli değerler, temel fonksiyonlar açısından ifade edilebilir. Örneğin, eğer $a = 0$ alınırsa erf hata fonksiyonu olan

$$u(x, t) = k * erf(x/\sqrt{2t}) + \tilde{k} * \quad (4.7.21)$$

olasılık çözümü elde edilir. $U\left(-n-\frac{1}{2}, z\right) = e^{-z^2/4} He_n(z)$ eşitliği (burada $He_n(z)$ n .

Hermite polinomudur) ve $a = -(n+1)/2$ alınır

$$u(x, t) = t^{-(n+1)/2} e^{-x^2/4t} He_n(x/\sqrt{2t}) \quad (4.7.22)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $V\left(n+\frac{1}{2}, z\right) = \sqrt{2/\pi} e^{z^2/4} He_n^*(z)$ ilişkisi (burada $He_n^*(z) = (-i)^n He_n^*(iz)$ ' dir), özel ölçek-değişmez çözümleri olarak

$$x, \quad x^2 + 2t, \quad x^3 + 6xt, \quad \text{vb.} \quad (4.7.23)$$

ısı polinomlarına öncülük eder (Widder 1976).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında, çeşitli bilim dallarındaki birçok fiziksel olayı betimleyen, lineer olmayan; özel (2+1) boyutlu Schrödinger denklemi, (2+1) boyutlu integrallenebilir Gardner denklemi, yeni (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP-Boussinesq ve bir boyutlu ısı denklemi ele alınmıştır. Tezin dördüncü bölümünde, söz konusu denklemlerin; tanh fonksiyon yöntemi, $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ yöntemi, modifiye Kudryashov yöntemi, Hirota bilineer yöntemi ve Lie simetri analizi gibi yaklaşımlarla analitik (tam) çözümleri elde edilmeye çalışılmıştır.

(2+1) boyutlu Schrödinger denklemine farklı yapıda çeşitli dalga çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler dark (karanlık) soliton, karma (birleşik) soliton, simetrik Lucas sinüs, simetrik Lucas kosinüs fonksiyonları ve periyodik dalgalar şeklindedir. Çözümlerin bazıları Younis ve ark. (2018)'nin elde ettiği sonuçlarla (karanlık dalga ve periyodik dalgalar) aynıken çözümlerin geri kalanı yenidir. Bahsi geçen denkleme uygulanan yöntemlerin karşılaştırılmasıyla, $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ yönteminin değiştirilmiş pek çok farklı çözüm yapıları sağladığı, bunun yanında tanh fonksiyon ve Kudryashov ansatz yaklaşımlarının ise yalnızca bir tür çözüm prototipine yol açtığı sonucuna varılmıştır (bkz. denklem (3.1.3) ve denklem (3.3.1)). Bu nedenle, $\exp(-\varphi(\varepsilon))$ yönteminin diğer iki yönteme göre belirgin bir avantaja sahip olduğu görülmüştür.

Bunun yanında yine tezin dördüncü bölümünde lineer olmayan denklemlerin bilineerleştirilmesine dayanan Hirota bilineer yaklaşımı göz önüne alındı. Bu yaklaşımdaki bazı zorlukları hafifletmek için önerilen basitleştirilmiş Hirota metodu, (2+1) boyutlu Gardner ve (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP-Boussinesq denklemlerine tatbik edilerek sırasıyla çoklu-kink ve çoklu-soliton çözümlerin nasıl elde edildiği araştırıldı. Bu yöntemi uygulayabilmek için denklemin lineer ve lineer olmayan en yüksek dereceli terimleri arasında –soliton oluşumunu sağlayan- dengeleme yapılması gerekmektedir. Bu dengelemeye dayanarak bağımlı değişkenin yeni bir değişken cinsinden dönüşümü kullanarak model Hirota türevleri cinsinden bilineerleştirildi. Bu bilineerleştirilmiş denklem üzerinde çeşitli çözüm yapıları (mesela çoklu-soliton ve çoklu-kink gibi) varsayımı ile Maple paket programından yararlanarak özel tam

özmler elde edildi. Bunun yanında ele alınan modellerin (Hirota bilineer yapıya dayanarak) oklu dalga breather ve lump çözümlerinin araştırılması, lump-kink, lump-breather vd. etkileşim çözümlerinin incelenmesi birer açık problem olarak durmaktadır.

Çalışmamızın son kısmında ise denklemin mertebesi, derecesi veya lineerlik özelliklerine herhangi bir kısıtlama yapılmasına gerek bırakmayan Lie grup yaklaşımı ele alındı. Bu yöntem (1+1) boyutlu ısı denklemine uygulandı. Denklemin kabul ettiğı Lie nokta simetri üreteçleri, dönüşüm grupları ve Lie cebir yapısı araştırıldı. Bazı aşıkır olmayan dönüşüm grupları ile mevcut tam çözümlerden yeni tam çözümler elde edildi. Bazı Lie nokta üreteçlerine karşılık gelen invaryantlar ve bu invaryantları kullanarak simetri indirgemeleri elde edildi. Bu anlamda hareketli (ilerleyen) dalga çözümleri ve ölçekleme değışmez çözümleri inşa edildi. Ölçekleme değışmez çözümleri tezin diğerk bölümlerinde incelenen hareketli dalga çözümlerinden farklı yapıdadır. Bu çözümler hareketli dalga çözümlerindeki hiperbolik ve periyodik (trigonometrik) özmlerden farklı yapıda olan parabolik silindirik fonksiyonlar biçimindedir (bkz. (4.7.20)).

Bu yöntem tezin önceki bölümlerinde ele alınan (2+1) boyutlu Schrödinger denklemi, (2+1) boyutlu Gardner ve (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP-Boussinesq denklemlerine de uygulanabilir. Bu noktalar açık birer problemdir.

Elde edilen tam (hareketli dalga) özmleri, başlangıç/sınır değıer problemlerinde başlangıç değıeri olarak kullanılabilir. Ek olarak, bu çözümler sayısal şemalarda kıyaslama ve değışmezlik teorileri olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1965.** Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards Appl. Math. Series-55, U.S. Govt. Printing Office, Washington, D.C., 1046 pp.
- Bluman, G.W., Kumei, S. 1989.** Symmetries and differential equations, Applied Mathematical Sciences, 81, Springer-Verlag, New York.
- Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S. 2013.** Adi Diferensiyel Denklemler. Dora Yayıncılık, Bursa, 396 s.
- Ege, S. M., Mısırlı, E. 2014.** The modified Kudryashov method for solving some fractional-order nonlinear equations. *Advances in Difference Equations*, 1(135):1-13
- Fan, E., Hona, Y. C. 2002.** Generalized tanh method extended to special types of nonlinear equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 57(8): 692-700.
- Güner, Ö. 2014.** Kesirli Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri. *Doktora Tezi*, ESOGÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Eskişehir.
- Ibragimov, N.H., Kovalev, V.F. 2009.** Approximate and Renormgroup Symmetries. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 147 pp.
- He J.H., Wu X.H. 2006.** Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3): 700-708.
- Hirota, R. 2004.** The Direct Method in Soliton Theory: Cambridge Tracts in Mathematics, Editörler: Nagai, A., Nimmo, J., Gilson C., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 214 pp.
- Hereman, W., Nuseir, A. 1997.** Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 43(1), 13-27.
- Hosseini, K., Mayeli, P., Bekir, A., Guner, O. 2018.** Density-dependent conformable space-time fractional diffusion-reaction equation and its exact solutions. *Communications in Theoretical Physics*, 69(1): 1.
- Ibragimov, N. H. 1995.** CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol 1-3, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Kudryashov, N. A. 2012.** One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6), 2248-2253.
- Malfliet, W. 1992.** Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. *American Journal of Physics* 60(7): 650-654.
- Mohyud-Din, S. T., Ali, A. 2017.** $\text{Exp}(-\varphi(\varepsilon))$ -expansion Method and Shifted Chebyshev Wavelets for Generalized Sawada-Kotera of Fractional Order. *Fundamenta Informaticae*, 151(1-4): 173-190.
- Naz, R., Mahomed, F.M., Mason, D.P. 2008.** Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics. *Applied Mathematics and Computation*, 205(1):212-230.
- Olver, P.J. 1986.** Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verlang, New York, 513 pp.
- Parkes, E. J., Duffy, B. R. 1996.** An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. *Computer physics communications*, 98(3): 288-300.

- Radha, R., Lakshmanan, M. 1994.** Singularity structure analysis and bilinear form of a (2+1) dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 10(4), 29-32.
- San, S. 2011.** Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri. *Yüksek Lisans Tezi*, EOÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir.
- Sezer, M., Daşcıoğlu, A. 2016.** Diferansiyel Denklemler 1: Teori ve Problem Çözümleri. Dora Yayıncılık, Türkiye, 292 s.
- Stakhov, A., Rozin, B. 2005.** On a new class of hyperbolic functions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(2): 379-389.
- Strachan, I. A. B. 1992.** Wave solutions of a (2+1) dimensional generalization of the nonlinear Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 8(5): L21.
- Yıldırım, Y. 2019.** Oluşum Tipi Lineer Olmayan Parça Türevli Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri. *Doktora Tezi*, UÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Younis, M., Cheemaa, N., Mehmood, S. A., Rizvi, S. T. R., Bekir, A. 2018.** A variety of exact solutions to (2+1) dimensional Schrödinger equation, *Waves in Random and Complex Media*, 1-10.
- Zahran, E. H. 2015.** Exact Traveling Wave Solution for Nonlinear Fractional Partial Differential Equation Arising in Soliton using the $\exp(-\phi(\epsilon))$ -Expansion Method. *International Journal of Computer Applications*, 109(13).
- Zakharov, V. Y. 1980.** Solitons, Editörler: Bullough, R.K., Caudrey, P. J., Springer, Berlin.
- Zayed, E. M. E., Alurfi, K. A. E. 2015.** The modified Kudryashov method for solving some seventh order nonlinear PDEs in mathematical physics. *World Journal of Modelling and Simulation*, 11(4): 308-319.
- Wazwaz, A. M. 2004.** The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 154(3): 713-723.
- Wazwaz, A.M. 2014.** Multiple kink solutions for the (2+1) dimensional integrable Gardner equation. *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*, 15(3), 241-246.
- Wazwaz, A. M. 2016.** The simplified Hirota's method for studying three extended higher-order KdV-type equations. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 1(3):181-185.
- Wazwaz, A.M., El-Tantawy, S. A. 2017.** Solving the (3+1) dimensional KP-Boussinesq and BKP-Boussinesq equations by the simplified Hirota's method. *Nonlinear Dynamics*, 88(4), 3017-3021.
- Widder, D. V. 1976.** The heat equation. *Academic Press*, New York, 263.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Pelin DOĞAN ÇANKAL
Doğum Yeri ve Tarihi : ANKARA 28.09.1990
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Nevvar-Salih İşgören Lisesi (2007)
Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi
Buca Eğitim Fakültesi
Matematik Öğretmenliği Bölümü (2013)
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2020)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : MEB-Hizan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi
/Bitlis (2014-2016)
MEB-Has Asansör Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi
/Bursa (2016- ...)

İletişim (e-posta) : pelindogancankal@gmail.com

Yayımları :

Doğan Çankal, P., Yaşar, E. 2020. Optical soliton solutions to a (2+1) dimensional Schrödinger equation using a couple of integration architectures. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences* (baskıda).