

**SABİT ORANLI EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU**

**SELİN GÜRPINAR**



T. C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT ORANLI EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Selin GÜRPINAR

Prof. Dr. Kadri ARSLAN  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2014  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ ONAYI

Selin GÜRPINAR tarafından hazırlanan “Sabit Oranlı Eğriler ve Yüzeylerin Bir Karakaterizasyonu” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

**Üye:** Prof. Dr. Kadri ARSLAN  
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye:** Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN  
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye:** Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK  
Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Ali Osman DEMİR**

**Enstitü Müdürü**

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

../../....

**İmza**

**Selin GÜRPINAR**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABİT ORANLI EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Selin GÜRPINAR

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmada  $\mathbb{R}^n$  deki eğriler ve yüzeylerin sabit oranlı olma durumları incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde  $\mathbb{R}^n$  deki eğriler ele alınmıştır. Bu bölümde sabit oranlı eğriler ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde  $\mathbb{R}^n$  deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölümde sabit oranlı yüzeyler ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:**  $\mathbb{R}^n$  de Frenet eğrisi, Yüzey, Sabit oranlı yüzey

2014, vi+40 sayfa.i

## ABSTRACT

MSc Thesis

### A CHARACTERIZATION CURVES AND SURFACES WITH CONSTANT CURVATURE RATIOS

Selin GÜRPINAR

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

In this thesis, a characterizations of constant curvature ratio surfaces in  $\mathbb{R}^n$  with the help of coefficients of the first and second fundamental form are given.

This thesis consist of four chapters.

Firs chapter is introduction.

In the second chapter it is given some basic definitions and theorems which will be use in the other chapters.

In the third chapter constant curvature ratio curves in n-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  are considered.

In the fourth chapter constant curvature ratio surfaces in n-dimensional Euclidean space are considered. Some of the original results were obtained.

**Key Words:** Frenet curve of  $\mathbb{R}^n$ , Surface, Surface of constant ratio

**2014, vi+40 pages.**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, maddi manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, engin bilgi ve fikirleriyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini çok gördüğüm, kendisinden çok şey öğrendiğim sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu günlere gelmemde madden ve manen çok emeği geçen, bana verdikleri değer ve sevgiyle her problemi aşmama yardımcı olan aileme sonsuz teşekkürler.

Selin GÜRPINAR

.. / .. / ....

## İÇİNDEKİLER

|                                                           | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET.....                                                 | i     |
| ABSTRACT.....                                             | ii    |
| ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR .....                                   | iii   |
| İÇİNDEKİLER .....                                         | iv    |
| SİMGELER DİZİNİ.....                                      | v     |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                      | vi    |
| 1. GİRİŞ .....                                            | 1     |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR.....                                   | 2     |
| 2.0. Giriş.....                                           | 2     |
| 2.1. Frenet Çatısı ve Eğrilikleri.....                    | 2     |
| 2.2. $\mathbb{R}^n$ de Yüzeyler .....                     | 5     |
| 3. $\mathbb{R}^n$ DE SABİT ORANLI EĞRİLER.....            | 7     |
| 3.0. Giriş.....                                           | 7     |
| 3.1. $\mathbb{R}^n$ de Sabit Oranlı Eğriler .....         | 7     |
| 3.2. Sabit Oranlı Düzlemsel Eğriler .....                 | 10    |
| 3.3. Sabit Oranlı Uzay Eğrileri.....                      | 14    |
| 3.4. $\mathbb{R}^{n+1}$ de Gergin Eğriler .....           | 17    |
| 3.4.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ de T-Sabit Gergin Eğriler ..... | 20    |
| 3.4.2. $\mathbb{R}^{n+1}$ de N-Sabit Gergin Eğriler ..... | 27    |
| 4. $\mathbb{R}^n$ DE SABİT ORANLI YÜZEYLER .....          | 30    |
| 4.0. Giriş.....                                           | 30    |
| 4.1. $\mathbb{R}^n$ de Sabit Oranlı Yüzeyler.....         | 30    |
| 4.2. $\mathbb{R}^3$ de Sabit Oranlı Yüzeyler .....        | 31    |
| 4.3. $\mathbb{R}^3$ de Sabit Oranlı Dönel Yüzeyler .....  | 31    |
| KAYNAKLAR .....                                           | 37    |
| EKLER.....                                                | 38    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                            | 40    |

## SİMGELER DİZİNİ

| Simgeler           | Açıklama                                |
|--------------------|-----------------------------------------|
| $\mathbb{R}^n$     | n-boyutlu Öklit uzayı                   |
| $\gamma$           | Eğri                                    |
| $V_i$              | Frenet vektörleri                       |
| $\kappa_i$         | Frenet eğrilikleri                      |
| $\  \cdot \ $      | Norm                                    |
| $X$                | Regüler yama                            |
| $M$                | Yüzey                                   |
| $I$                | 1. temel form                           |
| $c_i$              | i-nci fokal eğrilik                     |
| $\phi_d$           | d-nci oskulator uzay                    |
| $\chi(M)$          | M nin teğet vektör alanlarının uzayı    |
| $\chi^\perp(M)$    | M nin normal vektör alanlarının uzayı   |
| $\nabla$           | M üzerinde afin koneksiyon              |
| $\tilde{\nabla}$   | $\tilde{M}$ üzerinde afin koneksiyon    |
| $\nabla^\perp$     | Normal koneksiyon                       |
| $\langle, \rangle$ | $\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu |
| $h$                | İkinci temel form                       |
| $A_\xi$            | Şekil operatörü                         |
| $T_p M$            | p noktasında teğet uzay                 |
| $T_p^\perp M$      | p noktasında normal uzay                |
| $N_i$              | Normal vektörleri                       |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                              | Sayfa |
|--------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 3.2.1. Sabit Oranlı Düzlemsel Eğri .....               | 12    |
| Şekil 3.3.1. Sabit Oranlı Küresel Uzay Eğrisi.....           | 15    |
| Şekil 3.3.2. Sabit Oranlı Uzay Eğrisi .....                  | 17    |
| Şekil 4.3.1. $c=1$ Halinde Sabit Oranlı Dönel Yüzeyler ..... | 35    |

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı  $\mathbb{R}^n$  deki sabit oranlı eğriler ve yüzeylerin bir sınıflandırmasını vermektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlar olup iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda  $\mathbb{R}^{n+1}$  deki bazı özel eğriler ele alınmıştır. Özellikle,  $\mathbb{R}^{n+1}$  deki sabit eğrilikli eğriler ve eğrilikleri oranı sabit olan eğriler incelenmiştir. Bu tür eğrilerin parametrik gösterimleri ve eğrilikleri verilmiştir. İkinci kısımda  $\mathbb{R}^n$  deki yüzeyler ile ilgili temel kavramlar tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde  $\mathbb{R}^n$  deki sabit oranlı eğriler ve bunların bir karakterizasyonu verilmiştir. İlk kısımda  $\mathbb{R}^n$  deki sabit oranlı eğriler ile ilgili temel tanım ve bilinen sonuçlar verilmiştir. İkinci kısımda sabit oranlı düzlemsel eğriler ve bunlar ile ilgili bazı örnekler verilmiştir. Üçüncü kısımda ise sabit oranlı uzay eğrileri ilgili sonuçlar ve bazı örnekler verilmiştir. Bu bölümün son kısmı tamamen orijinal sonuçlar içermektedir. Özellikle  $\mathbb{R}^{n+1}$  deki Gergin eğriler tanıtılmış, bu eğrilerin T-sabit ve N-sabit olmaları incelenmiştir. Bu tür eğrilerin 1. çeşit ve 2. çeşit T-sabit yada N-sabit olmalarıyla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu eğrilerin  $\mathbb{R}^3$  ve  $\mathbb{R}^4$  deki sonuçları irdelenmiştir.

Dördüncü bölümde  $\mathbb{R}^n$  deki sabit oranlı yüzeyler ile ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Ayrıca bu tür yüzeylerin  $\mathbb{R}^3$  deki sonuçları irdelenmiştir. Uygulama olarak dönel yüzeylerin sabit oranlı olmalarıyla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.0. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda  $\mathbb{R}^{n+1}$  deki eğriler ve onların Frenet denklemleri ve eğrilikleri ile ilgili temel eşitlikler verilmiştir. İkinci kısımda ise  $\mathbb{R}^n$  de regüler yüzey yamasının Gauss ve Weingarten eşitlikleri ile ilgili temel tanımlar verilmiştir.

### 2.1. Frenet Çatısı ve Eğrilikleri

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  regüler parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde  $\forall t \in I$  için  $\gamma$  nin yüksek mertebeden türevleri  $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$ ,  $(d \leq n+1)$  lineer bağımsız ve  $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t), \gamma^{(d+1)}(t)$  lineer bağımlı ise  $\gamma$  eğrisine ***d-ranklı Frenet eğrisi*** adı verilir. Bu durumda d-ranklı bir Frenet eğrisi  $\mathbb{R}^{n+1}$  in d-boyutlu alt uzayında yatacaktır.  $\mathbb{R}^{n+1}$  in d-boyutlu alt uzayını  $\phi_d(t)$  ile gösterilsin. Bu alt uzay  $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$  vektörleri ile gerildiğinden  $\phi_d(t)$  ye  $\gamma$  eğrisinin ***d. nci oskülatör uzayı*** denir. Açık olarak  $\phi_1(t) \subset \phi_2(t) \subset \dots \subset \phi_d(t)$  dir.

Eğer  $\gamma$ , d-ranklı bir Frenet eğrisi ise  $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$  vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulanarak  $N_0(t), N_1(t), \dots, N_{d-1}(t)$  ortonormal d-çatısı (Serret-Frenet Vektörleri) elde edilir. Yani;

$$E_1(t) = \gamma'(t), N_0(t) = T = \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|}$$

$$E_2(t) = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), E_1(t) \rangle \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|^2} \quad (2.1.1)$$

$$N_{k-1}(t) = \frac{E_k(t)}{\|E_k(t)\|}, \quad 2 \leq k \leq d$$

dir (Gluck 1966).

**Tanım 2.1.1.:**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  regüler bir eğri olsun. Eğer  $\gamma$  eğrisinin yüksek mertebeden türevleri  $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n+1)}(t)$  lineer bağımsız ise  $\gamma$  ya *cenerik eğri* (yada *oskulator mertebesi n olan eğri*) denir (Vargas 2005).

**Teorem 2.1.2.:**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere  $\gamma$  nın ortonormal çatısı  $N_0(t), N_1(t), \dots, N_{d-1}(t)$  nin türevleri  $v(t) = \|\gamma'(t)\|$  için

$$\begin{aligned} T'(t) &= N'_0(t) = v(t)\kappa_1(t)N_1(t) \\ N'_i(t) &= -v(t)\kappa_i(t)N_{i-1}(t) + v(t)\kappa_{i+1}(t)N_{i+1}(t) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

( $2 \leq i \leq d-1$ ) dir. Burada  $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $\gamma$  nın Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır.

**Sonuç 2.1.3.:**  $N_0(t), N_1(t), \dots, N_{d-1}(t)$  vektörlerine **Frenet d-çatısı** ve (2.1.2) deki eşitliklere de **Frenet denklemleri** adı verilir. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\begin{bmatrix} T'(t) \\ N'_1(t) \\ \dots \\ N'_{d-1}(t) \end{bmatrix} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & . & . & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & . & . \\ . & -\kappa_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & \kappa_{d-1} \\ 0 & . & . & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_{d-1} \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

**Açıklama 2.1.4.:**  $\gamma$  eğrisinin hız fonksiyonu  $v(t) = \|\gamma'(t)\| = 1$  ise  $\gamma$  eğrisine birim hızlı eğri denir. Birim hızlı bir eğrinin parametresi yay-parametresi olup  $s$  ile gösterilir.

**Teorem 2.1.5.:**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$   $d$ -ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisinin ortonormal çatısı

$N_0(t), N_1(t), \dots, N_{d-1}(t)$  için

$$E_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{j < k} \langle \gamma^{(k)}(t), N_j(t) \rangle N_j(t) \quad (2.1.4)$$

olmak üzere

$$\kappa_k(s) = \frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\| \|E_1\|}, \quad 1 \leq k \leq d-1 \quad (2.1.5)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Tanım 2.1.6.:**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  cenerik bir eğri olsun.  $\gamma$  eğrisinin oskulator kürelerinin merkezleri

$$C_\gamma(s) = \gamma(s) + \sum_{i=2}^{n+1} c_i(s) N_i(s) \quad (2.1.6)$$

şeklinde bir parametrelendirme ile ifade edilir ve bunlara  $\gamma$  nin genelleştirilmiş evolütü (Fuster ve ark. 1999) (yada fokal eğrisi (Vargas 2005)) adı verilir. Burada  $c_i$  fonksiyonları  $\gamma$  nın  $i$ -inci fokal eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılır.

Şu andan itibaren fokal eğri deyince genelleştirilmiş evolüt anlaşılacaktır.

**Önerme 2.1.7.:**  $\mathbb{R}^{n+1}$  de  $s$ -yay parametresi ile parametrelendirilmiş  $\gamma$  eğrisinin fokal eğrilikleri,  $c_n \neq 0$  için aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlar:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ \vdots \\ c'_{n-2} \\ c'_{n-1} \\ c'_n - \frac{(R_n^2)'}{2c_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & & & \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & 0 & \kappa_{n-1} & 0 \\ & & & & -\kappa_{n-1} & 0 & \kappa_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

Eğer eğri küresel ise bu taktirde eşitliğin sol tarafının son bileşeni sadece  $c'_n$  teriminden ibaret olur (Vargas 2005).

Bu ise

$$\begin{aligned} 1 &= \kappa_1 c_1 \\ c'_1 &= \kappa_2 c_2 \\ c'_2 &= -\kappa_2 c_1 + \kappa_3 c_3 \\ &\vdots \\ c'_{n-1} &= -c_{n-2} \kappa_{n-1} + c_n \kappa_n \end{aligned} \quad . \quad (2.1.8)$$

olması demektir. Böylece  $C'_\gamma = (c'_n + c_{n-1} \kappa_n) N_n$  dir. Oskülatör hiper kürenin yarıçapı  $R_n$  olmak üzere  $R_n^2 = \|C_\gamma - \gamma\|^2$  dir.

**Teorem 2.1.8.:**  $n \geq 1$  olmak üzere  $\mathbb{R}^{n+1}$  de yay-parametresi ile parametrelendirilmiş cenerik bir eğrinin küresel olması için gerek ve yeter koşul söz konusu noktada  $c'_n + c_{n-1} \kappa_n = 0$  eşitliğinin sağlanmasıdır. (Vargas 2005).

## 2.2. $\mathbb{R}^n$ de Yüzeyler

$M$  yüzeyi  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  yaması ile verilsin.  $M$  nin  $p \in X(u, v)$  noktasındaki teğet uzayı  $T_p(M)$ ,  $X_u$  ve  $X_v$  ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece  $M$  nin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.2.1)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

1. temel form katsayıları olup  $\langle, \rangle$  bir Öklit iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.2.3}$$

elde edilir. Eğer  $X_u \times X_v \neq 0$  ise  $X(u, v)$  yaması regülerdir denir (Gray 1993).

Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe  $X(u, v)$  yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.2.4}$$

ile gösterilecektir.

**Tanım 2.2.1.:**  $M \subset \mathbb{R}^n$  yüzeyi  $X(u, v)$  regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun.  $\mathbb{R}^n$  de Riemann koneksiyonu  $\tilde{\nabla}$  ile gösterilsin. Bu durumda  $\forall X, Y \in \chi(M)$  lokal vektör alanları için  $M$  yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu  $\nabla$  olmak üzere  $M$  nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M); h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \tag{2.2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.5) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

**Tanım 2.2.2.:**  $M \subset \mathbb{R}^n$  yüzeyi  $X(u, v)$  regüler yaması ile verilsin.  $\forall X \in \chi(M)$  ve  $\xi \in \chi^\perp(M)$  için  $M$  nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_\xi X = -\tilde{\nabla}_X \xi + \nabla_X^\perp \xi \tag{2.2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $A_\xi X$ ,  $\xi$  ya karşılık gelen şekil operatörü ve  $\nabla^\perp$  ise  $\chi^\perp(M)$  normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi  $X, Y \in T_p(M)$  için

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \tag{2.2.7}$$

dir. Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.6) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

### 3. $\mathbb{R}^n$ DE SABİT ORANLI EĞRİLER

#### 3.0. Giriş

Bu bölümde  $n$ -boyutlu Öklit uzayı  $\mathbb{R}^n$  deki eğriler ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda  $\mathbb{R}^n$  deki sabit oranlı eğriler ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci kısımda  $\mathbb{R}^n$  deki sabit eğriler ile ilgili temel sonuçlar verilmiştir.

### 3.1. $\mathbb{R}^n$ de Sabit Oranlı Eğriler

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere  $\gamma(I)$  eğrisinin pozisyon vektörü

$$\gamma(s) = \gamma^T(s) + \gamma^N(s) \quad (3.1.1)$$

biçiminde teğet ve normal bileşenlerin bir ayrışımı olarak yazılabilir (Chen 2001).

**Tanım 3.1.1.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim hızlı regüler bir eğri olsun.  $\gamma$  eğrisinin teğet ve normal bileşenlerinin uzunlukları sırasıyla  $\|\gamma^T(s)\|$  ve  $\|\gamma^N(s)\|$  olmak üzere  $\|\gamma^T(s)\|$  ile  $\|\gamma^N(s)\|$  nin oranı sabit ise  $\gamma$  eğrisine *sabit oranlı eğri* denir (Chen 2001).

**Tanım 3.1.2.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim hızlı regüler bir eğri olsun.  $\gamma$  eğrisinin teğet ve normal bileşenlerinin uzunlukları  $\|\gamma^T(s)\|$  ve  $\|\gamma^N(s)\|$  sabit ise  $\gamma$  eğrisine sırasıyla *T-sabit yada N-sabit eğri* adı verilir (Chen 2001).

**Yardımcı Teorem 3.1.3.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim hızlı regüler bir eğri olsun.  $\gamma$  eğrisinin uzaklık fonksiyonu  $\rho = \|\gamma\|$  olmak üzere  $\|grad\rho\| = c$ ,  $c \in [0, 1]$  olması için gerek ve yeter koşul  $\|\gamma^T\| = c\|\gamma\|$  olmasıdır.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisinin uzaklık fonksiyonu  $\rho(s) = \|\gamma(s)\|$  nin gradiyenti

$$grad\rho = \frac{d\rho}{ds} \gamma'(s) = \frac{\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle}{\|\gamma(s)\|} \gamma'(s) \quad (3.1.2)$$

dir. Bununla birlikte  $\gamma$  eğrisi birim hızlı olduğundan

$$grad\rho = \frac{\langle \gamma(s), e_1 \rangle}{\|\gamma(s)\|} e_1 \quad ; \quad e_1 = \gamma'(s) \quad (3.1.3)$$

dir. Böylece

$$\|grad\rho\|^2 = \frac{(\langle \gamma(s), e_1 \rangle)^2}{\|\gamma(s)\|^2}$$

elde edilir. Son eşitlik yardımıyla  $\|grad\rho\| = c$  olması için  $\|\gamma^T\| = c\|\gamma\|$  olması gerekmektedir.  $\square$

Sonuç olarak  $\|\gamma^T\| \leq \|\gamma\|$  olduğundan  $\|grad\rho\| = c \Rightarrow c \leq 1$  olmalıdır.

**Önerme 3.1.4.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim hızlı regüler eğrisinin sabit oranlı bir eğri yani  $\|\gamma^T(s)\|$  ile  $\|\gamma^N(s)\|$  nin oranları sabit olması için gerek ve yeter koşul  $\|grad\rho\| = c$  şartının sağlanmasıdır.

**İspat.** ( $\Leftarrow$ ):  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eğrisi  $\|grad\rho\| = c$  şartını sağlayan birim hızlı bir regüler eğri olsun. Bu taktirde Yardımcı Teorem 3.1.3 den  $\|\gamma^T\| = c\|\gamma\|$  olduğu görülür. Böylece (3.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|\gamma^T\|^2 &= c^2 \|\gamma\|^2 \\ \langle \gamma^T, \gamma^T \rangle &= c^2 (\langle \gamma^T, \gamma^T \rangle + \langle \gamma^N, \gamma^N \rangle) \\ \langle \gamma^T, \gamma^T \rangle (1 - c^2) &= \langle \gamma^N, \gamma^N \rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\|\gamma^T(s)\|$  ile  $\|\gamma^N(s)\|$  nin oranlarının sabit olduğu görülür.

( $\Rightarrow$ ): Benzer şekilde verilebilir.  $\square$

**Sonuç 3.1.5.:** Bazı  $c \in [0,1]$  için  $\|grad\rho\| = c$  şartı sağlanırsa

$$\|\gamma(s)\| = cs + b \quad (3.1.4)$$

dır (Chen 2003).

**İspat.**  $\|grad\rho\| = c$  şartı sağlanırsa

$$\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle' = 2c \sqrt{\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle} \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Bu nedenle  $\rho = \sqrt{\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle}$  olduğundan (3.1.2) eşitliğinden  $\rho'(s) = c$  elde edilir. Böylece  $\|grad\rho\| = c$  şartının sağlanması için gerek ve yeter koşul  $\|\gamma(s)\| = cs + b$  olmasıdır.  $\square$

Şimdi aşağıdaki bazı özel durumları inceleyelim:

**i)  $c = 0$  durumu:**

(3.1.4) eşitliğinde  $c = 0$  alınırsa  $\|\gamma(s)\| = b$  elde edilir. Buradan  $\gamma(I)$  eğrisinin orjin merkezli  $b$  yarıçaplı hiperküre üzerinde yatan bir eğri olduğu sonucuna varılır.

**ii)  $c = 1$  durumu :**

$c = 1$  alalım. Bu durumda  $\gamma(s)$  orjinden geçen doğrunun bir parçası olur.

**iii)  $0 < c < 1$  durumu:**

$\|grad\rho\| = c$  şartı  $c \in (0,1)$  için sağlansın. Bu durumda (3.1.4) eşitliğinden

$$\gamma(s) = csY(s) \quad (3.1.6)$$

tanımlanabilir. Burada  $Y(s)$  birim vektördür.

O halde (3.1.6) den  $\gamma'(s) = cY(s) + csY'(s)$  bulunur. Buradan  $\gamma$  eğrisi birim hızlı olduğundan

$$1 = \|\gamma'(s)\|^2 = c^2 (1 + s^2 \|Y'(s)\|^2)$$

dir. Böylece  $\|Y'(s)\| = \sqrt{\frac{1-c^2}{cs}}$  elde edilir. O halde  $u = \sqrt{\frac{1-c^2}{s}} \ln s$  parametre değişimi yardımıyla  $Y(u)$  nun  $\mathbb{R}^n$  nin orjin merkezli hiperküre üzerinde yatan bir eğri olduğu sonucuna varılır.

Böylece B.Y.Chen'in aşağıdaki sonucu elde edilir.

**Teorem 3.1.6:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  birim hızlı regüler bir eğri olsun. O halde bazı  $c \in [0,1]$  sabiti için  $\|grad \rho\| = c$  şartı sağlanması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç durumdan birinin sağlanmasıdır.

- i)  $\gamma(I)$  orjin merkezli hiperküre üzerinde yatan bir eğridir.
- ii)  $\gamma(I)$   $\mathbb{R}^n$  nin orjinden geçen doğrusunun bir açık parçasıdır.
- iii)  $\gamma(s) = csY(u)$ ,  $c \in (0,1)$ ,  $u = \sqrt{\frac{1-c^2}{s}} \ln s$  dir. Burada  $Y(u)$   $\mathbb{R}^n$  nin orjin merkezli hiperküre üzerinde yatan bir eğridir.

### 3.2. Sabit Oranlı Düzlemsel Eğriler

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  birim hızlı regüler bir eğrisi olsun. O halde (3.1.5) eşitliğinden

$$\langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle^2 = c^2 \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \quad (3.2.1)$$

dir. Böylece  $\gamma'(s) = V_1(t)$  yardımıyla

$$\langle V_1(t), \gamma(s) \rangle^2 = c^2 \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Buradan (3.2.2) nin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\langle V_1(t), \gamma(s) \rangle (\langle V_1'(t), \gamma(s) \rangle + \langle V_1(t), V_1(t) \rangle) = c^2 \langle V_1(t), \gamma(s) \rangle$$

dir. Buradan

$$\langle V_1(t), \gamma(s) \rangle \{ \langle V_1'(t), \gamma(s) \rangle + 1 \} = \langle V_1(t), \gamma(s) \rangle \cdot c^2$$

bulunur. Buradan

$$\langle V_1'(t), \gamma(s) \rangle + 1 = c^2 \quad (3.2.3)$$

dir. Böylece  $\gamma$  düzlemsel eğrisinin Frenet denklemi  $V_1'(s) = \kappa(s)V_2(s)$  kullanılarak

$$\kappa(s)\langle V_2(s), \gamma(s) \rangle = c^2 - 1$$

(3.2.4)

elde edilir. Ayrıca (3.2.4) denkleminin  $s$  yay parametresine göre türevi alınır

$$\kappa'(s)\langle V_2(s), \gamma(s) \rangle + \kappa(s)\{\langle V_2'(s), \gamma(s) \rangle + \langle V_2(s), V_1'(s) \rangle\} = 0$$

bulunur. O halde  $V_2'(s) = -\kappa(s)V_1(s)$  Frenet denklemi yardımıyla

$$\kappa'(s)\langle V_2(s), \gamma(s) \rangle - \kappa^2(s)\langle V_1(s), \gamma(s) \rangle + \kappa(s)\langle V_2(s), V_1(s) \rangle = 0$$

dir. Ayrıca  $\langle V_2(s), V_1(s) \rangle = 0$  olduğundan

$$\langle \gamma(s), V_1(s) \rangle = \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \langle \gamma(s), V_2(s) \rangle \quad (3.2.5)$$

elde edilir. Böylece (3.2.4) eşitliği (3.2.5) de yerine yazılırsa

$$\langle \gamma(s), V_1(s) \rangle = \frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} (c^2 - 1) \quad (3.2.6)$$

bulunur. (3.2.6) nın  $s$  ye göre türevi alınır

$$\langle \gamma'(s), V_1(s) \rangle + \langle V_1'(s), \gamma(s) \rangle = \left( \frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} \right)' (c^2 - 1)$$

bulunur. Böylece Frenet denklemleri yardımıyla

$$1 + \kappa(s)\langle V_2(s), \gamma(s) \rangle = \left( \frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} \right)' (c^2 - 1)$$

elde edilir. Buradan (3.2.4) yardımıyla

$$\left( \frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} \right)' = \frac{c^2}{c^2 - 1} \quad (3.2.7)$$

eşitliği bulunur. Bu diferansiyel denklem

$$\kappa''\kappa - (3\kappa')^2 - b^2\kappa^4 = 0, \frac{c^2}{c^2 - 1} = b^2 \quad (3.2.8)$$

biçimine dönüşür. Bu denklemin Maple yardımıyla çözümünden

$$\kappa(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{-b^2s^2 + 2ds - 2e}}$$

elde edilir. Burada  $d, e \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{c^2}{c^2 - 1} = b^2$  reel sabitlerdir (bkz. Ek1) .

Böylece B.Y.Chen in aşağıdaki teoremi elde edilir:

**Teorem 3.2.1:**  $\gamma \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  birim hızlı regüler bir eğri olsun. O halde  $\gamma$  eğrisi  $\|grad\rho\| = c$  şartını sağlarsa

$$\kappa^2(s) = \frac{1 - c^2}{c^2(s^2 + b)}$$

dir (Chen 2003).

**Örnek 3.2.2.:** Öklit düzlemde birim hızlı, regüler bir  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \left( \int \cos(\theta(s)) ds + c, \int \sin(\theta(s)) ds + d \right) \quad (3.2.9)$$

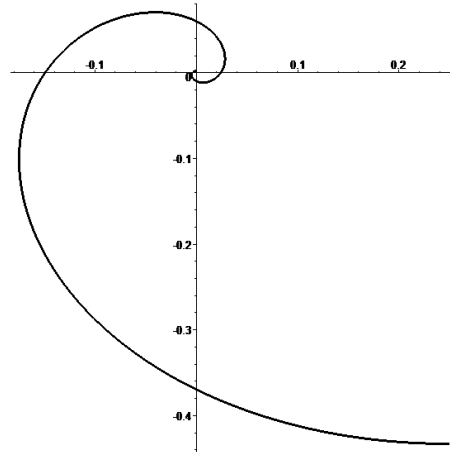
şeklinde tanımlanır. Burada  $c, d \in \mathbb{R}$  integral sabitleri ve

$$\theta(s) = \int \kappa(s) ds$$

dir. Böylece (3.2.8) denklemi ile verilen eğrinin sabit oranlı olması için Teorem 3.2.1

gereği  $\alpha$  eğrisinin eğriliği  $\kappa(s) = \pm \sqrt{\frac{1-c^2}{c^2(s^2+b)}}$  şartını sağlamalıdır. Buradan  $b = 0$

$c = \frac{1}{2}$  alınarak  $\alpha$  eğrisinin grafiği Maple komutu yardımıyla çizdirilirse Şekil 3.2.1 deki eğri elde edilir (bkz. Ek 2).



Şekil 3.2.1. Sabit oranlı düzlemsel eğri

**Önerme 3.2.3:** Düzlemde

$$\gamma(s) = (r(s) \cos s, r(s) \sin s)$$

parametrik denklemi ile verilen birim hızlı eğri sabit oranlı ise  $\gamma$  eğrisi bir çember belirtir.

**İspat.**  $\gamma$  nın hız vektörü

$$\gamma'(s) = (r'(s) \cos s - r(s) \sin s, r'(s) \sin s + r(s) \cos s)$$

dır. Farz edelim ki  $\gamma(s)$  eğrisi sabit oranlı olsun. O halde  $\|grad\rho\| = c^2$  eşitliğini

sağlar. Böylece (3.2.1) eşitliği yardımıyla

$$\langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle = c \|\gamma(s)\|$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle &= r(s)r'(s) \\ \|\gamma(s)\| &= r(s)\end{aligned}$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$rr' - cr = 0 \quad (3.2.10)$$

elde edilir. Buradan  $r \neq 0$  olduğundan  $r(r' - c) = 0$  dan  $r' = c$  bulunur. Ayrıca  $\gamma$  birim hızlı olduğundan

$$\|\gamma'(s)\|^2 = (r')^2 + r^2 = 1$$

dir. Bu denklemde  $r' = c$  yerine yazılırsa  $r^2 = 1 - c^2$  bulunur. Böylece

$$r = \sqrt{1 - c^2}$$

olduğundan  $\gamma(s)$  bir çember belirtir. Buradan  $r$  nin türevinden  $r' = c = 0$  bulunur.

Bu da bizi Teorem 3.1.6 in (i) sonucuna ulaştırır.  $\square$

### 3.3. Sabit Oranlı Uzak Eğrileri

$\mathbb{R}^3$  de

$$\gamma(s) = (f(s) \cos s, f(s) \sin s, g(s)) \quad (3.3.1)$$

parametresi ile verilen regüler bir eğri olsun. O halde (3.1.5) yardımıyla

$$\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle^2 = c^2 \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle$$

dir. Buradan  $\gamma$  nın  $s$  ye göre türevinden

$$\gamma'(s) = (f'(s) \cos s - f(s) \sin s, f'(s) \sin s + f(s) \cos s, g'(s))$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle &= ff' + gg' \\ \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle &= f^2 + g^2\end{aligned}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlikten

$$(ff' + gg')^2 = c^2(f^2 + g^2)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Önerme 3.3.1.:** (3.3.1) parametrelendirmesi ile verilen uzak eğrisinin sabit oranlı olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}(f(s)f'(s) + g(s)g'(s))^2 &= c^2(f(s)^2 + g(s)^2) \\ (f(s))^2 + (f'(s))^2 + (g'(s))^2 &= 1\end{aligned} \quad (3.3.2)$$

denklem sisteminin sağlanmasıdır.

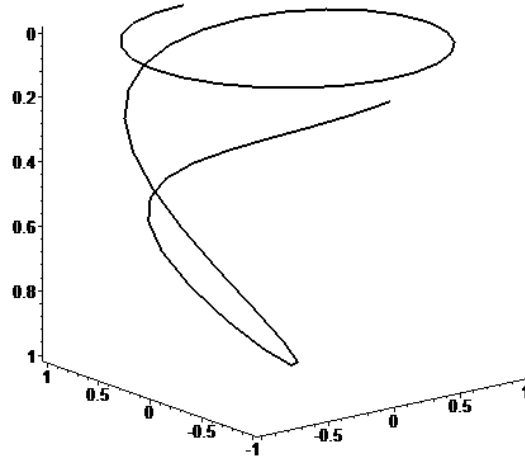
**Örnek 3.3.2.:**  $\mathbb{R}^3$  deki (3.3.1) parametrelendirmesiyle verilen uzay eğrisi birim hızlı ve  $S^2(1)$  de yatan küresel bir eğri ise bu taktirde  $\|\gamma(s)\|^2 = 1$  ve  $\|\gamma'(s)\|^2 = 1$  dir. Buradan

$$\begin{aligned} (f(s))^2 + (g(s))^2 &= 1 \\ (f(s))^2 + (f'(s))^2 + (g'(s))^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin Maple yardımıyla çözümünden

$$f(s) = \pm \tanh(s + a), \quad g(s) = \pm \sqrt{1 - (f(s))^2} = \pm \operatorname{sech}(s + a) \quad (3.3.4)$$

elde edilir (Bulca 2012). Böylece (3.3.4) parametrelendirmesiyle verilen uzay eğrisi sabit oranlıdır. Bu eğrinin grafiği  $a=3$  değeri için Şekil 3.3.1 de verilmiştir (bkz. Ek 3).



Şekil 3.3.1. Sabit oranlı küresel uzay eğrisi

**Sonuç 3.3.3:**  $\mathbb{R}^3$  de

$$\gamma(s) = (r(s) \cos(f(s)), r(s) \sin(f(s)), as) \quad (3.3.5)$$

parametrelendirmesi ile verilen eğri sabit oranlı ise

$$\begin{aligned} (rr' + a^2 s)^2 &= c^2 (r^2 + a^2 s^2) \\ (r')^2 + r^2 (f')^2 + a^2 &= 1 \end{aligned}$$

dir.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisinin türevinden

$$\gamma'(s) = (r' \cos(f(s)) - r \sin(f(s))f'(s), r' \sin(f(s)) + r \cos(f(s))f'(s), a)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle &= a^2 + (r')^2 \cos^2(f(s)) + r^2 (f')^2 \sin^2(f(s)) - 2rr'f' \sin(f(s)) \cos(f(s)) \\
&\quad + (r')^2 \sin^2(f(s)) + r^2 (f')^2 \cos^2(f(s)) + 2rr'f' \sin(f(s)) \cos(f(s)) \\
&= (r')^2 + r^2 (f')^2 + a^2, \\
\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle &= r^2 \cos^2(f(s)) + r^2 \sin^2(f(s)) + a^2 s^2 = r^2 + a^2 s^2, \\
\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle &= rr' \cos^2(f(s)) \\
&\quad - r^2 f' \sin(f(s)) \cos(f(s)) \\
&\quad + rr' \sin^2(f(s)) + r^2 f' \sin(f(s)) \cos(f(s)) + a^2 s \\
\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle &= rr' + a^2 s
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitlikler (3.1.5) de yerine yazılırsa

$$(rr' + a^2 s)^2 = c^2 (r^2 + a^2 s^2)$$

bulunur. Bununla birlikte  $\gamma$  eğrisi birim hızlı olduğundan

$$(r')^2 + r^2 (f')^2 + a^2 = 1$$

denklem sistemi elde edilir  $\square$ .

Sonuç 3.3.3 ün özel bir çözümü

$$\begin{aligned}
r(s) &= \sqrt{c^2 + a^2} s \\
f(s) &= \frac{\sqrt{1-c^2}}{c^2 - a^2} \ln s
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

dir. Böylece B.Y. Chen'in aşağıdaki örneği bu tür eğrilere güzel örnek oluşturur.

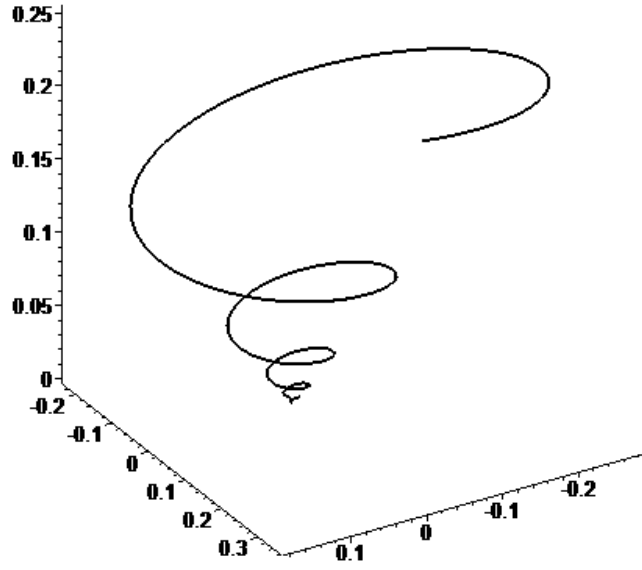
**Örnek 3.3.4.:**  $\mathbb{R}^3$  de

$$\gamma(s) = \left( \sqrt{c^2 - a^2} s \sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c^2 - a^2} \ln s\right), \sqrt{c^2 - a^2} s \cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c^2 - a^2} \ln s\right), as \right) \tag{3.3.7}$$

$c \in (0,1), 0 \leq a < c < 1$  parametrelendirilmesiyle verilen eğri  $\|grad\rho\| = c$  şartını

sağlayan bir uzay eğrisidir (Chen 2003). Bu eğrinin grafiği  $c = \frac{1}{2}$  ve  $a = \frac{1}{4}$  değerleri

için Şekil 3.3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.3.2. Sabit oranlı uzay eğrisi

### 3.4. $\mathbb{R}^{n+1}$ de Gergin Eğriler

$\mathbb{R}^{n+1}$  de birim hızlı bir  $\gamma$  eğrisinin Frenet çatısı  $T(s), N_1(s), N_2(s), \dots, N_n(s)$  ve Frenet eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1(s), \dots, \kappa_n(s)$  olsun. Genelliği bozmadan  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  noktasında

$$\vec{\gamma}(s) = m_0 T + m_1 N_1 + m_2 N_2 + \dots + m_n N_n \quad (3.4.1)$$

biçiminde bir parametrelendirmesi seçilebilir. Burada  $m_i$  ler türevlenebilir fonksiyonlardır. Biz (3.4.1) parametrelendirmesiyle verilen eğrileri **gergin eğriler (tight curves)** olarak adlandıracğız.

$\gamma$  eğrisi gergin eğri olsun. Böylece (3.4.1) den

$$\gamma(s) = m_0 T + \sum_{i=1}^n m_i N_i \quad (3.4.2)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma^T(s) &= m_0 T \\ \gamma^N(s) &= \sum_{i=1}^n m_i N_i \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

ayrışımı tanımlanabilir. Eğer  $\gamma$  nın  $s$  ye göre türevi alınır ve (2.1.3) Frenet denkleminde yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) = & (m'_0 - \kappa_1 m_1)T \\
& + (m'_1 - \kappa_2 m_2 + \kappa_1 m_0)N_1 \\
& + (m'_2 - \kappa_3 m_3 + \kappa_2 m_1)N_2 \\
& + (m'_3 - \kappa_4 m_4 + \kappa_3 m_2)N_3 \\
& \dots \\
& + (m'_{n-1} - \kappa_n m_n + \kappa_{n-1} m_{n-2})N_{n-1} \\
& + (m'_n + \kappa_n m_{n-1})N_n
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

elde edilir. Buradan  $\gamma$  eğrisi birim hızlı olduğundan

$$\begin{aligned}
m'_0 - \kappa_1 m_1 &= 1 \\
m'_1 - \kappa_2 m_2 + \kappa_1 m_0 &= 0 \\
m'_2 - \kappa_3 m_3 + \kappa_2 m_1 &= 0 \\
m'_3 - \kappa_4 m_4 + \kappa_3 m_2 &= 0 \\
&\dots \\
m'_{n-1} - \kappa_n m_n + \kappa_{n-1} m_{n-2} &= 0 \\
m'_n + \kappa_n m_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.4.1.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eğrisinin gergin olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
m'_0 - \kappa_1 m_1 &= 1 \\
m'_1 - \kappa_2 m_2 + \kappa_1 m_0 &= 0 \\
m'_2 - \kappa_3 m_3 + \kappa_2 m_1 &= 0 \\
m'_3 - \kappa_4 m_4 + \kappa_3 m_2 &= 0 \\
&\dots \\
m'_{n-1} - \kappa_n m_n + \kappa_{n-1} m_{n-2} &= 0 \\
m'_n + \kappa_n m_{n-1} &= 0
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Şimdi  $n=1$  durumunu inceleyelim;

**Tanım 3.4.2.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gergin bir eğri ise bu takdirde (3.4.2) eşitliğinden  $\gamma$  eğrisi  $\gamma(s)$  noktasında

$$\gamma(s) = m_0 T + m_1 N_1 \tag{3.4.6}$$

biçiminde bir parametrelendirmeye sahiptir.

**Önerme 3.4.3.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin gergin olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} m'_0 - \kappa_1 m_1 &= 1 \\ m'_1 + \kappa_1 m_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

olmasıdır.

**Sonuç 3.4.4.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  birim hızlı gergin bir eğri olsun. Eğer  $m_0 = \text{sbt.}$  ise bu taktirde  $\gamma$  eğrisi eğriliği

$$\kappa(s) = e^{m_0 s + b}$$

olan bir eğridir.

**İspat.**  $m_0 = \text{sbt.}$  olsun. Bu taktirde (3.4.7) eşitliği yardımıyla  $\frac{\kappa'}{\kappa} = m_0$  dir. Bu denklemin çözümünden istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.4.5.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  birim hızlı gergin bir eğri olsun. Eğer  $m_1 = \text{sbt.}$  ise bu taktirde  $\gamma$  eğrisi ya düz bir doğru ya da bir çemberdir.

**İspat.**  $m_1 = \text{sbt.}$  olsun bu taktirde (3.4.7) eşitliği yardımıyla  $\kappa m_0 = 0$  dir. Eğer  $m_0 = 0$  ise  $\gamma$  eğrisi bir çember belirtir. Diğer durumda ise bir doğru belirtir.

Şimdi  $n=2$  durumunu inceleyelim;

**Tanım 3.4.6.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gergin bir eğri ise bu taktirde (3.4.2) eşitliğinden  $\gamma$  eğrisi  $\gamma(s)$  noktasında

$$\gamma(s) = m_0 T + m_1 N_1 + m_2 N_2 \quad (3.4.8)$$

biçiminde bir parametrelendirmeye sahiptir.

**Önerme 3.4.7.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin gergin olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}m'_0 - \kappa_1 m_1 &= 1 \\m'_1 - \kappa_2 m_2 + \kappa_1 m_0 &= 0 \\m'_2 + \kappa_2 m_1 &= 0\end{aligned}$$

olmasıdır. Eğer  $m_1 = 0$  ise bu eğriler

$$\gamma(s) = m_0 T + m_2 N_2 \quad (3.4.9)$$

dir. Bu eğriler **rektifiyen eğri** olarak bilinir (Chen 2003). Rektifiyen eğrilerin bir sınıflandırılması B.Y. Chen tarafından verilmiştir.

**Teorem 3.4.8.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  birim hızlı rektifiyen bir eğri olsun. Bu taktirde

- i)  $\rho = \|\gamma(s)\|$  uzaklık fonksiyonu  $\rho^2 = s^2 + a_1 s + a_2$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $\langle \gamma(s), T(s) \rangle = s + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,
- iii)  $\|\gamma^N(s)\| = \text{sbt.}$ ,  $\rho = \|\gamma(s)\| \neq \text{sbt.}$  dir. Bu durumda  $\gamma$  eğrisi N-sabit bir eğridir.

#### 3.4.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ de T-Sabit Gergin Eğriler

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  gergin eğrisi

$$\gamma(s) = m_0 T + \sum_{i=1}^n m_i N_i$$

parametrik denklemi ile verilen T-sabit bir eğri olsun. Bu taktirde

$$\gamma^T(s) = m_0 T$$

vektörünün normu  $\|\gamma^T(s)\|$  sabit olacağından aşağıdaki iki durum söz konusudur;

**I. Durum:**  $\gamma^T(s) = 0$ , (yani  $m_0 = 0$ ),

**II. Durum:**  $\|\gamma^T(s)\| = \text{sbt.}$  (yani,  $0 \neq m_0 = \text{sbt.}$ )

Bu tür eğriler sırasıyla **1. çeşit ve 2.çeşit T-sabit eğriler** olarak adlandırılacaktır.

Şimdi bu durumları sırasıyla inceleyelim;

**I. Durum:**  $\gamma^T(s)=0$ , (yani  $m_0=0$ ) olsun. Bu durumda  $\gamma$  eğrisi 1. çeşit T-sabit eğridir. Bu taktirde (3.4.2) den

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^n m_i N_i \quad (3.4.1.1)$$

dir. Böylece (3.4.5) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Önerme 3.4.1.1.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eğrisi (3.4.2) parametrelendirmesiyle ile verilen birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 1. çeşit T-sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} m_0 &= 0 \\ \kappa_1 m_1 &= -1 \\ \kappa_2 m_2 &= m'_1 \\ \kappa_j m_j &= m'_{j-1} + \kappa_{j-1} m_{j-2}; \quad 3 \leq j \leq n, \\ m'_n + \kappa_n m_{n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.1.2)$$

olmasıdır.

**Açıklama 3.4.1.2.:** (3.4.1.2) deki eşitlikler ile ifade edilen  $m_j$  fonksiyonları  $\gamma$  eğrisinin (2.1.8) de tanımlanan  $j$ -inci  $c_j$  fokal eğrilik fonksiyonlarına karşılık gelmektedir. Böylece Teorem 2.1.8 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Teorem. 3.4.1.3.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  gergin bir eğri olsun. Eğer  $\gamma$  eğrisi 1. çeşit T-sabit ise bu taktirde  $\gamma$ ,  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  hiperküresinde yatan bir eğridir.

$\mathbb{R}^3$  de 1. çeşit T-sabit eğriler için aşağıdaki sonuç verilebilir;

**Sonuç. 3.4.1.4.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 1. çeşit T-sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$m_1 \kappa_2 + \left( \frac{m'_1}{\kappa_2} \right)' = 0, \quad m_1 = -\frac{1}{\kappa_1} \quad (3.4.1.3)$$

olmasıdır.

**İspat.** (3.4.1.2) eşitliklerinden ispat kolayca görülür  $\square$ .

**Örnek. 3.4.1.5.:** Aşağıda eğrilikleri verilen eğri 1. çeşit T-sabit gergin bir eğridir;

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= s, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{(\ln(s) + a)s^2}\end{aligned}\tag{3.4.1.4}$$

**Çözüm.**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  eğrisi  $\kappa_1 = s$  olacak şekilde verilen 1. çeşit T-sabit gergin bir eğri olsun. Bu taktirde (3.4.1.3) eşitliğinden

$$\kappa_2' s + \kappa_2^2 s^2 + 2\kappa_2 = 0\tag{3.4.1.5}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin Maple yardımıyla çözümünden

$$\kappa_2 = \frac{1}{(\ln(s) + a)s^2}$$

bulunur (bkz. Ek 4).

$\mathbb{R}^4$  de 1. çeşit T-sabit eğriler için aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Sonuç 3.4.1.6.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^4$  gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 1. çeşit T-sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$\left( \frac{\left( \frac{m_1'}{\kappa_2} \right)' + \kappa_2 m_1}{\kappa_3} \right)' + \frac{\kappa_3 m_1'}{\kappa_2} = 0; \quad m_1 = -\frac{1}{\kappa_1}\tag{3.4.1.6}$$

olmasıdır.

**İspat.** (3.4.1.2) eşitliklerinden ispat kolayca görülür  $\square$ .

**Açıklama 3.4.1.7.:** Teorem 3.4.1.3 den anlaşılacağı üzere Sonuç 3.4.1.4 ve Sonuç 3.4.1.6 deki eğrilerin küresel eğriler olduğu kolayca görülür.

**II. Durum:**  $\|\gamma^T(s)\| = sbt.$  (yani,  $0 \neq m_0 = sbt.$ ) olsun. Bu durumda  $\gamma$  eğrisi 2. çeşit T-sabit eğridir. Bu taktirde (3.4.2) den

$$\gamma(s) = m_0 T + \sum_{i=1}^n m_i N_i$$

dir.

Böylece (3.4.5) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Önerme 3.4.1.8.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eğrisi gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 2. çeşit T-sabit eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} m_0 &= sbt, \\ \kappa_1 m_1 &= -1, \\ \kappa_2 m_2 &= m'_1 + \kappa_1 m_0, \\ \kappa_j m_j &= m'_{j-1} + \kappa_{j-1} m_{j-2}; \quad 3 \leq j \leq n, \\ m'_n + \kappa_n m_{n-1} &= 0, \end{aligned} \tag{3.4.1.7}$$

olmasıdır.

$\mathbb{R}^3$  de 2. çeşit T-sabit eğriler için aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Sonuç. 3.4.1.9.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 2. çeşit T-sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$\left( \frac{m'_1 + \kappa_1 m_0}{\kappa_2} \right)' + m_1 \kappa_2 = 0, \quad m_1 = -\frac{1}{\kappa_1}, \quad m_0 = sbt \tag{3.4.1.8}$$

olmasıdır.

**İspat.** (3.4.1.7) eşitliklerinden ispat kolayca görülür  $\square$ .

**Sonuç. 3.4.1.10.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisi sabit 1.eğrilikli, 2. çeşit T-sabit eğri ise

$$\kappa_2 = \frac{\sqrt{(2s + ck_1 m_0) k_1 m_0}}{2s + ck_1 m_0} \tag{3.4.1.9}$$

dir. Burada  $c$  integral sabitidir.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisinin 1.eğriliği  $\kappa_1$  sabit olduğundan (3.4.1.8) eşitliği yardımıyla

$\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)' + m_1\kappa_2 = 0$ ,  $m_1 = -\frac{1}{\kappa_1}$ , elde edilir. Bu denklemin çözümünden istenilen sonuç elde edilir  $\square$ .

**Sonuç. 3.4.1.11.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  gergin 2. çeşit T-sabit eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{-\lambda s^2 - 2c_1s + 2c_2}}, \quad \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{1}{\lambda}$$

olmasıdır.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisinin genel helis olduğundan  $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$  oranı sabittir. Böylece (3.4.1.8)

eşitliğinden  $\left(\frac{m_1'}{\kappa_2}\right)' + m_1\kappa_2 = 0$ ,  $m_1 = -\frac{1}{\kappa_1}$  elde edilir. Böylece  $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \lambda$  ve  $m_1 = -\frac{1}{\kappa_1}$

eşitlikleri kullanılarak

$$(m_1 m_1')' + \lambda^2 = 0 \tag{3.4.1.10}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$m_1 = \pm \sqrt{-\lambda s^2 - 2c_1s + 2c_2}$$

elde edilir (bkz. Ek 5)  $\square$ .

$\mathbb{R}^4$  de 2. çeşit T-sabit eğriler için aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Sonuç 3.4.1.12.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^4$  eğrisi gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 2. çeşit T-sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$\left( \frac{\left( \frac{m'_1 + \kappa_1 m_0}{\kappa_2} \right)' + \kappa_2 m_1}{\kappa_3} \right)' + \frac{\kappa_3 (m'_1 + \kappa_1 m_0)}{\kappa_2} = 0; \quad m_1 = -\frac{1}{\kappa_1}, m_0 = sbt \quad (3.4.1.11)$$

olmasıdır.

**İspat.** (3.4.1.7) eşitliklerinden ispat kolayca görülür.

**Sonuç 3.4.1.13.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^4$  eğrisi gergin eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisi 2. çeşit T-sabit helis eğrisi olamaz.

**İspat.**  $\gamma \subset \mathbb{R}^4$  eğrisi gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 2. çeşit T-sabit olması için (3.4.1.8) eşitliğini sağlamalıdır. Eğer  $\gamma$  eğrisi bir helis ise  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  eğrilikleri sıfırdan farklı sabitlerdir. Böylece (3.4.1.8) eşitliğinden  $\kappa_3 \kappa_1 m_0 = 0$  elde edilir. Bu da bir çelişki oluşturur. Bu nedenle  $\gamma$  eğrisi bir helis olamaz  $\square$ .

Bazı eğriliklerin sabit olması durumuna göre özel haller incelenebilir.

**Önerme 3.4.1.14.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^4$  eğrisi gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisi eğrilikleri  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  sıfırdan farklı sabitler ve  $\kappa_3 \neq sbt$ . şartlarını sağlayan 2. çeşit T-sabit bir eğri ise  $\kappa_3 = \mp \frac{1}{\sqrt{bs+c}}, \quad b = \frac{2\kappa_1^2 m_0}{\kappa_2^2}$  dir. (3.4.1.12)

**İspat.**  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  sıfırdan farklı sabitler ve  $\kappa_3 \neq sbt$ . olsun. Bu taktirde (3.4.1.7) eşitlikleri

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{\kappa_1} = sbt. \\ m_2 &= \frac{m'_1 + \kappa_1 m_0}{\kappa_2} = \frac{\kappa_1 m_0}{\kappa_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} m_0 = sbt. \\ m_3 &= \frac{m'_2 + \kappa_2 m_1}{\kappa_3} = \frac{\kappa_2}{\kappa_3} m_1 = \frac{\kappa_2 m_1}{\kappa_3} \\ m'_3 + \kappa_3 m_2 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$m'_3 = -\frac{\kappa_2 m_1 \kappa'_3}{\kappa_3^2}$$

yardımla

$$\kappa'_3 - a\kappa_3^3 = 0, \quad a = \frac{-\kappa_1^2 m_0}{\kappa_2^2} \quad (3.4.1.13)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden (bkz. Ek 6)

$$\kappa_3 = \mp \frac{1}{\sqrt{bs+c}}, \quad b = \frac{2\kappa_1^2 m_0}{\kappa_2^2}$$

elde edilir. Bu çözümde bize istenilen sonucu verir.

### 3.4.2. $\mathbb{R}^{n+1}$ de N-Sabit Gergin Eğriler

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  gergin eğrisi

$$\gamma(s) = m_0 T + \sum_{i=1}^n m_i N_i$$

parametrik denklemi ile verilen N-sabit bir eğri olsun. Bu taktirde

$$\gamma^N(s) = \sum_{i=1}^n m_i N_i$$

vektörünün normu  $\|\gamma^N(s)\|$  sabit olacağından iki durum söz konusudur.

**I. Durum:**  $\|\gamma^N(s)\| = 0$ ,

**II. Durum:**  $\|\gamma^N(s)\| = \delta$ . (yani,  $0 \neq \delta = s.b.t.$ )

Bu tür eğriler sırasıyla **1. çeşit** ve **2. çeşit N-sabit eğriler** olarak adlandırılacaktır.

Şimdi bu durumları inceleyelim;

**I. Durum:**  $\|\gamma^N(s)\| = 0$ , olsun. Bu durumda  $\gamma$  eğrisi 1. çeşit N-sabit eğridir. Böylece (3.4.2) den

$$\gamma^N(s) = \sum_{i=1}^n m_i N_i$$

dir. Buradan

$$\|\gamma^N(s)\|^2 = m_1^2 + \dots + m_n^2 = 0$$

$$m_1 = 0, \dots, m_n = 0$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Önerme 3.4.2.1.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eğrisi (3.4.2) parametrelendirmesiyle ile verilen birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisi 1. çeşit N-sabit ise  $\gamma$  eğrisi düz bir doğrudur.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisi 1. çeşit N-sabit olsun. Bu taktirde  $\gamma(s) = m_0 T$  dir. Buradan  $\gamma'(s) = m_0' T + \kappa_1 m_0 N_1$  yardımıyla  $\kappa_1 = 0$  elde edilir. Böylece  $\gamma$  eğrisinin bir doğru olduğu sonucuna varılır  $\square$ .

**II. Durum:**  $\|\gamma^N(s)\| = s$  olsun. Bu durumda  $\gamma$  eğrisi 2. çeşit N-sabit eğridir. Bu taktirde (3.4.2) den

$$\gamma(s) = m_0 T + \sum_{i=1}^n m_i N_i$$

ve

$$\|\gamma^N(s)\|^2 = m_1^2 + \dots + m_n^2 = \delta^2, \quad 0 \neq \delta$$

sabittir.

Böylece (3.4.5) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Önerme 3.4.2.2.:**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eğrisi gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 2. çeşit N-sabit eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \kappa_1 m_1 &= m'_0 - 1 \\ \kappa_2 m_2 &= m'_1 + \kappa_1 m_0 \\ \kappa_3 m_3 &= m'_2 + \kappa_2 m_1 \\ &\dots \\ \kappa_n m_j &= m'_{j-1} - \kappa_j m_j + \kappa_{j-1} m_{j-2}, \quad 4 \leq j \leq n \\ m'_n + \kappa_n m_{n-1} &= 0, \\ m_1 m'_1 + \dots + m_n m'_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.2.1}$$

olmasıdır.

$\mathbb{R}^3$  de 2. çeşit N-sabit eğriler için aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Sonuç. 3.4.2.3.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisinin 2. çeşit N-sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \kappa_1 m_1 &= m'_0 - 1 \\ \kappa_2 m_2 &= m'_1 + \kappa_1 m_0 \\ m'_2 + \kappa_2 m_1 &= 0 \\ m_1 m'_1 + m_2 m'_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.2.2}$$

olmasıdır.

**Teorem. 3.4.2.4.:**  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  gergin bir eğri olsun. Bu taktirde  $\gamma$  eğrisi 2. çeşit N-sabit ise

i)  $\gamma$  eğrisi düz bir doğrudur, ya da

ii)  $\gamma$  eğrisi

$$\gamma(s) = (s + a)T + bN_2, \quad b = \frac{(s + a)\kappa_1}{\kappa_2} \tag{3.4.2.3}$$

parametrelendirmesiyle verilen rektifiyen bir eğridir.

**İspat.** (3.4.2.2) deki son iki eşitlikten

$$m_1(m'_1 - \kappa_2 m_2) = 0$$

elde edilir. Böylece iki durum söz konusudur;  $m_1 = 0$  veya  $m'_1 - \kappa_2 m_2 = 0$ .

Şimdi bu durumları inceleyelim.

**1. Durum:**  $m_1 = 0$  olsun. Bu taktirde (3.4.2.2) deki eşitliklerden  $m_0 = s + a$  ve  $m_2 = b$ ,  $b = \frac{(s+a)\kappa_1}{\kappa_2}$  elde edilir. Yani  $\gamma$  eğrisi (3.4.2.3) parametrelendirmeye sahip rektifiyen bir eğridir.

**2. Durum:**  $m'_1 - \kappa_2 m_2 = 0$  olsun. Bu taktirde (3.4.2.2) deki eşitliklerden  $m_0 = s + a$ ,  $m_1 = sbt.$ ,  $m_2 = sbt.$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  elde edilir. Bu durumda  $\gamma$  eğrisi düz bir doğrudur.  $\square$ .

#### 4. $\mathbb{R}^n$ DE SABİT ORANLI YÜZEYLER

##### 4.0. Giriş

Bu bölümde n-boyutlu Öklit uzayı  $\mathbb{R}^n$  deki yüzeyler ele alınmıştır. Bunların sabit oranlı olmaları ile ilgili temel kavramlar ve sonuçlar verilmiştir.

##### 4.1. $\mathbb{R}^n$ deki Sabit Oranlı Yüzeyler

$M \subset \mathbb{R}^n$  yüzeyi  $X(u,v)$  regüler yaması ile verilsin.  $M$  yüzeyinin ortonormal çatı alanı  $e_1, e_2, \dots, e_n$  olmak üzere uzaklık fonksiyonu  $\rho = \|X\|$  nun gradiyenti

$$grad\rho = \sum_{j=1}^n e_j(\rho)e_j \quad (4.1.1)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca

$$e_j(\rho) = \frac{\langle e_j, X \rangle}{\|X\|} \quad (4.1.2)$$

eşitliği kullanılarak (4.1.1) denklemini

$$grad\rho = \sum_{j=1}^n \frac{\langle e_j, X \rangle}{\|X\|} e_j \quad (4.1.3)$$

halini alır.

O halde  $grad\rho$  nun normu alınır

$$\|grad\rho\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\langle e_j, X \rangle^2}{\|X\|^2} \quad (4.1.4)$$

elde edilir (Chen 2001).

**Tanım 4.1.1.:**  $M \subset \mathbb{R}^n$  yüzeyi  $X(u,v)$  regüler yaması ile verilsin.  $M$  nin uzaklık fonksiyonu  $\rho = \|X\|$  olmak üzere

$$\|grad\rho\| = c, c \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1.5)$$

şartı sağlanır ise  $M$  yüzeyine **sabit oranlı** yüzey denir.

Tanımdan anlaşılacağı üzere  $\|grad\rho\| = c$  şartının sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\|X^T\| = c\|X\| \quad (4.1.6)$$

olmasıdır. Sonuçta  $\|X^T\| \leq \|X\|$  olduğundan  $\|grad\rho\| = c$  şartı sağlanırsa  $c \leq 1$  olmalıdır (Chen 2003).

#### 4.2. $\mathbb{R}^3$ de Sabit Oranlı Yüzeyler

$M \subset \mathbb{R}^3$  yüzeyi  $X(u,v)$  regüler yamasıyla verilsin.  $M$  üzerinde lokal ortonormal çatı alanı  $e_1, e_2, e_3$   $e_1, X^T$  ye paralel olacak şekilde seçilsin. Böylece

$$X = X^T + X^N$$

$$X = X^T + X^N, X^T = \lambda e_1, X^N = \mu e_3 \quad (4.2.1)$$

dir.  $M$  yüzeyi sabit oranlı bir yüzey ise

$$\|X^T\| = c\|X\| \quad (4.2.2)$$

dır. Böylece

$$\lambda = c|X|, \mu = \sqrt{1 - c^2} |X|. \quad (4.2.3)$$

#### 4.3. $\mathbb{R}^3$ de Sabit Oranlı Dönel Yüzeyler

$\mathbb{R}^3$  de bir dönel yüzey

$$X(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v) \quad (4.3.1)$$

regüler yaması ile verilsin. Böylece yüzeyin teğet bileşenleri

$$X_u = (g', h' \cos v, h' \sin v)$$

$$X_v = (0, -h \sin v, h \cos v)$$

dir. Birinci temel form katsayıları

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (g')^2 + (h')^2$$

$$F = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = h^2$$

ile hesaplanır. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$X_u \times X_v = (hh', -hg' \cos v, -hg' \sin v)$$

$$W = \|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2} = h\sqrt{(g')^2 + (h')^2}$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}(h', -g' \cos v, -g' \sin v)$$

dir.

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (g'', h'' \cos v, h'' \sin v) \\ X_{uv} &= (0, -h' \sin v, h' \cos v) \\ X_{vv} &= (0, -h \cos v, -h \sin v) \\ c_{11}^1 &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-g' h'' + g'' h'}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} \\ c_{12}^1 &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ c_{22}^1 &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{g' h}{(g')^2 + (h')^2} \\ h_{11}^1 &= \frac{c_{11}^1}{E} \\ h_{12}^1 &= \frac{c_{12}^1}{W} = \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}} \\ h_{22}^1 &= \frac{E}{W} c_{22}^1 = \frac{c_{22}^1 \sqrt{E}}{\sqrt{G}} \\ h_{11}^1 &= \frac{c_{11}^1}{E} = \frac{h' g'' - g' h''}{((g')^2 + (h')^2)^{\frac{3}{2}}} \\ h_{12}^1 &= \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}} = 0 \\ h_{22}^1 &= \frac{c_{22}^1 \sqrt{E}}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}{h} \frac{g' h}{(g')^2 + (h')^2} \\ &= \frac{g'}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} \\ X^T &= \lambda e_1 \\ X^N &= \mu e_3 \\ X &= X^T + X^N \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &(g, h \cos v, h \sin v) = \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}(g', h' \cos v, h' \sin v) + \frac{\mu}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}(h', -g' \cos v, -g' \sin v), \end{aligned}$$

$$h \cos v = \frac{\lambda h' \cos v - \mu g' \cos v}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}$$

$$h \sin v = \frac{\lambda h' \sin v - \mu g' \sin v}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}$$

$$g = \frac{\lambda g' + \mu h'}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}$$

$$h = \frac{\lambda h' - \mu g'}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}$$

$$\lambda g' + \mu h' = g \sqrt{(g')^2 + (h')^2}$$

$$\lambda h' - \mu g' = h \sqrt{(g')^2 + (h')^2}$$

denklemleri düzenlenirse

$$\lambda = \frac{g'g+h'h}{\sqrt{(g')^2+(h')^2}} \quad \text{ve} \quad \mu = \frac{h'g-g'h}{\sqrt{(g')^2+(h')^2}} \quad (4.3.2)$$

bulunur.

### 1) $c = 0$ durumu

$c=0$  olsun. Bu taktirde (4.2.3) eşitliğinden  $\lambda = 0$

$$\mu = \sqrt{1 - c^2} |x| = \|x\| = \sqrt{g^2 + h^2} = \text{sbt.}$$

dir. Böylece (4.3.2) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} g'g + h'h &= 0 \\ \frac{h'g - g'h}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} &= \sqrt{g^2 + h^2} = r \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden

$$g(u) = r \cos u$$

$$h(u) = r \sin u$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Önerme 4.3.1.:**  $M$ , (4.3.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. O halde  $M$  nin uzaklık fonksiyonu  $\rho = \|X\|$  olmak üzere  $\|grad \rho\| = 0$  şartı sağlanırsa  $M$  dönel yüzeyi  $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u \cos v, r \sin u \sin v)$

yamasıyla verilen bir küredir.

### 2) $c = 1$ durumu

$c=1$  olsun. Bu takdirde (4.2.3) eşitliğinden

$$\mu = 0, \lambda = \|X\| = \sqrt{g^2 + h^2}$$

bulunur. Böylece (4.3.2) deki eşitlikler yardımıyla

$$\frac{g'g + h'h}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} = \sqrt{g^2 + h^2}$$

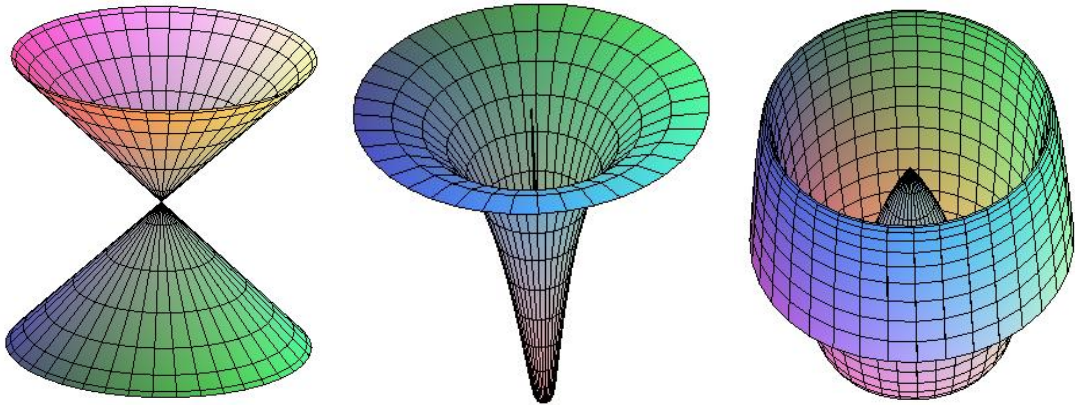
$$h'g - g'h = 0$$

bulunur. İkinci denklemden  $h(u) = ag(u), a \in \mathbb{R}$  bulunur ve bu değer birinci denklemi de sağlar.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Önerme 4.3.2.:**  $M$ , (4.3.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. O halde  $M$  nin uzaklık fonksiyonu  $\rho = \|X\|$  olmak üzere  $\|grad\rho\| = 1$  şartı sağlanırsa  $M$  dönel yüzeyi  $X(u, v) = g(u)(a, \cos v, \sin v)$

yamasıyla verilen bir konidir. Aşağıdaki şekiller sırasıyla i)  $a=3, g(u)=\cos u$ , ii)  $a=-1, g(u)=\exp(u)$ , iii)  $a=-1, g(u)=\ln(u)$  değerleri için çizdirilmiştir.



Şekil 4.3.1.  $c=1$  halinde sabit oranlı dönel yüzeyler

### 3) $0 < c < 1$ durumu

$$k(u) = h_{11}^1(u)$$

$$k(u) = au + b$$

$$h_{11}^1 = \frac{h'g'' - g'h''}{((g')^2 + (h')^2)^{\frac{3}{2}}} = au + b$$

$$\lambda = \frac{g'g + h'h}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} = \sqrt{\frac{-c}{c^2 - 1}} \frac{c^2 - 1}{au + b}$$

$$\mu = \frac{h'g - g'h}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} = \frac{c^2 - 1}{au + b}$$

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Önerme 4.3.3.:**  $M$ , (4.3.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. O halde  $M$  yüzeyinin uzaklık fonksiyonu  $\rho = \|X\|$  olmak üzere  $\|grad\rho\| = c$ ,  $0 < c < 1$  şartı sağlanırsa  $M$ , üreteç eğrisi

$$\begin{aligned} \frac{g'g + h'h}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} &= \sqrt{-c} \frac{c^2 - 1}{au + b} \\ \frac{h'g - g'h}{\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} &= \frac{c^2 - 1}{au + b} \end{aligned}$$

denklem sistemiyle belli bir dönel yüzeydir.

## KAYNAKLAR

**Bulca, B. 2012.**  $E^4$  deki Yüzeylerin bir Karakterizasyonu, *Doktora Tezi*, U.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

**CARMO, M. P. Do. 1983.** Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg Verlag, Wiesbaden, Braunschweig.

**Chen, B. Y. 1973.** Geometry of Submanifolds. M. Dekker, USA, 298 pp.

**Chen, B.Y. 2001.** Constant Ratio Hypersurfaces. *Soochow J.Math.*, 27: 353-362.

**Chen, B.Y. 2002.** Convolution of Riemannian manifolds and Its Applications. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 66:177-191.

**Chen , B.Y. 2003.** When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane?. *American Math. Monthly*, 110: 147-152.

**Gluck, H. 1966.** Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space. *Am. Math. Monthly*, 73: 243-249.

**Gray, A. 1993.** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press Inc., 664 pp.

**Hacısalıhoğlu, H.H. 1983.** Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No 2, Malatya, 895 s.

**Romero-Fuster M.C., Sanabria-Codessa E., 1999.** Generalized Helices, Twistings and Flattenings of Curves in n-Space, *Mat. Contemp.*, 17: 267-280.

**Rovenski, V. 2000.** Geometry of Curves and Surfaces with Maple, Birkhauser, London, 419 pp.

**Vargas U. R. 2005.** On Vertices, Focal Curvatures and Differential Geometry of Space Curves, *Bull Braz. Math. Soc.*, 36: 285-307.

## EKLER

**Ek1.:** (3.2.8) diferansiyel denkleminin Maple programı yardımıyla çözümünden

> ode1:= diff(k(s),s,s)\*k(s)-3\*diff(k(s),s)^2-b^2\*k(s)^4=0;

$$ode1 := \left( \frac{d^2}{ds^2} k(s) \right) k(s) - 3 \left( \frac{d}{ds} k(s) \right)^2 - b^2 k(s)^4 = 0$$

> dsolve(ode1);

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{-b^2 s^2 + 2\_C1 s - 2\_C2}}, k(s) = -\frac{1}{\sqrt{-b^2 s^2 + 2\_C1 s - 2\_C2}}$$

elde edilir.

**Ek2.:** (3.2.9) denklemlerinin Maple programlama dilindeki karşılıkları sırasıyla

$$\alpha(s) := \left( \text{Int}(\cos(teta(s)), s), \text{Int}(\sin(teta(s)), s) \right)$$

$$\theta(s) := \text{Int}(k(s), s)$$

biçiminde ifade edilir. Buradan

$$U(s) := \text{int}(\cos(teta(s)), s);$$

$$V(s) := \text{int}(\sin(teta(s)), s);$$

$$\text{plot}([U(s), V(s), s = -a..b];$$

Maple komutu yardımıyla  $k(s)$  eğrilikli eğrinin grafiği çizdirilir (Gray 1993).

**Ek3.:** (3.3.4) parametrelendirmesiyle verilen uzay eğrisinin  $a=3$  için grafiği aşağıdaki

Maple komutu yardımıyla çizdirilmiştir:

with(VectorCalculus):

$$f(s) := \tanh(s+3);$$

$$g(s) := \text{sech}(s+3);$$

$$x(s) := f(s) \cdot \cos(s);$$

$$y(s) := f(s) \cdot \sin(s);$$

$$z(s) := g(s);$$

$$\text{SpaceCurve}(\langle x(s), y(s), z(s) \rangle, s = -2 \cdot \text{Pi}..2 \cdot \text{Pi});$$

**Ek4.:** (3.4.1.5) diferansiyel denkleminin Maple programı yardımıyla çözümünden  
 > ode4 := diff(k(s),s)\*s+k(s)^2\*s^2+2\*k(s)=0;

$$ode4 := \left( \frac{d}{ds} k(s) \right) s + k(s)^2 s^2 + 2 k(s) = 0$$

> dsolve(ode4);

$$k(s) = \frac{1}{(\ln(s) + \_C1) s^2}$$

elde edilir.

**Ek5.:** (3.4.1.10) diferansiyel denkleminin Maple programı yardımıyla çözümünden  
 > ode5 := diff(m1(s),s,s)\*m1(s)+diff(m1(s),s)^2+b^2=0;

$$ode5 := \left( \frac{d^2}{ds^2} m1(s) \right) m1(s) + \left( \frac{d}{ds} m1(s) \right)^2 + b^2 = 0$$

> dsolve(ode5);

$$m1(s) = \sqrt{-b^2 s^2 - 2 \_C1 s + 2 \_C2}, m1(s) = -\sqrt{-b^2 s^2 - 2 \_C1 s + 2 \_C2}$$

elde edilir.

**Ek6.:** (3.4.1.13) diferansiyel denkleminin Maple programı yardımıyla çözümünden

> ode6 := diff(k(s),s)-a\*k(s)^3=0;

$$ode6 := \left( \frac{d}{ds} k(s) \right) - a k(s)^3 = 0$$

> dsolve(ode6);

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{-2 a s + \_C1}}, k(s) = -\frac{1}{\sqrt{-2 a s + \_C1}}$$

elde edilir.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Selin GÜRPINAR  
Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa, 17/08/1990  
Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Milli Piyango Anadolu Lisesi, 2004-2008  
Lisans : Ankara Üniversitesi, 2008-2012

Çalıştığı Kurum ve Yıl :  
İletişim (e-posta) : selin.grpnar@gmail.com

**Yayınları:** :