

EŞİT OLMAYAN GRUP VARYANSLARI İÇİN BENZER t VE F TESTLERİ*

Çeviren: Mustafa AYTAÇ**

Birden fazla grupta ilgili olarak yapılan analizlerde, t ve F testlerinin geçerli olmasının koşullarından birisi de grup varyanslarının aynı olmasıdır¹. Bir başka deyişle, yukarıdaki testler grup varyanslarının eşit olduğunu varsayar. Bununla beraber, grup varyansları çok farklı olmadığı zaman, kullandığımız F testinin geçerli olduğu çok geniş bir alan vardır. Eşit olmayan gruplar için matematik olarak uygun testin sonuçlandırılması çok karmaşıktır. Matematiksel istatistikçiler, bunlar için öyle yöntemler geliştirmişlerdir ki, uygulayıcıların onları standart bir hale koyup ele almaları çok zordur. Bu bölümde görece olarak bir yöntem açıklanacaktır. Ayrıca bu yöntemin özellikleri, limitleri ve pratik uygulamalardaki zorlukları da ele alınacaktır.

a) Alışılmış t ve F Testi²

Yeni yöntemi ele almadan önce karşılaştırmalar için, alışılmış t ve F testini kısaca tekrar etmek yararlı olacaktır. İki örnekleme (veya iki işlem grubunu) düşünelim. Bunlara ait veriler tablo 1 de verilmiştir.

Tablo: 1
Bağımsız İki Örneklem ve Varyans İle Ortalamalarının Tahmini

Örneklem	Tek Değerler $\bar{y}_{i\alpha}$	n_i	s.d _i	y_i	ss _{qi}	s_i^2	s_i^2/n_i
1	18 13 12 14 19 17 11 15 18 13	10	9	15	72	8.0	0.80
2	12 8 15 9	4	3	11	30	10.0	2.50
Toplam		14	12		102		3.30

* Li, C.C., *Introduction to Experimental Statistics*, Mc Graw Hill, Inc, New York, 1964, Chapter 32.

** Yard. Doç. Dr.; Uludağ Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi

1 Bazı özel durumlarda bilinen bir varyans oranına sahip olmakta yeterlidir (Çevirenin notu).

2 "Alışılmış-t" ve Alışılmış-F" kavramları ingilizcedeki "Ordinary t" ve "Ordinary F" kavramlarının yerine kullanılmıştır. Aynı şekilde "benzer-t" ve "benzer F" kavramları da ingilizcedeki "t-like" ve "F-like" kavramlarının yerine kullanılacaktır (Çev. Notu).

İlk örneklem $ssq_1 = 72$ ile 10 gözleme sahiptir. Böylece varyansının tahmini³

$$s_1^2 = \frac{ssq_1}{(s.d)_1} = \frac{72}{9} = 8.0$$

dır. İkinci örneklemde ise $ssq_2 = 30$ olup dört tane gözlemimiz vardır. Bundan dolayı

$$s_2^2 = \frac{ssq_2}{(s.d)_2} = \frac{30}{3} = 10$$

dur. Varyansın bu iki tahmini görüldüğü gibi eşit değildir. Gerçekte, onlar anlamlı olarak farklı olabilirler. Bunu açığa çıkarmak için bir varyans oran testi yapabiliriz. Bunu F-testi ile yaparsak, hesaplanmış F-değeri (bir başka deyişle testistatistiği) $10/8 = 1.25$ dir⁴. Serbestlik dereceleri ise sırası ile 3 ve 9 dur. F-tablosundan $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesi ve yukardaki serbestlik derecelerine göre bulunan değer ise 3.86 dir. $F_{hes} < F_{tablo}$ olduğu için s_1^2 ile s_2^2 nin anlamlı olarak farklı olmadığını söyleriz. Yani, $s_1^2 \cong s_2^2$ olarak kabul edebiliriz.

Aynı şeyi alışılmış t-testi ile de yapabiliriz. Öncelikle iki örneklem için serbestlik dereceleri ve kareler toplamını ele alarak varyansın tek bir tahminini elde edelim. Yani,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 ssq_i}{\sum_{i=1}^2 (s.d)_i} = \frac{102}{12} = 8.5$$

Bu durumda ele alınan örneklemlerden elde edilen test istatistiğimiz t nin değeri, serbestlik derecesi ($n_1 + n_2 - 2 = 12$) 12 ile aşağıdaki gibi olacaktır.

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{4.0}{\sqrt{8.5 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right)}} = 2.32$$

t-tablosundan $\alpha = 0.05$ e göre bulunan değer ise 2.18 dir.

$t_{hes} > t_{tablo}$ olduğu için iki örneklem ortalamaları arasındaki farkın anlamlı olduğuna karar verilmelidir.

3 ssq_i , i. inci örneklem içindeki değişimi gösterir ve
 $\sum (y_{i\alpha} - \bar{y}_i)^2$
 α

formülü ile hesaplanır (Çev. Notu).

4 F-tablo değerinin özelliğinden dolayı küçük çıkan s_1^2 değeri paydaya yazılır. Çünkü F tablosunda var olan en küçük değer $(s.d)_1 = \infty$ ve $(s.d)_2 = \infty$ durumunda 1.0 dur. Bundan dolayı küçük varyans paya yazılırsa, test istatistiği değeri her zaman kabul bölgesi içine düşecektir (Çev. Notu).

b) Benzer-t İstatistiği

İki grup varyansının farklı olduğunu varsayalım. Birinci ve ikinci örneklem ortalamalarının varyansı sırasıyla

$$V(\bar{y}_1) = \frac{s_1^2}{n_1} \text{ ve } V(\bar{y}_2) = \frac{s_2^2}{n_2}$$

dir. Böylece iki örneklem ortalaması arasındaki farkın varyansı

$$V(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$$

olacaktır⁵. O zaman, benzer-t istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$t^* = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{40}{\sqrt{\left(\frac{8}{10} + \frac{10}{4}\right)}} = 2.2019$$

Yukardaki tanımın benzer t istatistiği olarak adlandırılmasının nedeni, t^* nin tam olarak t-dağılımına sahip olmamasıdır. Çünkü t-dağılımının paydasında bir değişken varken, t^* dağılımının paydasında iki değişkenin toplamı vardır. Ayrıca t^* nin örnekleme dağılımı da bilinmiyor (t^* nin örnekleme dağılımı iki grup için $r_1 = 1$ parametresini ve payda içinde iki tane s.d. olan $(s.d.)_1$ ve $(s.d.)_2$ yi içermelidir).

t-tablosundan yararlanmak amacı ile belli bir s.d. ($s.d.^*$) t^* ye bağlanır; böylece o, s.d. sayıları ile t-ye eşit olacaktır. Bu yöntem, Welch tarafından ortaya atılmış ve s.d. için formül aşağıdaki gibi tanımlanmıştır⁶.

$$s.d.^* = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \quad (1)$$

Bu karmaşık formül belki bir dereceye kadar kısaltılabilir. Bununla beraber s.d.* nın sayısal değeri tablo 1 yardımı ile kolaylıkla hesaplanabilir.

$$s.d.^* = \frac{(3.30)^2}{\frac{(0.80)^2}{9} + \frac{(2.50)^2}{3}} = \frac{10.89}{2.1544} = 5.055$$

5 Aslında,

$$V(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = V(\bar{y}_1) + V(\bar{y}_2) - 2 \text{Kov}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$$

dir. Fakat bağımsız iki örneklem söz konusu olduğu için $\text{Kov}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0$ değerini alır (Çev. Notu).

6 Brownlee, K.A., Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering, John Wiley, Inc., New York, 1960, s. 235-239 ve 265-268.

s.d.* ni yaklaşık olarak 5 alırsak, t-tablosundan $\alpha = 0.05$ e göre bulunan tablo değeri 2.57 olacaktır. $t_{hes}^* < t_{tablo}$ olduğu için iki örneklem ortalamaları arasındaki farkın anlamlı olmadığını söyleriz.

Bu iki durumu tablo 1 deki verileri kullanarak özetlersek, aradaki farkı daha iyi görebiliriz.

	t - Testi	Benzer - t
Test İstatistiği	$t_{hes} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = 2.32$	$t_{hes}^* = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2}} = 2.20$
Serbestlik derecesi	S.d. = 12	S.d.* = 5 (yaklaşık)
$\alpha = 0.005$ 'e göre tablo değeri	$t_{tablo} = 2.18$	$t_{tablo} = 2.57$
Karar Alma	$t_{tab} < t_{hes}$ olduğu için fark anlamlıdır.	$t_{tab} > t_{hes}$ olduğu için fark anlamlı değildir.

Görüldüğü gibi iki yöntem de aynı verileri kullanmasına rağmen farklı sonuçlara varmaktadırlar. Bu nedenden dolayı uygulayıcılar, benzer-t yöntemini kullanmaktan çekinirler. Belli koşullar sağlandığı zaman, matematiksel yöntem daha basit bir duruma indirgenir. Gerçekte $s_1^2 = s_2^2$ olsa bile bu iki yöntem yine farklı sonuç verecektir. Açık olarak benzer-t, dağılımının bir genelleştirilmiş hali olmayıp, farklı varsayımlara dayanan değişik bir yöntemdir.

c) s.d.* nin Değeri

Yukardaki özetle de verdiğimiz gibi iki yöntemin test istatistiklerinin değerleri çok farklı olmasına rağmen $-t = 2.32$ ve $t^* = 2.20$ - s.d. ri çok farklıdır - s.d. = 12 ve s.d.* = 5 -. Bunun nedenini açıklamaya çalışalım. $s_1^2 \neq s_2^2$ ve

$$\frac{s_1^2}{n_1 (n_1 - 1)} = \frac{s_2^2}{n_2 (n_2 - 1)}$$

olduğu zaman türevsel denklemlerle s.d.* nin maximum değerinin $n_1 + n_2 - 2$ olduğu gösterilebilir. s.d.* nin minimum değeri ise $(n_1 - 1)$ ile $(n_2 - 1)$ değerlerinden küçük olanına eşittir. Bu ise formül (1) den de görüldüğü gibi s_2^2/n_2 nin s_1^2/n_1 den çok büyük olduğu zaman ortaya çıkar. Bunun tersi de aynı etkiyi yapar. Örneğimizde, $s_2^2/n_2 = 2.50$, $s_1^2/n_1 = 0.80$ nin üç katından daha fazladır ve s.d.* = 5 $n_1 + n_2 - 2$ ye olduğundan daha fazla küçük örneklem büyüklüğüne yakındır. $s_1^2 = s_2^2$ olduğu zaman s.d.* nin değeri iki örneklem büyüklükleri ile tamamen belirlenebilir. Örneğin, n_1, n_2 den daha büyük olduğu zaman s.d.* nin değeri $n_2 - 1$ in minimum değerine yaklaşır. Çünkü n_1, n_2 den büyük olduğu zaman, benzer - t nin dağılımı s_2^2 tarafından $(n_2 - 1)$ s.d ile esas olarak belirlenecektir. Başka bir deyişle, çok büyük bir n_1 'e bağlı $\bar{y}_1$ ve s_1^2 sabitler gibi işleyecek ve böylece $t^*, n_2 - 1$ s.d. ile benzer-t olarak ele alınacaktır.

d) Büyüklükleri Eşit Olan İki Örneklem

İki örneklem aynı büyüklükte olduğu zaman, t^* ve t aynı değere sahiptirler. Çünkü $n_1 = n_2 = n$ yazarsak,

$$\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{n} = \frac{ssq_w}{n(n-1)} = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

olur. $ssq_w = ssq_1 + ssq_2$ dir. Buna göre s.d.* ni de basitleştirebiliriz. $n_1 = n_2 = n$ 'i formül (1) de yerine koyarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$s.d.* = \frac{(n-1)(s_1^2 + s_2^2)^2}{(s_1^2)^2 + (s_2^2)^2}$$

$n_1 = n_2 = n$ olmak üzere tablo 2 deki verileri ele aldığımızı varsayalım.

Tablo: 2
Eşit Büyüklükte İki Örneklem ve Varyansın Tahmini

Örneklem	Tek Değerler y_i	Y_i	ssq_i	s_i^2	s_i^2/n
1	11 18 15 26 25 21 11 13 19 10	170	316	35.11	3.511
2	26 21 19 22 19 27 28 22 24 22	230	90	10.00	1.000

Varyansın tahmini $s^2 = 22.55$ dir ve

$$22.55 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) = 4.511$$

$\bar{y}_1 = 23$ ve $\bar{y}_2 = 17$ olduğundan

$$t^* = t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)}} = \frac{6}{\sqrt{4.511}} = 2.825$$

t için $s.d = n_1 + n_2 - 2 = 18$ olup, benzer t için ise,

$$s.d.* = \frac{(9)(45.11)^2}{(35.11)^2 + (10.00)^2} = 13.7 \text{ dir.}$$

s.d.* bir tam sayı olmadığından dolayı t^* için tablo değeri (kritik değer) t -tablosundan iç değer biçim yöntemi ile elde edilebilir⁷. Böylece $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde

7 "İç değer biçim" kelimesi ingilizce "interpolation" kelimesinin karşılığı olarak alınmıştır. Bir dizideki değerlerden, dizide bulunmayan ara değerlerin tahmin edilmesi yöntemine iç değer biçim adı verilir (Çev. Notu).

$$s.d. = 13 \text{ için } t = 2.160$$

$$s.d. = 13.7 \text{ için } t = 2.15$$

$$s.d. = 14 \text{ için } t = 2.145$$

Örneğimizde test istatistiklerimiz $t = t^* = 2.825 > 2.15$ olduğu için hangi yöntemi seçersek seçelim sonuç anlamlı çıkacaktır. Bununla beraber, hesaplanan test istatistiklerimiz $t^* = t = 2.13$ çıksa idi, t^* yöntemi ile sonuç anlamlı çıkmayacak; fakat 18 s.d. ne sahip t-testi ($t_{\text{tablo}} = 2.10$) anlamlı olacaktı. Bu daha önce üzerinde durduğumuz aynı pratik yöntemdir.

İki grup eşit büyüklükte olduğu zaman, bir gerçek daha vardır ki, $s_1^2 = s_2^2$ olunca s-d* nin değeri 2 (n - 1)'e indirgenir. Bu ise grup varyansları eşit olmadığı zaman, eşit büyüklüğe sahip grupların daha fazla tercih edildiğini gösterir.

e) Benzer - F İstatistiği

Aynı sayısal örneği kullanarak yalnızca iki grup arasındaki karşılaştırmayı yapmak için benzer-F istatistiğini (F^*) tanımlayarak daha önce yapmış olduğumuz benzer-t testi (t^*) ile karşılaştıralım. i. inci grup için grup ortalamasının ağırlığı, örneklem varyanslarına bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir⁸.

$$w_i = \frac{n_i}{s_i^2}$$

Böylece grup ortalamalarının ağırlıklı genel ortalaması

$$y^*_i = \frac{\sum w_i \bar{y}_i}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i \bar{y}_i}{W}$$

dir. Görüldüğü gibi $\bar{y}^*_i$, bütün grup varyanslarının eşitliğine dayanan varsayımdan oluşturulan bilinen genel ortalama $\bar{y} = \sum n_i \bar{y}_i / n_i$ değerine eşit değildir. Ağırlık ve ağırlıklı genel ortalamayı böyle hesaplamakla, iki grup için ($k = 2$) benzer-F istatistiğini oluştururuz.

$$\begin{aligned} F^* &= w_i (\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2 \\ &= w_1 (\bar{y}_1 - \bar{y}^*)^2 + w_2 (\bar{y}_2 - \bar{y}^*)^2 \end{aligned}$$

F^* in s.d. ise şöyledir:

$$r_1 = k - 1 = 1$$

$$\text{ve } r_2 = \frac{1}{E} = \sum \frac{1}{f_i} \left(1 - \frac{w_i}{W}\right)^2; f_i = n_i - 1 \text{ dir.}$$

8 s_i^2 , i. inci örneklemdeki dağılmayı gösterir ve

$$\frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

formülü ile hesaplanır. Ayrıca s^2 , yığın varyansının yansız bir tahminidir. Yani, $E(s^2) = \sigma^2$ (Çev. Notu).

Tablo: 3
İki Grup İçin Benzer -F ve S.d. nin Hesaplanması

n_i	s_i^2	$w_i = n_i/s_i^2$	$\bar{y}_i$	$w_i \bar{y}_i$	$\bar{y}_i - \bar{y}^*$	$W_i(\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2$
10	8.0	1.25	15	18.75	-0.97	1.176
4	10.0	0.40	11	4.40	-3.03	3.672
		$W = 1.65$	$w_i \bar{y}_i = 23.15$ $\bar{y}^* = 14.03$		4.848 $\Sigma w_i(\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2 = F^*$	
$f_i = n_i - 1$	$\frac{w_i}{W}$	$1 - \frac{w_i}{W}$	$(1 - \frac{w_i}{W})^2$	$\frac{1}{f_i} (1 - \frac{w_i}{W})^2$		
9	0.7576	0.2424	0.05877	0.00653		
3	0.2424	0.7576	0.75392	0.19131		
		1.0000			$E = \frac{1}{r_2} = 0.19783$	

Yöntemin açıklanması amacı ile tablo 3 iki parça olarak verilmiştir. Veriler tablo 1'deki veriler ile aynı olup, üst kısım F^* 'ın bulunması için aritmetik işlemleri, alt kısımda s.d. r_1 ve r_2 yi bulmak için açıklamaları göstermektedir. Görüldüğü gibi⁹,

$$F^* = 8.848 = (2.2019)^2 = t^{*2}$$

ve s.d. de

$$r_2 = \frac{1}{E} = \frac{1}{0.19783} = 5.055 = df^*$$

Böylece benzer-F = benzer- t^2 dir. Aynen alışılmış F 'in iki grup için alışılmış t de olduğu gibi, fakat iki grup olduğu zaman, aritmetik olarak t^* yi kullanmak çok daha basittir. Şimdi de k -grup için genel benzer-F testini incelemeye çalışalım.

f) Genelleştirilmiş Benzer - F - Testi

Grup sayımız ikiden fazla olduğu zaman, F^* 'ın tanımı ve onun s.d. si oldukça karmaşıktır. Bununla beraber, aritmetik süreç tablo 3 de yapıldığı gibidir. w_i ağırlıkları ve ağırlıklı genel ortalama $\bar{y}^*$ aynı şekilde tanımlanabilir.

$$W = \Sigma w_i, f_i = n_i - 1 \text{ ve } E = \Sigma \frac{1}{f_i} (1 - \frac{w_i}{W})^2$$

9 Aslında α - anlamlılık seviyesinde ve $k = 2$ ile N çok büyük olduğu zaman $F = t^2 = Z^2 = X^2$

ilişkisi her zaman için vardır (Çev. Notu).

olsun. Bu durumda F^* , r_1 ile r_2 şu değerleri alır.

$$F^* = \frac{\sum w_i (\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2 / k - 1}{1 + \frac{2(k-2)}{k^2 - 1} E} \quad (2)$$

ve $r_1 = k - 1$ ile $r_2^* = \frac{k^2 - 1}{3E}$ dir.

Dikkat edilirse kolaylıkla görüleceği gibi, $k = 2$ olduğu zaman, gerek F^* 'in paydası gerekse $(k^2 - 1)/3$ ifadesi bir değerine eşit olacaktır. Bu ise daha önce $k = 2$ için bulduğumuz değerlerden başka bir şey değildir.

Aritmetik süreç uzun olduğundan, yukarda yazdıklarımızı gösterebilmek için basit bir sayısal örnek almayı uygun gördük. Gruplar içi veriler şöyledir.

Grup 1:	6	9	3				$Y_1 = 18$	$ssq_1 = 18$
Grup 2:	10	4	9	12	8	11	$Y_2 = 54$	$ssq_2 = 40$
Grup 3:	2	6	4				$Y_3 = 12$	$ssq_3 = 8$

Diğer hesaplamaları toplu olarak tablo 4 de verelim.

Tablo: 4
Benzer F ve Onun S.d. Hesaplamaları

n_i	s_i^2	w_i	$\bar{y}_i$	$w_i \bar{y}_i$	$\bar{y}_i - \bar{y}^*$	$w_i (\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2$
3	9.0	0.333	6	2.00	— 0.4091	0.0558
6	8.0	0.750	9	6.75	2.5909	5.0346
3	4.0	0.750	4	3.00	— 2.4091	4.3528
	1.833		$\sum w_i \bar{y}_i = 11.75, \bar{y}^* = 6.4091$			$9.4432, \sum w_i (\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2$
$f_i = n_i - 1$	$\frac{w_i}{W}$	$1 - \frac{w_i}{W}$	$(1 - \frac{w_i}{W})^2$	$\frac{1}{f_i} (1 - \frac{w_i}{W})^2$		
2	0.18182	0.81818	0.66942	0.33471		
5	0.40909	0.59091	0.34917	0.06983		
2	0.40909	0.59091	0.34917	0.17459		
$r_2 = 9$	1.00000				$E = 0.57913$	

$k = 3$, $w_i (\bar{y}_i - \bar{y}^*)^2 = 9.4432$ ve $E = 0.57913$ değerlerini yukardaki formül (2) de yerine koyarsak,

$$r_1 = 2, \quad r_2^* = \frac{8}{3(0.57913)} = 4.6$$

ve

$$F^* = \frac{9.4432/2}{1 + \frac{2}{8} (0.57913)} = \frac{4.7216}{1.1448} = 4.124$$

değerlerini elde ederiz. F^* in kritik değeri alışımlı F -tablosundan iç değer biçim yöntemi ile kolaylıkla bulunabilir. Böylece $r_1 = 2$ için $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} r_2 = 4 \text{ için} \quad F &= 6.94 \\ r_2 = 5 \text{ için} \quad F &= 5.79 \end{aligned} \quad r_2^* = 4.6 \text{ için } F^* = 6.25$$

Hesaplanan $F^* = 4.12$ değeri, $r_2 = 5$ alınsa bile F dağılımının tablo değerinden küçük olduğu için bu örnek için iç değer biçim gerekli değildir. O zaman üç grup arasındaki farkın anlamlı olmadığına karar verilir.

Aynı verileri ele alarak alışımlı F testinin değerlerini de tablo 5 de bulmaya çalışalım.

Tablo: 5
Tablo 1'deki Veriler İçin F Değerinin ve Onun S.d.
Hesaplanması

Değişim Kaynağı	s.d	ssq	s^2	F
Gruplar Arası	$k - 1 = 2$	54	$s_B^2 = 27$	$\frac{27}{7.33} = 3.68$
Gruplar İçi	$N - k = 9$	66	$s_w^2 = 7.33$	
Toplam	$N - 1 = 11$	120		

$\alpha = 0.05$ ve $r_2 = 9$ 'za göre tablo değerimiz ise 4.26'dır. Sonuç ise görüldüğü gibi burada da anlamlı değildir.

Gruplar eşit büyüklükte olduğu zaman matematiksel istatistikçiler göstermişlerdir ki, eşit olmayan grup varyansları tarafından neden olan karmaşıklık, gruplar değişik olduğu zamankinden daha az önemlidir. Başka bir deyişle, grup büyüklükleri aynı olduğu zaman alışımlı F testi, eşit olmayan varyanslar için çok daha şiddetli olur. Burada anlatılan yöntem, yalnızca grup varyansları çok farklı olduğu zaman kullanılmalıdır.

g) Varyansların Eşitliğinin Testi

Aklımıza şöyle bir soru takılabilir: Grup varyanslarının farklı olduğunu söyleyebilmek için farklılık ne kadar olmalıdır? Örneklem varyansı s_j^2 örneklem ortalamasından daha büyük varyansa sahiptir. Düşünülen büyük örneklem varyanslarını alırsak, s_j^2 nin görülen farklı değerleri anlamlı olarak farklı olmayabilir. Barlett, grup varyanslarının türdeşliği için bir ki-kare testi geliştirmiştir¹⁰. Yöntemi s_j^2 lerin

10 Barlett, M.S., Properties of Sufficiency and Statistical Tests, Proc. Roy. Soc., London Series A, 160; 268-282, 1937.

doğal logaritmasının hesaplanmasını içerir $(k - 1)$. s.d. ile ki-karenin yaklaşık değeri X^2 ile gösterilir ve şöyle bulunur.

$$X^2 = f \log_e s^2 - f_i \log_e s_i^2$$

Formülde;

k = grup sayısını

$f_i = n_i - 1$

$f = f_i = N - k$ dır.

Alışıldığı gibi s^2 , tüm gruplardan varyansların tahminidir. Yani,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k ssq_i}{\sum_{i=1}^k (s.d)_i}$$

Tablo 4'de verilen değerler için ki-kare yaklaşık değerini Tablo 6'da bulmaya çalışalım.

Tablo: 6
Varyansların Eşitliğinin Testi İçin Ki-Kare Değerinin Bulunması

Grup	f_i	ssq_i	s_i^2	$\log_e s_i^2$	$f_i \log_e s_i^2$	$\frac{1}{f_i}$
I	2	18	9.0	2.19722	4.39444	0.500
II	5	40	8.0	2.07944	10.39720	0.200
III	2	8	4.0	1.99244	2.77258	0.500
	9	66	7.33	1.99244	17.564422	1.200
	f	ssq_w	s^2		17.93196	0.111
					$X^2 = 0.36774$	1.089

$$s^2 = \frac{ssq_1 + ssq_2 + ssq_3}{(s.d)_1 + (s.d)_2 + (s.d)_3} = \frac{18 + 40 + 8}{9} = 7.33$$

2.s.d. ile yaklaşık ki-kare değeri ise,

$$X^2 = (2) (8.966) - 17.564 = 0.368$$

2.s.d. ve $\alpha = 0.05$ için ki-karenin tablo değeri 5.99 olduğu için varyansların eşitliği anlamlı değildir. Bundan dolayı bu veriler kümesi için, alışılmış varyans analizi ve F-testi uygundur. Yukardaki formülle hesaplanan X^2 nin değeri gerçek ki-kare değerinden önemli olmayan bir miktar kadar fazladır. X^2 değeri, anlamlılık değerinin altına düştüğü için burada durur. Eğer X^2 anlamlılık değerinden büyük çıksa idi, anlamlılık testi yapmadan önce düzeltme faktörünü, onun değerini ele almadan önce kullanmamız gerekecekti. Düzeltme faktörü, tablo 6'nın son sütununda görülmektedir. Yani,

$$C = \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum \frac{1}{f_i} - \frac{m}{f} \right)$$

Örneğimiz için bu değer;

$$C = \frac{1}{3(2)} (1.200 - 0.111) = 0.1815$$

Düzeltilmiş ki-kare değerini bulmak için X^2 değerini $(1 + C)$ ye bölmemiz gerekir. Böylece

$$X^2 = \frac{X^2}{1 + C} = \frac{0.36774}{1.1815} = 0.311$$

Bitirmeden önce şunu da belirtmeliyiz ki, yalnızca anlamlı derecede büyük bir ki-kare değeri varyans gruplarının türdeşliğini gösterir¹¹.

11 Daha fazla bilgi için bakınız, Yoğurtçugil, M.K., Ki-Kare Üzerine Bir Deneme, İ.Ü. İktisat Fakültesi, İstanbul, 1978, Bölüm V - Türdeşlik Testi.