

**DÜZGÜN FİĞÜRLER VE HECKE GRUPLARININ  
NORMAL ALTGRUPLARI**

**Osman AKBAYRAK**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## DÜZGÜN FİGÜRLER VE HECKE GRUPLARININ NORMAL ALTGRUPLARI

**Osman AKBAYRAK**  
0000-0001-7425-1986

Prof. Dr. Musa DEMİRCİ  
(Danışman)

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2022  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ ONAYI

Osman AKBAYRAK tarafından hazırlanan “DÜZGÜN FİGÜRLER VE HECKE GRUPLARININ NORMAL ALTGRUPLARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

**Başkan** : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL  
0000-0002-0700-5774  
Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye** : Prof. Dr. Musa DEMİRCİ  
0000-0002-6439-8439  
Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye** : Prof. Dr. Sertan Kemal AKAY  
0000-0002-7597-1528  
Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi  
Fizik Anabilim Dalı

İmza

**Üye** : Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ  
0000-0003-2924-5397  
Balıkesir Üniversitesi,  
Fen-Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye** : Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
0000-0002-7539-5065  
Selçuk Üniversitesi,  
Fen Fakültesi,  
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN**  
Enstitü Müdürü  
31/05/2022

**B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**27/05/2022**

**Osman AKBAYRAK**

## TEZ YAYINLANMA FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan “**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**” kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Musa DEMİRCİ  
27/05/2022

Osman AKBAYRAK  
27/05/2022

İmza

Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum  
anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza

Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum  
anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

## ÖZET

Doktora Tezi

DÜZGÜN FİGÜRLER VE HECKE GRUPLARININ NORMAL ALTGRUPLARI

**Osman AKBAYRAK**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

Bu doktora tezinde Erich Hecke tarafından 1936 yılında yayımlanan bir makalede tanımlanmış olan Hecke gruplarının normal alt grupları, düzgün figürler ile arasındaki bire bir dönüşüm yardımıyla tespit edilmiştir. Bu dönüşüm 1978 yılında Jones ve Singerman tarafından tanımlanmıştır. 1993 yılına kadar cinsi 7'ye kadar olan düzgün figürler bilindiğinden Cangül tarafından Hecke gruplarının cinsi 7'ye kadar olan normal alt gruplarının simgeleri belirlenmiş, grup yapıları ve özellikleri çalışılmıştır. 2001 yılında Conder ile Dobcsanyi cinsi 15'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri belirlemiştir. 2006 yılında Conder'in cinsi 101'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri tespit etmesi ile Hecke gruplarının cinsi 101'e kadar olan normal alt gruplarını çalışmak mümkün olmuştur. 2011 yılında Conder cinsi 303'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri sınıflandırmıştır.

Ayrıca 2018 yılında Delen ve Cangül tarafından tanımlanan yeni bir değişmez olan Omega değişmezinin özelliklerinden bahsedilmiş ve Hecke gruplarının normal alt gruplarının rankını bulmak için kullanılan yöntem ile arasında bir bağıntı tespit edilmiştir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tez ile ilgili kısa bir bilgi verilmiş ve tezin oluşumunda kullanılan tanımlara, temel kavramlara, teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde teze kaynak oluşturan tarihsel kuramlardan, üçüncü bölümde ise tezde elde edilen sonuçlara ulaşmak için kullanılan matematiksel kuramlardan, teoremlerden ve yöntemlerden söz edilmiştir. Dördüncü bölüm tezin ana bölümüdür. Bu bölümde tez ile ilgili elde edilen yeni bulgular, tanım, teorem ve çıkarımlar verilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tez ile ilgili tartışma ve sonuçlara değinilmiş, tezin yazımına kaynak olan yeni bulguların başka alanlarda kullanılabileceğinden bahsedilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Düzgün figür, Hecke grupları, normal altgrup

**2022, xiii + 88 sayfa.**

## ABSTRACT

PhD Thesis

### REGULAR MAPS AND NORMAL SUBGROUPS OF HECKE GROUPS

**Osman AKBAYRAK**

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof. Dr. Musa DEMİRÇİ

In this PhD thesis, the normal subgroups of Hecke groups which were defined by Erich Hecke in an article published in 1936 were determined with the help of a one-to-one correspondence between regular maps. This correspondence was described by Jones and Singerman in 1978. Since regular maps up to genus 7 were known until 1993, the signatures of normal subgroups of Hecke groups up to genus 7 were determined by Cangül, and their group structures and characteristics were studied. In 2001, Conder and Dobcsanyi classified the orientable regular maps up to genus 15. It was possible to study normal subgroups of Hecke groups up to genus 101 in 2006, with Conder's classification of orientable regular maps up to genus 101. In 2011, Conder classified all orientable regular maps up to genus 303.

In addition, a new invariant, which is called Omega invariant, defined by Delen and Cangül in 2018, was defined and the properties of this invariant were mentioned and relations were determined between the rank of the normal subgroups of Hecke groups and some graph parameters.

The thesis consists of five chapters. In the first chapter, a brief information about the thesis is given and the definitions, basic concepts and theorems used in the formation of the thesis are given. In the second part, the historical theories that constitute the source of the thesis, and in the third part, the mathematical theories, theorems and methods used to reach the results obtained in the thesis are mentioned. The fourth chapter is the main part of the thesis. New findings, definitions, theorems and inferences about the thesis are given in this section. In the fifth and last part, the discussion and conclusions about the thesis are mentioned, and it is mentioned that the new findings that are the source of the writing of the thesis can be used in other fields.

**Key words:** Regular map, Hecke groups, normal subgroup

**2022, xiii + 88 pages.**

## ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Öğrenim hayatım boyunca bana daima destek olan, emeğini esirgemeyen, çalışmalarıyla bana örnek olan ve bu süreçte bana büyük bir sabır gösteren çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Musa DEMİRCİ'ye en içten duygularla teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde engin bilgilerinden yararlandığım, bana her konuda destek olan, akademik hayatımı ve çalışmalarını örnek almaya çalıştığım çok kıymetli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e çok teşekkür ederim.

Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik bölümünde üzerimde emeği olan tüm saygıdeğer hocalarıma ve değerli personele teşekkür ederim. Ayrıca doktora öğrenimi sürecinde beraber ders aldığımız, ortak çalışmalar yaptığımız Dr. Aydın ÖZBEK'e ve doktora başlama hususunda beni cesaretlendiren Dr. Abdurrahman DAYIOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Tezi hazırlama sürecinde ve hayatım boyunca bana daima destek olan sevgili anneme, babama ve kardeşlerime çok ama çok teşekkür ederim.

Osman AKBAYRAK  
27/05/2022



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	22
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	32
4. BULGULAR .....	33
4.1. $\Omega(G)$ Omega Değişmezi .....	33
4.2. Hecke Gruplarının Normal Altgrupları.....	47
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	80
KAYNAKLAR .....	81
ÖZGEÇMİŞ .....	88

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$H(\lambda_q), H(\lambda)$	Hecke grubu
$H_e(\lambda_q)$	Hecke grubunun çift normal alt grubu
$g$	Yüzeyin cinsi
$(g; 2, q, \infty)$	$H(\lambda_q)$ Hecke grubunun simgesi
$S(z), R(z), T(z)$	Kesirli doğrusal dönüşümler
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	Üst yarı düzlem
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$z$	Bir karmaşık sayı
$ z $	Bir $z$ karmaşık sayısının modülü
$F_\lambda$	$H(\lambda)$ Hecke grubunun bir temel bölgesi
$GL(2, \mathbb{R})$	Gerçek sayı katsayılı genel doğrusal grup
$PSL(2, \mathbb{R})$	Gerçek sayı katsayılı projektif özel doğrusal grup
$Z(GL(2, \mathbb{R}))$	Gerçek sayı katsayılı genel doğrusal grubun merkezi
$Z(PSL(2, \mathbb{R}))$	Gerçek sayı katsayılı projektif özel doğrusal grubun merkezi
$\Gamma$	Fuchsian grup, modüler grup
$\Gamma_1$	Bir Fuchsian grubun alt grubu
$(g; m_1, \dots, m_r; t; u)$	Bir Fuchsian grubun simgesi
$\mu(\Gamma)$	Bir $\Gamma$ grubunun hiperbolik alanı
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	Rasyonel sayılar cismine $\sqrt{2}$ cebirsel elemanı eklenerek elde edilen cebirsel genişleme
$\triangleleft$	Normal alt grup simgesi
$(l, m, n)$	Üçgen grubu
$Ker\Phi$	Bir $\Phi$ homomorfizminin çekirdeği
$N$	Bir $H(\lambda)$ Hecke grubunun normal alt grubu
$G / N$	Bir $G$ grubunun $N$ ile bölüm grubu
$GF(q)$	$q$ elemanlı Galois cismi
$C_n$	$n$ . mertebeden bir devirli grup
$D_n$	$n$ . mertebeden bir dihedral grup
$A_n$	$n$ . mertebeden bir alterne grup
$S_n$	$n$ . mertebeden bir simetrik grup
$\mu$	Bir Hecke grubunun mertebesi
$t$	Parabolik sınıf sayısı
$n$	Bir $N$ bölüm grubunun seviyesi
$ G $	Bir $G$ grubunun mertebesi
$\Sigma$	Schreier transversali
$[g, h]$	$g$ ile $h$ 'nin komütatörü

$G'$	Bir $G$ grubunun komütatör alt grubu
$X$	Bir $F$ serbest grubunun serbest tabanı
$ X $	Bir $X$ serbest grubunun rankı
$F_n$	$n$ ranklı serbest grup
$A * B$	$A$ ile $B$ gruplarının serbest çarpımı
$A_\alpha$	$\alpha \in I$ indeksli altgrup ailesi
$\text{ür}A_\alpha$	$A_\alpha$ gruplarının üreteçleri
$\text{bağ}A_\alpha$	$A_\alpha$ gruplarının bağıntıları
$\beta_\beta$	Bir alt grup ailesi
$G(z)$	Üst yarı düzlemde bir $z$ elemanın yörüngesi
$[G, X]$	Bir topolojik dönüşüm grubu
$G$	Graf
$G(V, E)$	$V$ köşe kümesine ve $E$ kenar kümesine sahip bir $G$ grafi
$M$	Bir figür
$S$	Yönlendirilebilir bir yüzey
$\{m, n\}$	$m$ kenarlı ve $n$ köşeli bir $M$ figürünün tipi
$\{n, m\}$	Bir $M$ figürünün dual figürünün tipi
$\text{Aut}M$	Bir $M$ figürünün tüm otomorfizmlerinin kümesi
$K_n$	$n$ tane köşeye sahip bir tam graf
$P_n$	$n$ tane köşeye sahip bir patika grafi
$C_n$	$n$ tane köşeye sahip bir devir grafi
$S_n$	$n$ tane köşeye sahip bir yıldız grafi
$T$	Bir ağaç grafi
$T_{r,s}$	$n = r + s$ tane köşeye sahip bir larva grafi
$K_{r,s}$	$n = r + s$ tane köşeye sahip iki parçalı tam graf
$B_{r,s}$	Bir kenarının ucunda $r$ tane döngüye, diğer ucunda $s$ tane döngüye sahip bir graf
$L_q$	Tek bir köşeye $q$ tane döngü ekleyerek elde edilen graf
$V(G)$	Bir $G$ grafının köşe kümesi
$E(G)$	Bir $G$ grafının kenar kümesi
$ V(G)  = n$	Bir $G$ grafının mertebesi
$ V(E)  = m$	Bir $G$ grafının boyutu
$\Delta(G)$	Bir $G$ grafının en büyük köşe derecesi
$\delta(G)$	Bir $G$ grafının en küçük köşe derecesi
$DS(G)$	Bir $G$ grafının derece dizisi
$\alpha_i$	$i$ . köşe derecesinin katlılığı
$\alpha_1$	Bir grafın sallanan köşelerinin sayısı
$\Omega(G)$	Bir $G$ grafının omega değişmezi
$\Omega(D)$	Bir $D$ derece dizisinin omega değişmezi
$l$	Bir $G$ grafının döngü sayısı
$ch$	Bir $G$ grafının giriş sayısı
$e_m$	Bir $G$ grafının çoklu kenar sayısı
$\chi$	Euler karakteristiği
$K_q$	Bir düzgün figürün $q$ 'ya bağlı bir sabiti
$L(\Gamma)$	Bir $\Gamma$ grubunun limit noktalarının kümesi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

Şekil 1.1. $H(\lambda_q)$ Hecke grubu için bir taraflı ve bir beyaz bölgeden oluşan bir temel bölge .....	1
Şekil 1.2. Bir hiperbolik üçgen .....	9
Şekil 1.3. Hiperbolik Üçgenler.....	10
Şekil 1.4. Bir $v$ köşesine ait bir $\alpha$ dartı (oku) .....	19
Şekil 1.5. Bir projektif düzlemde bir düzgün figür ve duali .....	19
Şekil 1.6. Tor üzerine $K_7$ tam grafinin gömülmesiyle elde edilen $\{6,3\}_{2,1}$ düzgün figürü .....	20
Şekil 2.1. $(F, m, n) = (64,6,4)$ düzgün figürünün kesit modeli .....	26
Şekil 2.2. $\{m, n\}$ mozaik kaplaması .....	28
Şekil 2.3. Basit düzgün figür örnekleri <b>A</b> ) Sekiz tane üçgene bölünmüş yüzlerle bir küp <b>B</b> ) Dodecahedron (on iki yüzlü şekil) <b>C</b> ) Hosohedron (plaj topu) <b>D</b> ) Tor .....	30
Şekil 2.4. Tor yüzeyi üzerinde $\{4,4\}_{2,1}$ figürünün oluşturulması .....	30
Şekil 2.5. Tor yüzeyi üzerindeki düzgün figürler .....	31
Şekil 4.1. Aynı $\{2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisine sahip graflar .....	34
Şekil 4.2. $\Omega(G) = 6$ olan bir $G$ grafi.....	36
Şekil 4.3. Örtüşen kapalı bölge grafi .....	40
Şekil 4.4. Şekil 4.3'teki grafin örtüşmeyen kapalı bölge çizimi.....	40
Şekil 4.5. Bir bağlantılı grafi .....	41
Şekil 4.6. Aynı derece dizisinin beş farklı gösterimi .....	43
Şekil 4.7. Bazı $L_q$ grafları .....	43
Şekil 4.8. Bazı $B_{r,s}$ grafları .....	44
Şekil 4.9. $D$ 'nin bağlantılı bir çizimi.....	45
Şekil 4.10. $D$ 'nin en fazla bileşene sahip bir çizimi.....	46

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Sayfa

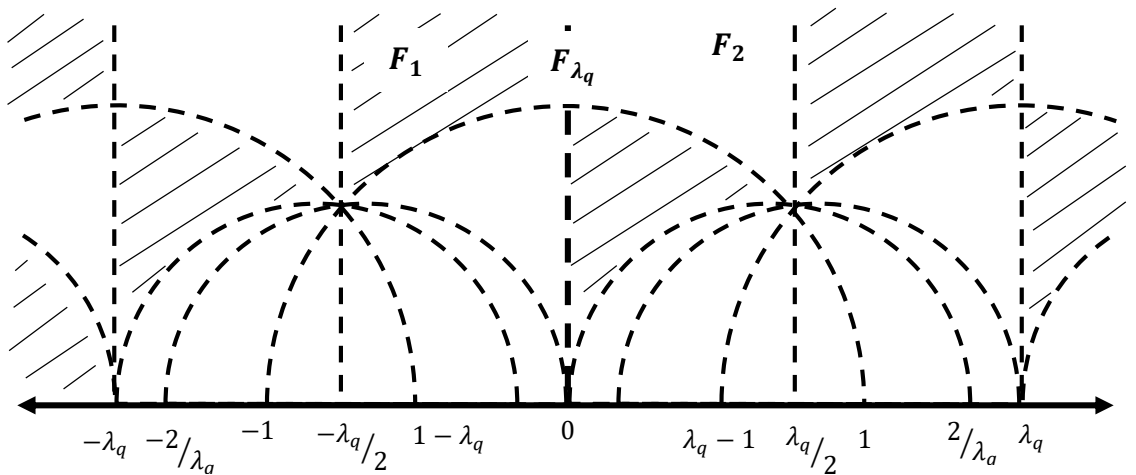
Çizelge 4.1. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $2 \leq g \leq 6$ ve $3 \leq q \leq 26$ değerleri için serbest normal alt grupları .....	61
Çizelge 4.2. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $7 \leq g \leq 11$ ve $3 \leq q \leq 46$ değerleri için serbest normal alt grupları .....	62
Çizelge 4.3. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $g = 12$ ve $3 \leq q \leq 50$ değerleri için \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grupları.....	64
Çizelge 4.4. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $2 \leq g \leq 4$ ve $3 \leq q \leq 18$ değerleri için serbest olmayan normal alt grupları.....	66
Çizelge 4.5. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $5 \leq g \leq 7$ ve $3 \leq q \leq 30$ değerleri için serbest olmayan normal alt grupları .....	67
Çizelge 4.6. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $8 \leq g \leq 10$ ve $3 \leq q \leq 42$ değerleri için serbest olmayan normal alt grupları .....	70
Çizelge 4.7. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $2 \leq g \leq 101$ ve $3 \leq q \leq 10$ değerleri için \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grup sayıları.....	75

## 1. GİRİŞ

$H(\lambda)$  ile gösterilen Hecke grupları ilk olarak 1936 yılında Erich Hecke tarafından yayımlanan “Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen” adlı makalede geçmektedir. Bu makalede,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere,  $R(z) = -\frac{1}{z}$  ve  $T(z) = z + \lambda$  kesirli lineer dönüşümleri ile üretilen Hecke grupları tanımlanmış ve  $H(\lambda)$  ile gösterilmiştir. Burada  $S = R \cdot T$  alınırsa  $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$  elde edilir. Bu gruplar, Fuchsian grup özelliğinde iken Dirichlet serilerinin çalışılmasında kullanılır. Hecke (1936),  $\lambda < 2$  iken  $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$ ,  $q \geq 3$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  olduğunda ya da  $\lambda \geq 2$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  olduğunda

$$F_\lambda = \left\{ z \in \mathbb{U} : |Re z| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1 \right\}$$

kümesinin  $H(\lambda)$  Hecke grubu için bir temel bölge olduğunu, diğer  $\lambda > 0$  değerleri için ise  $F_\lambda$ 'nin bir temel bölge olmadığını göstermiştir. Buradan  $H(\lambda)$  grubunun ancak ve ancak  $\lambda = \lambda_q$  ya da  $\lambda \geq 2$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  iken bir Fuchsian grup olduğu sonucuna ulaşılır. Her iki durumda da  $H(\lambda)$  grubu, Hecke grubu olarak adlandırılır (Hecke, 1936). Bu tezde de  $\lambda < 2$  iken  $\lambda = \lambda_q$  durumundaki  $H(\lambda)$  Hecke grupları çalışılmıştır.



Şekil 1.1.  $H(\lambda_q)$  Hecke grubu için bir taralı ve bir beyaz bölgeden oluşan bir temel bölge

$H(\lambda_q)$  ile gösterilen Hecke grubu,  $PSL(2, \mathbb{R})$  grubunun mertebesi 2 olan  $R(z) = -\frac{1}{z}$  ve mertebesi  $q$  olan  $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$  üreteçleri ile üretilen bir ayrık alt grubudur.

$q = 3$  için  $\lambda_3 = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$  olur. Bu durumda  $H(\lambda_3)$  Hecke grubu, modüler grup olarak adlandırılır ve  $\Gamma$  ile gösterilir. Literatürde en çok çalışılan gruplardandır. Bu grubun elemanlarının tüm katsayıları ise rasyonel tamsayılardan oluşur.

$q = 4$  için  $\lambda_4 = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$  ve  $q = 6$  için  $\lambda_6 = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$  olur. Bu iki durumda katsayılar cismi ise rasyonel sayılar cismine  $\sqrt{2}$  ve  $\sqrt{3}$  sayıları eklenerek oluşturulan  $Q(\sqrt{2})$  ve  $Q(\sqrt{3})$  cebirsel genişlemeleridir.

$q = 5$  için  $\lambda_5 = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  olur.  $H(\lambda_5)$  Hecke grubu da literatürde çok çalışılan diğer bir gruptur. Katsayılar cismi ise rasyonel sayılar cismine  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  sayısı eklenerek oluşturulan derecesi iki olan  $Q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  cebirsel genişlemesidir.  $H(\lambda_3)$ ,  $H(\lambda_4)$ ,  $H(\lambda_5)$  ve  $H(\lambda_6)$  Hecke grupları için  $\lambda_q$  sayısı, derecesi 3'ten küçük olan bir polinomun köküdür.

$H(\lambda_q) \cong (g; 2, q, \infty)$  ile gösterilir (Cangül, 1993). Burada

$g$  : grubun üzerinde hakeret ettiği Riemann yüzeyinin cinsini,

$2, q$  : eliptik elemanların mertebelerini,

$\infty$  : parabolik sınıf sayısını

ifade eder.

$H_e(\lambda_q) \triangleleft H(\lambda_q)$  dur.  $H_e(\lambda_q)$ ,  $H(\lambda_q)$ 'nin 2 indeksli normal alt grubudur ve sadece  $q$  çift iken mevcuttur.

$(l, m, n)$  üçgen grubu

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1 \text{ iken küre üzerinde, } (g = 0)$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \text{ iken tor yüzeyi üzerinde, } (g = 1)$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1 \text{ iken en az iki delikli yüzey üzerinde, } (g \geq 2)$$

hareket ederler.

$\text{Ker}\Phi = N \triangleleft G$  olmak üzere  $\Phi: G \rightarrow G/N$  bir homomorfizmdir. Yani bir homomorfizmin çekirdeği bize  $G$  grubunun bir normal alt grubunu verir.

Jones ve Singerman, 1978'de  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarını da içeren belirli üçgen grupların normal alt grupları ile düzgün figürler arasında bire bir dönüşümün varlığı gösterilmiştir. Eğer düzgün figürlere denk gelen dönüşüm biliniyorsa, bu dönüşüm vasıtasıyla  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt grupları bulunabilir. Bu tezde  $g$ , düzgün figürün cinsini göstermek üzere,  $2 \leq g \leq 101$  arasındaki düzgün figürler yardımıyla elde edilen  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt grupları çalışılmıştır.

$\Phi: H(\lambda_q) \rightarrow H(\lambda_q) / H_e(\lambda_q)$  için  $\text{Ker}\Phi = H_e(\lambda_q) \triangleleft H(\lambda_q)$  bir homomorfizmdir.

Bu özellikten faydalanarak bilinen düzgün figürlere karşılık gelen normal alt grupları bulabilmek için  $\Phi: (2, q, \infty) \rightarrow (l, m, n)$  homomorfizmi alınır ve bu homomorfizmin çekirdeği hesaplanır. Tabii bu durumda  $\Phi: (2, q, \infty) \rightarrow (l, m, n)$  homomorfizminin mevcut olması gerekir. Bunun için  $l|2$ ,  $m|q$  ve  $n|\infty$  olmalıdır.

Macbeath (1963),  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun, mertebesi 2 ve  $q$  olan sonlu üreteçli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olduğunu göstermiştir.



$H(\lambda_q) \cong (g; 2, q, \infty)$  iken  $H(\lambda_q) \cong F_{2g+t-1} * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$  olur. Cinsin sıfır olduğu hatırlanırsa  $H(\lambda_q) \cong (0; 2, q, \infty)$  iken  $g = 0$  ve  $t = 1$  olduğundan

$$H(\lambda_q) \cong F_{2 \cdot 0 + 1 - 1} * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$$

olur. Buradan  $H(\lambda_q) \cong C_2 * C_q$  elde edilir (Macbeath, 1963).

Şimdi düzgün figür kavramı ile ilgili bazı tanım ve özelliklerden bahsedelim.  $S$  yüzeyi üzerindeki bir figür demek,  $S - G$ 'nin bileşenlerinin basit-bağlantılı olması özelliği ile birlikte bir  $G$  grafının  $S$  yüzeyine yerleştirilmesi (gömülmesi) demektir. Bu durumda bu bileşenlerin her birini çokgen hücreler olarak düşünebiliriz. Böylece bir figür, graftaki köşeler ve kenarlar ile çokgen hücrelerdeki yüzlerden oluşacaktır. Figürün bir otomorfizmi, gömülü grafi muhafaza eden yüzeyin yön koruyan bir homeomorfizmidir ve  $G$  gömülü grafi üzerinde aynı etkiye sahip olmaları durumunda, bu tür iki homeomorfizmin özdeş olduğunu kabul ederiz. Bir figür, otomorfizm grubunun, otomorfizmin yönlendirilmiş kenarlarında geçişli olması durumunda düzgün olarak adlandırılır. Dolayısıyla bir düzgün figürün tüm yüzleri aynı kenar ve köşe sayısına sahip olacaktır. Bu durumda her bir yüzün kenar sayısına figürün katlılığı adı verilir. Örnek vermek gerekirse, yirmi tane eşkenar üçgenden oluşan bir düzgün yirmi yüzlünün her bir yüzünün katlılığı 3, bir küpün her bir yüzünün katlılığı da 4'tür.

Tezde kullanılan bir diğer kavram olan omega değişmezi, Delen ve Cangül tarafından 2018'de yayımlanan bir makalede geçmektedir. Bir  $T$  ağaç grafında,  $\Delta$ , en büyük köşe derecesi ve  $a_i$ ,  $i$ . köşe derecesinin sayısını göstermek üzere, bu  $T$  ağaç grafının yapraklarının sayısı  $a_1$  (pendant köşeler),

$$a_1 = 2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta$$

ile gösterilir.

Bu eşitlik  $a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = -2$  olarak yeniden düzenlenebilir. Eşitliğin sol tarafı  $\Omega$  ile gösterilebilir. Bu değişmez, bir grafın derece dizisi yardımıyla bile, bu graf hakkında yapısal ve saymaya dayalı bilgi verme konusunda çok büyük potansiyele sahiptir (Delen ve Cangül, 2018).

$D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  bir çizilebilir derece dizisi ve onun temsili de bir  $G$  grafı olsun. Bu  $G$  grafının  $\Omega(G)$  değişmezi de derece dizisi yardımıyla

$$\begin{aligned}\Omega(G) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{\Delta} (i - 2)a_i\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.  $m$  tane kenara ve  $n$  tane köşeye sahip herhangi bir  $G$  grafı için omega değişmezi,  $\Omega(G) = 2(m - n)$ 'dir (Delen ve Cangül, 2018). Bir düzgün dönüşüm aynı zamanda bir graf olduğundan bu gösterim düzgün dönüşümler için de kullanılabilir.

Bu tezde de bilinen düzgün figürlerden faydalanarak Hecke gruplarının normal alt gruplarına karşılık gelen bazı parametreler arasındaki benzer ilişkiler çalışılmıştır. Bu yapılırken yeni bir graf değişmezi olan  $\Omega$  omega değişmezinden de yararlanılmıştır.

Tezin ilk bölümü tezde kullanılan temel kavramları açıklayıcı ve Hecke gruplarının normal alt gruplarını tanıtan kısımdır. İkinci bölümde teze kaynak oluşturan temel kuramlardan, düzgün figürlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise kullanılan matematiksel kuramlardan, teoremlerden ve yöntemlerden söz edilmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak  $\Omega$  omega değişmezi ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Sonrasında Hecke gruplarının normal alt grupları ile ilgili elde edilen yeni bulgular, tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir. Belirlenen serbest ve serbest olmayan normal alt grupların bir kısmı tablolar halinde gösterilmiştir. Beşinci ve son bölümünde ise tez ile ilgili tartışma ve sonuçlara değinilmiş, yeni bulguların başka alanlarda nasıl kullanılabileceğinden bahsedilmiştir.

Bundan sonraki kısımda tezde kullanılacak bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Daha fazla bilgi için (Cangül, 1993), (Cangül, 1994), (Cangül, 1995), (Cangül, 1996), (Fine, 1976), (Başkan, 1980), (Cangül ve Singerman, 1998), (Jones ve Singerman, 1978), (Demirci, Akbayrak, Özbek ve Ana, 2021), (Fine ve Rosenberger, 1999), (Hecke, 1936), (Jones ve Singerman, 1987), (Özdemir, Demirci ve Cangül, 2006), (Macbeath, 1963), (Demirci, Soydan ve Cangül, 2006), (Delen ve Cangül, 2018), (Lyndon ve Schupp, 1977), (Johnson, 1980), (Siran, 2006) ve (Cangül, 2017) kaynaklarına bakılabilir.

**1.1. Tanım.**  $p$  bir asal sayı olmak üzere, tüm  $q = p^n$  şeklinde kuvvetler için,  $GF(q)$  ile gösterilen  $q$  elemanlı bir tek cisim vardır. Bu  $q$  elemanlı cisme *Galois cismi* denir.

**1.2. Tanım.** Eğer  $K$  cismi  $q = p^n$  mertebeli sonlu bir cisim, yani  $K = GF(q)$  ise,  $GL(2, K)$  ile gösterilen,

$$GL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0 \right\}$$

biçiminde tanımlı gruba *genel lineer grup* denir.

$GL(2, K)$ 'nin merkezi  $Z(GL(2, K))$  ile gösterilir ve  $GL(2, K)$ 'nin bir normal alt grubudur.

**1.3. Tanım.**  $PGL(2, K) = GL(2, K)/Z(GL(2, K))$  olarak tanımlanan ve  $PGL(2, K)$  ile gösterilen gruba *projektif genel lineer grup* denir.

**1.4. Tanım.**  $GL(2, K)$  grubunun determinantı 1 olan matrislerinden oluşan

$$SL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlı alt grubuna *özel lineer grup* denir.

**1.5. Tanım.**  $PSL(2, K) = SL(2, K)/Z(SL(2, K))$  biçiminde tanımlanan  $PSL(2, K)$  ile gösterilen gruba *projektif özel lineer grup* denir.

En çok çalışılan projektif gruplar  $PSL(2, \mathbb{Z})$ ,  $PSL(2, \mathbb{R})$  ve  $PSL(2, \mathbb{C})$  gruplarıdır.

**1.6. Tanım.**  $\Gamma$  bir topolojik grup olsun. Bu  $\Gamma$  grubunun hiçbir elemanı,  $\Gamma$ 'nin bir yığılma noktası olmuyorsa  $\Gamma$  grubuna *ayrık grup* denir.

**1.7. Tanım.**  $PSL(2, \mathbb{R})$  grubunun sonlu üretece sahip ayrık bir alt grubu vardır.  $\Gamma$  ile gösterilen bu alt gruba bir *Fuchsian grup* denir.

Her  $\Gamma$  Fuchsian grubu

- $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  (hiperbolik)
- $x_1, \dots, x_r$  (eliptik)
- $p_1, \dots, p_t$  (parabolik)
- $h_1, \dots, h_u$  (hiperbolik sınır elemanı)

üreteçleri ve

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^t p_k \prod_{l=1}^u h_l = 1$$

bağıntıları ile gösterilir. Kısaca  $\Gamma$  Fuchsian grubu  $(g; m_1, \dots, m_r; t; u)$  simgesine sahiptir. Burada  $g$  sayısı  $U/\Gamma$  Riemann yüzeyinin cinsidir.  $\Gamma$  Fuchsian grubu bu yüzeyin üzerinde ayrık olarak hareket eder.  $m_1, \dots, m_r \geq 2$  tamsayıları  $\Gamma$  grubunun periyotlarıdır.  $t$  sayısı parabolik sınıf sayısıdır.  $u$  sayısı ise hiperbolik sınır elemanlarının sayısıdır. Tez konusunun temeli olan Hecke Grupları hiperbolik sınır elemanı içermezler. Dolayısıyla birinci türden Fuchsian grup olduklarından  $(g; m_1, \dots, m_r; t)$  simgesiyle gösterilirler.

**1.8. Tanım.**  $\Gamma$ ,  $(g; m_1, \dots, m_r; t; u)$  simgesine sahip bir grup ve

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

olarak tanımlansın. Eğer  $\mu(\Gamma) > 0$  ise simgesi  $(g; m_1, \dots, m_r; t; u)$  olan bir  $\Gamma$  Fuchsian grubu vardır.  $L(\Gamma)$ , bir  $\Gamma$  grubunun limit noktalarından oluşan bir küme olmak üzere,  $L(\Gamma) = \mathbb{R}$  ise  $\Gamma$ , birinci türden bir Fuchsian gruptur ve  $\mu(\Gamma) > 0$  olur. Bir  $\Gamma$  Fuchsian grubu için bu grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı  $2\pi \cdot \mu(\Gamma)$  ile bulunur.  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma$  grubunun sonlu indekse sahip bir alt grubu iken bu grupların alanları oranını veren eşitlik  $[\Gamma : \Gamma_1] = 2\pi \cdot \mu(\Gamma_1) / 2\pi \cdot \mu(\Gamma)$ 'dir. Sadeleştirme yapıldığında  $[\Gamma : \Gamma_1] = \mu(\Gamma_1) / \mu(\Gamma)$  formülü elde edilir. Bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir.

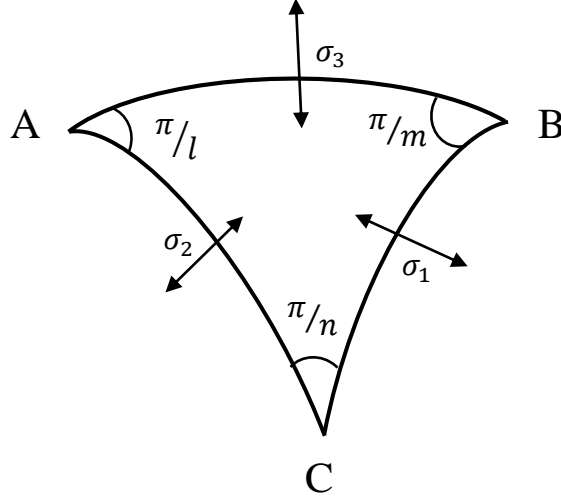
Burada  $2\pi \cdot \mu(\Gamma_1)$  ve  $2\pi \cdot \mu(\Gamma)$  sırasıyla  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma$  grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir.

Bu tezin önemli unsurlarından birisi de üçgen gruplardır.  $l, m, n$  sayıları ikiye eşit veya ikiden büyük tamsayılar olmak üzere, açıları  $\pi/l, \pi/m$  ve  $\pi/n$  olan hiperbolik bir üçgen ele alınsın. Şekil 1.2'de görülen bu üçgenin kenarlarındaki  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  yansımalarından oluşan bir  $\Gamma^*$  grubu

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I \rangle$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  yansımaları yön korumayan elemanlar;  $\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1$  ve  $\sigma_1\sigma_2$  yön koruyan elemanlar olarak adlandırılır.  $A$  köşesinin etrafındaki  $2\pi/l$  açılık dönme  $x = \sigma_2\sigma_3$  ve  $B$  köşesinin etrafındaki  $2\pi/m$  açılık dönme  $y = \sigma_3\sigma_1$  olmak üzere,  $C$  köşesinin etrafındaki  $2\pi/n$  açılık dönme  $xy$  olur. Bunlar yön koruyan izometrilere dir. Böylece  $\Gamma^*$  grubunun yalnız yön koruyan elemanlarıyla oluşturulan  $\Gamma = \langle x, y \mid (x)^l = (y)^m = (xy)^n = I \rangle$  şeklinde tanımlı bir alt grubu elde edilir.

Bu alt grup, Fuchsian bir grup olduğundan  $(0; l, m, n)$  şeklinde bir simgeye sahiptir ki bu simge genelde  $(l, m, n)$  olarak kullanılır.



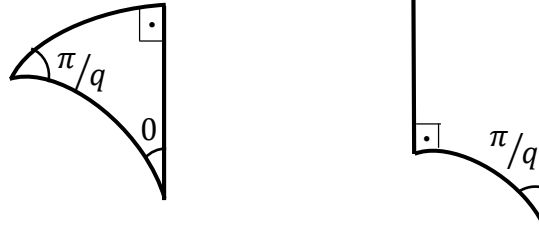
Şekil 1.2. Bir hiperbolik üçgen

**1.9. Tanım.** Aynı zamanda bir Fuchsian grup özelliğinde olan ve  $(l, m, n)$  simgesi ile gösterilen  $\Gamma = \langle x, y \mid (x)^l = (y)^m = (xy)^n = I \rangle$  şeklinde tanımlı bu  $\Gamma$  grubuna *bir üçgen grubu* denir.

$\Gamma$  grubunun indeksi 2 olduğundan bu grup,  $\Gamma^*$  grubunun bir normal alt grubudur.  $H(\lambda_q)$  Hecke grubu  $(0; 2, q, \infty)$  simgesiyle gösterilen bir üçgen gruptur. Parabolik elemanlar, sonsuz mertebeli eliptik elemanlar gibi ifade edilebilir. Buradan  $(xy)^\infty = 1$  durumu geçersiz olur ve  $H(\lambda_q)$  Hecke grubu,  $(0; 2, q, \infty)$  simgesiyle gösterilen bir üçgen grup olduğundan 2 ve  $q$  mertebeye sahip sonlu devirli iki tane grubun serbest çarpımına izomorftur.

$$H(\lambda_q) \cong (2, q, \infty) \cong \langle x, y \mid (x)^2 = (y)^q = 1 \rangle$$

şeklinde gösterilir. Bu durumda yukarıda tanımladığımız üçgen,  $\pi/2$ ,  $\pi/q$  ve  $\pi/\infty = 0$  açılarıyla birlikte Şekil 1.3'te gösterilen iki üçgenden birine dönüşür.



**Şekil 1.3.** Hiperbolik Üçgenler

Şimdi sık kullanılan bazı grup çeşitlerini hatırlayalım. Tek bir eleman ile üretilen gruplara *devirli gruplar* denir. Devirli gruplar  $C_n \cong \langle a : a^n = I \rangle$  biçiminde gösterilir. Üçgen grubu olarak gösterimleri de  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(1, n, n)$  şeklindedir. Bu gruplar  $|C_n| = n$  mertebelidir. Eğer  $m$  tek sayı ise  $C_{2m} = \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^m = I, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$  olduğundan bu devirli grubun üçgen grubu olarak gösterimi ise  $(2, m, 2m)$  biçimindedir.  $C_{2m}$  devirli grupları, cinsi  $g \geq 1$  olan yüzeylerde hareket ederler.

Düzgün bir çokgenin yön koruyan ve korumayan tüm simetrilerinden oluşan gruba *dihedral grup* denir. Bu gruplar  $D_n = \langle \alpha, \beta : \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$  biçiminde gösterilir.  $|D_n| = 2n$  mertebelidir.  $D_n$  dihedral grubu, üçgen grubu olarak  $(2, 2, n)$ ,  $(2, n, 2)$  veya  $(n, 2, 2)$  biçiminde gösterilebilir.

$n$  tane elemana sahip bir kümenin bütün permütasyonlarından oluşan bir küme, fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre grup oluşturur ve bu gruba *simetrik grup* denir. Simetrik grup  $S_n$  ile gösterilir.  $|S_n| = n!$  mertebelidir.

Simetrik gruba temel teşkil eden kümenin çift permütasyonlarından oluşan küme simetrik grubun bir alt grubudur ve bu alt gruba *alterne grup* denir. Alterne grup  $A_n$  ile gösterilir.  $|A_n| = n!/2$  mertebelidir. Çok kullanılan simetrik ve alterne gruplar  $D_3 \cong S_3 \cong (2, 2, 3)$ ;  $A_4 \cong (2, 3, 3)$ ;  $S_4 \cong (2, 3, 4)$ ;  $A_5 \cong (2, 3, 5)$  gruplarıdır.

**1.10. Tanım ( $\mu, n, t$  arasındaki bağıntı).**  $N, H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $\mu$  sonlu indeksli bir normal alt grubu ve  $N$ 'nin parabolik sınıf sayısı olarak gösterilen  $t$  sayısı da bu grubun parabolik devirli en büyük normal alt grubunun denklik sınıfının sayısı olsun.  $N$ 'nin seviyesi (level)  $n$ 'yi  $T^n \in \mathbb{N}$  şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı olarak tanımlanırsa  $\mu, n, t$  arasında bir bağıntıya ulaşılır. Bu bağıntı

$$\mu = n \cdot t$$

şeklindedir.

1.11 Tanımında verilen ve permütasyon metodu olarak bilinen metot,  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt gruplarının simgelerini belirlemek için kullanılmaktadır.

$\Gamma, (g; m_1, \dots, m_r; t; u)$  simgesine sahip bir grup iken parabolik elemanları sonsuz mertebeli eliptik elemanlar gibi düşünülürse  $\Gamma$  grubunun simgesi  $(g; m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+t})$  şeklinde yazılabilir. Burada  $m_{r+1} = \dots = m_{r+t} = \infty$  olur.  $\Gamma_1, \Gamma$  grubunun  $\mu$  indeksli bir normal alt grubu, başka bir deyişle  $[\Gamma : \Gamma_1] = \mu$  olsun.  $x_i^{v_i} \in \Gamma_1$  için  $v_i$  en küçük tamsayı iken  $m_i < \infty$  ise  $v_i < \infty$  ve  $v_i | m_i$  olduğu açıktır.  $\Gamma$  grubundaki  $x_i$ 'lerin bazıları  $\Gamma_1$ 'deki  $m_i$  üssüne sahip olabilir. Periyodlar  $1 \leq i \leq p$  için  $v_i = m_i$  ve  $x_{i+p}$  elemanları  $n_i < m_{i+p}$  üssüne sahip olacak şekilde yeniden düzenlenirse  $\Gamma$  grubunun  $(g; m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+t})$  simgesi  $p + q = r + t$  ve  $1 < k_i \leq \infty$  iken  $(g; m_1, \dots, m_p, n_1 k_1, \dots, n_q k_q)$  şeklinde yazılabilir.

**1.11. Tanım.** Simgesi  $(g; m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+t})$  şeklinde olan  $p + q = r + t$  ve  $1 < k_i \leq \infty$  iken  $(g; m_1, \dots, m_p, n_1 k_1, \dots, n_q k_q)$  olarak yazılabilen  $\Gamma$  grubu için  $\Gamma_1$ , bu  $\Gamma$  grubunun  $\mu$  indeksine sahip bir normal alt grubu ise  $\Gamma_1$  alt grubunun simgesi  $\left( g_1; k_1 \binom{\mu}{n_1}; \dots, k_1 \binom{\mu}{n_q} \right)$  şeklindedir. Burada  $k_i \binom{\mu}{n_i}$  ifadesi  $k_i$  mertebeli elemandan  $\mu/n_i$  tane olduğunu belirtir. Riemann-Hurwitz formülü ile cinsi gösteren  $g_1$  sayısı bulunabilir. Bu metoda *permütasyon metodu* denir (Singerman, 1970).



Reidemeister-Schreier yöntemi olarak bilinen ve 1.12 Tanımında verilen metot  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının sonlu indekse sahip normal alt grupları için üreteçleri bulmakta kullanılır:

**1.12. Tanım.** Sonlu  $\{g_i\}$  üreteçleriyle üretilen bir  $G$  grubu ve onun  $H$  ile gösterilen bir alt grubu olmak üzere  $H$  alt grubunun üreteçleri aşağıdaki şekilde bulunur:

- 1)  $H$  alt grubu için bir Schreier sistemi (transversali) seçilir.
- 2) Schreier sisteminin bir elemanı,  $G$  grubunun bir üreteci ve bu iki elemanın çarpımının koset gösterimlerini içeren sıralı çarpımları alınır (Johnson, 1980).

$\Sigma$  ile gösterilen bir Schreier sistemi (a) ve (b) şartlarını sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesidir:

(a)  $I \in \Sigma$

(b)  $\Sigma$  sağdan sadeleştirme özelliği ile kapalıdır. Başka bir deyişle  $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_r} \in \Sigma$  iken  $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_{r-1}} \in \Sigma$  elemanı da  $\Sigma$  kümesinde olmalıdır.

$\Sigma$ ,  $H$  alt grubu için bir Schreier transversali iken  $H$  alt grubunun bir Schreier üreteci

$(\Sigma$ 'nın bir elemanı)  $\times$  ( $G$ 'nin bir üreteci)  $\times$  (önceki çarpımın koset gösterimi) $^{-1}$

biçiminde gösterilir (Johnson, 1980). Bu metoda *Reidemeister-Schreier yöntemi* denir.

**1.13. Tanım.**  $G$ , bir grup iken  $g, h \in G$  ve aynı zamanda  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$  olmak üzere  $\langle [g, h] : g, h \in G \rangle$  ile tanımlanan  $G'$  ile gösterilen alt gruba bu  $G$  grubunun *komütatör alt grubu* denir.

**1.14. Yardımcı Teorem.**  $G', G$  grubunun bir komütatör alt grubu iken  $G/G'$  ile gösterilen bölüm grubu en geniş değişmeli bölüm grubu olarak tanımlanır. Başka bir deyişle  $G/N$  bölüm grubu,  $G$  grubunun  $G/G'$  bölüm grubundan farklı, değişmeli bir bölüm grubu ise  $G' \triangleleft N \triangleleft G$  şartı sağlanır ve bir  $\Phi: G/G' \rightarrow G/N$  homomorfizmi vardır.

**1.15. Tanım.** Üreteçleri arasında hiçbir bağıntı bulunmayan gruplara *serbest grup* denir.

**1.16. Tanım.** Parabolik elemanları içeren birinci türden Fuchsian grupların serbest grup olması için gerek ve yeter şart eliptik eleman içermemeleridir. Bu durumda bahsedilen gruplar  $F_{2g+t-1} \cong \langle g; \infty^{(t)} \rangle$  simgesiyle gösterilirler.

**1.17. Tanım.** Bir  $F$  grubunun  $X$  ile gösterilen bir alt kümesi için, bu alt kümeden  $H$  ile gösterilen bir grubun içine  $\Phi$  adı verilen herhangi bir fonksiyon var ise,  $\Phi$  adı verilen homomorfizmin  $F$  grubundan  $H$  ile gösterilen bir gruba  $\Phi^*$  adı verilen tek bir genişlemesi mevcuttur. Bu  $X$  kümesine  $F$  grubunun *serbest tabanı* denir (Lyndon ve Schupp, 1977).

Bir  $F$  grubunun  $X$  ile gösterilen bir alt kümesi için, 1.17 Tanımındaki şartı sağlayan  $X$  tabanı ile  $F$  grubu bir serbest grup oluşturur.

**1.18. Tanım.**  $X$  ile gösterilen serbest tabanın mertebesine  $F$  adlı grubun *rankı* denir (Lyndon ve Schupp, 1977).

Rankı 0 olan bir grup aşikâr, rankı 1 olan bir grup ise sonsuz mertebeden devirli gruptur.

**1.19. Tanım.**  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  ve  $X$  kümesinin mertebesi  $|X| = n$  ise  $F$  adı verilen grup  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  üzerinde *serbesttir* denir ve  $F_n$  ile gösterilir (Lyndon ve Schupp, 1977).

**1.20. Teorem.** İki serbest grup ancak ve ancak rankları eşit ise izomorftur (Lyndon ve Schupp, 1977).

**1.21. Teorem. (a)**  $F$  grubu ancak ve ancak  $F = \langle X_i \rangle$  biçiminde gösteriliyorsa bir serbest gruptur.

**(b)**  $G$  ile gösterilen her grup bir serbest grubun homomorfik olarak görüntüsüdür.

**(c)** Bir serbest grup torsion-free özelliğine sahiptir (bükümsüzdür), başka bir deyişle bir serbest grupta birim elemandan başka mertebesi sonlu bir eleman bulunamaz (Fine ve Rosenberger, 1999).

**1.22. Teorem (Nielsen-Schreier).** Bir serbest grubun alt gruplarından her biri serbest gruptur (Fine ve Rosenberger, 1999).

**1.23. Tanım.**  $A = \langle a_1, \dots; R_1, \dots \rangle$  ile  $B = \langle b_1, \dots; S_1, \dots \rangle$  iki serbest grup olsun.  $A$  ile  $B$  gruplarının serbest çarpımı  $G = A * B = \langle a_1, \dots, b_1, \dots; R_1, \dots, S_1, \dots \rangle$  ile gösterilir.  $A$  ve  $B$  gruplarına  $G$  grubunun çarpanları denir (Fine ve Rosenberger, 1999).

**1.24. Tanım.**  $A_\alpha = \langle \text{ür}A_\alpha : \text{bağ}A_\alpha \rangle$  serbest grupları  $\alpha \in I$  grupların bir ailesi iken bu grupların serbest çarpımı  $G = * A_\alpha$  ile gösterilir. Serbest çarpımın üreteçleri ve bağıntıları  $A_\alpha$  gruplarının üreteçlerinin kendi aralarında ve bağıntılarının kendi aralarında ayrık olarak birleşimlerinden oluşur (Fine ve Rosenberger, 1999).

**1.25. Teorem.**  $G = A * B$  olduğunda  $A \rightarrow G$  ve  $B \rightarrow G$  bire-bir eşlemeler olur.  $G$  grubunun  $A$ 'nın üreteçlerinden üretilen bir alt grubu

$$\langle A \text{ grubunun üreteçleri}, A \text{ grubunun bağıntıları} \rangle$$

biçiminde gösterildiğinden bu alt grup  $A$  grubuna izomorf olur. Bu durum  $B$  grubu için de geçerli olduğundan  $A$  ve  $B$  grupları  $G$  grubunun alt grupları gibi düşünülebilir (Fine ve Rosenberger, 1999).

Serbest çarpımlar ile serbest gruplar pek çok ortak özelliğe sahip olduklarından serbest gruplar için geçerli olan Nielsen-Schreier teoremi, Kurosh teoremi ile serbest çarpımlara genişletilmiştir.

**1.26. Teorem (Kurosh altgrup teoremi).**  $G$  grubu,  $A_\alpha$  alt gruplarının bir serbest çarpımı iken

$$G = \prod_{\alpha} * A_{\alpha}$$

ile gösterildiğinden,  $F$  bir serbest grup iken  $G$  grubunun bir  $H$  alt grubu da

$$H = F = \prod_{\beta} * \beta_{\beta}$$

ile gösterilir. Burada  $\forall \beta$  için  $\beta_{\beta}$  alt grubu, bir  $A_{\alpha}$  alt grubuna eşlenik olur (Cangül, 1993).

**1.27. Teorem.**  $G = A * B$  grubu için  $H \subset A$  ve  $K \subset B$  iken,  $H$  ve  $K$  alt grupları ile üretilen alt grup, bu grupların  $\langle H, K \rangle = H * K$  ile gösterilen bir serbest çarpımıdır (Cangül, 1996).

**1.28. Teorem.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubu, mertebesi 2 ve  $q$  olan sonlu üretece sahip iki tane devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Bu durum  $H(\lambda_q) \cong C_2 * C_q$  ile gösterilir (Macbeath, 1963).

**1.29. Tanım.**  $[G, X]$  bir topolojik dönüşüm grubunu göstermek üzere  $P \subset X$  olsun. Eğer  $g_1, g_2 \in G$  ve  $g_1 \neq g_2$  iken  $g_1 \cap g_2 = \emptyset$  oluyorsa  $P$ 'ye bir  $G$ -paketleme denir (Cangül, 1996).

$P$ 'ye bir  $G$ -paketleme demek,  $P$ 'de her bir yörüngeden en çok bir tane eleman bulunuyor demektir.

**1.30. Yardımcı Teorem.** Bir  $[G, X]$  dönüşüm grubunun  $H$  ve  $K$  ile gösterilen iki tane alt grubu için  $P$  bir  $H$ -paketleme,  $Q$  bir  $K$ -paketleme iken  $H$  ve  $K$  alt gruplarının üreteçleri ile üretilen  $A = \langle H, K \rangle$  ile tanımlı grup için  $P \cup Q = X$ ,  $P \cap Q \neq \emptyset$  ise  $A$  grubu  $H$  ile  $K$  gruplarının serbest çarpımıdır ve  $A \cong H * K$  ile gösterilir (Cangül, 1996).

**1.31. Tanım.**  $U$  üst yarı düzleminde  $F$  ile gösterilen açık bir küme iken

- i.  $\forall z \in U$  elemanı için  $G(z)$  yörüngesi  $\bar{F}$  ( $F$ 'nin kapanışı) ile en az bir noktada kesişir,
- ii.  $\forall z \in U$  elemanı için  $G(z)$  yörüngesi  $F$  ile en çok bir noktada kesişir,

şartları sağlanıyorsa  $F$  kümesi  $G$  için *bir temel bölgedir* denir (Cangül, 1996).

Şimdi graflarla ilgili bilgi verelim. Düzgün figürlere geçiş yapmak için graflardan yararlanacağız. Graflar ile ilgili daha detaylı bilgi için (Cangül, 2017) kaynağına bakınız.

**1.32. Tanım (Graf).** Köşe olarak adlandırılan elemanlardan oluşan sonlu bir  $V$  kümesi ile bu kümenin herhangi iki elemanının olduğu ikilileri kenar kabul eden sonlu bir  $E$  kümesi olsun.  $V$  ile  $E$  kümesinden oluşan  $G = (V, E)$  ile gösterilen yapıya *graf* denir.

Genel olarak,  $|E(G)| = m$  kenara ve  $|V(G)| = n$  köşeye sahip  $G = (V, E)$  ile gösterilen bir  $G$  grafi için  $n$  sayısı bu grafın mertebesini,  $m$  sayısı aynı grafın uzunluğunu gösterir. Bir  $v \in V(G)$  köşesi için,  $v$  köşesinin derecesi  $d_v$  ile gösterilir. Derecesi bir olan bir köşe, pendant (sarkık, sallantılı, flama) köşe olarak adlandırılır. Benzer şekilde pendant köşeye sahip bir kenar da pendant kenar olarak adlandırılır. Bir grafta bir köşenin en küçük derecesi  $\delta$  ve en büyük derecesi  $\Delta$  ile gösterilir. Bir  $G$  grafi için,  $e$  kenarı ile bağlı olan  $u$  ve  $v$  köşeleri bitişik (komşu) köşeler ise  $e = u \cdot v$  ile temsil edilir. Bu durumda  $u$  ve  $v$  köşelerine bitişik köşeler,  $e$  kenarına da  $u$  ve  $v$  ile bağlantılıdır, denir. Bitişiklik ve bağlantılılık, graf teorisinin grafların lineer cebirsel çalışmaları ile alakalı bir alt dalı olan spektral graf teoride çok önemli bir rol oynar.

Bir  $G$  grafindaki bir  $e$  kenarın her iki ucu da aynı  $v$  köşesi ise bu kenara o köşede bir *döngü* denir.  $v_1, v_2, \dots, v_n$  birbirinden farklı  $n$  tane köşe olmak üzere ardışık  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$  kenarlarına sahip olan bir  $G$  grafına *patika graf* denir ve  $P_n$  ile gösterilir. Bir patikanın iki uç köşesini bir kenar ile birleştirerek elde edilen bir  $G$  grafına *devir grafi* denir ve  $C_n$  ile gösterilir. Bir grafta hiç bir devir yoksa bu grafa *devirsiz graf* denir.

Bir merkezi köşe ve her biri sadece bu köşeye birleştirilen çevrel köşelerden oluşan bir  $G$  grafına *yıldız graf* denir.  $n$  tane köşeye sahip bir yıldız graf  $S_n$  ile gösterilir.  $n - 1$  tane kenarı vardır.  $v_1, v_2, \dots, v_n$  birbirinden farklı  $n$  tane köşe olmak üzere bu  $n$  tane köşeyi birleştiren tüm kenarların çizilmesiyle elde edilen bir  $G$  grafına  $n$  köşeli bir *tam graf* denir ve  $K_n$  ile gösterilir. Bir tam grafa her bir köşe diğer tüm köşelerle birleşeceğinden bu tam grafın  $\frac{n(n-1)}{2}$  tane kenarı vardır.  $r$  tane köşeye sahip bir  $A$  köşe kümesi ve  $s$  tane köşeye sahip bir  $B$  köşe kümesi için  $A$ 'nın her bir köşesini  $B$ 'nin her bir köşesine birleştirerek elde edilen bir  $G$  grafına *iki parçalı tam graf* denir.  $|A| = r$  ve  $|B| = s$  olduğundan bu graf  $K_{r,s}$  ile gösterilir.  $K_{r,s}$  grafı,  $r + s$  tane köşeye ve  $r \cdot s$  tane kenara sahiptir. Bir  $C_r$  devir grafının herhangi bir köşesine  $s$  uzunluklu bir  $P_{s+1}$  patika grafının eklenmesiyle elde edilen grafa bir *larva grafi* denir ve  $T_{r+s}$  ile gösterilir. Bir larva grafi  $r + s$  tane köşe ve  $r + s$  tane kenara sahiptir.

Bir  $G$  grafında  $u$  ve  $v$  iki tane köşe olmak üzere  $u$ 'dan  $v$ 'ye giden bir patika bulunabilirse bu iki köşeye  $G$  grafında *bağlantılı köşeler* denir. İki köşenin bağlantılı olması, komşu olmasından farklı bir kavramdır. Komşu iki köşe bir tek kenar ile birleştirilir. Bağlantılı iki köşe ise bir patika ile birleştirilir. Bu patika tek bir kenar da olabilir. Özetle komşu iki köşe çifti bağlantılı iken, bağlantılı köşe çifti komşu olmayabilir. Bir  $G$  grafindaki her köşe çifti bağlantılı bir köşe çifti ise bu  $G$  grafına *bağlantılı graf* denir. Bağlantılı olmayan bir grafa da *bağlantısız graf* denir. Hiç bir devir içermeyen  $n$  tane köşeye sahip bağlantılı bir  $G$  grafına  $n$  köşeli *ağaç graf* denir ve  $T_n$  ile gösterilir.

**1.33. Tanım (Derece dizisi).** Bir  $G$  grafının tüm köşelerinin derecelerini içeren kümeye  $G$  grafının bir *derece dizisi* denir ve  $DS(G) = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  şeklinde gösterilir.

**1.34. Tanım.**  $D$  kümesi, azalmayan ve negatif olmayan tamsayıların bir kümesi olsun. Eğer bir  $G$  grafının derece dizisi  $D$  kümesine eşit ise  $D$ 'ye  $G$  grafının bir *çizimi* (*realization*) ya da *çizilebilir (realizable) derece kümesi* denir.

Şimdi figürler ve düzgün figürler ile ilgili bazı tanımları verelim.

**1.35. Tanım.**  $G$ , sonlu bağlantılı bir graf olsun. 2-boyutlu hücrelerin birleşiminden oluşan  $S - G$  bölgesinin sınırları hariç olacak şekilde bir kompakt bağlantılı  $S$  yüzeyi içine sonlu bağlantılı bir  $G$  grafının gömülmesine *figür* denir.

Bu figürü  $M$  ile gösterelim. Figürler yönlendirilebilir ya da yönlendirilemez olabilirler. Bu çalışmada  $S$  yüzeyini yönlendirilebilir bir yüzey olarak ele alacağız.

**1.36. Tanım.** Bir  $M$  figürünün  $g$  ile gösterilen cinsi, üzerine gömüldüğü  $S$  yüzeyinin cinsi gibi tanımlanabilir. Bu cins aşağıdaki eşitlikle bulunabilir. Bahsedilen  $M$  figürünün köşe sayısı  $|V|$ , kenar sayısı  $|E|$  ve yüz sayısı  $|F|$  olmak üzere,

$$\chi(M) = |V| - |E| + |F| = \begin{cases} 2 - 2g; & \text{Eğer } S \text{ yönlendirilebilir ise} \\ 2 - g; & \text{Eğer } S \text{ yönlendirilemez ise} \end{cases}$$

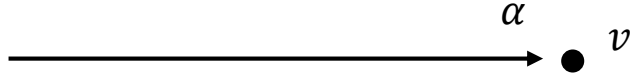
eşitliğine *Euler karakteristiği* denir.

**1.37. Tanım.** Bir  $M$  figürünün yüzlerinin sayısının en küçük ortak katı  $m$  ve aynı figürün köşelerinin sayısının en küçük ortak katı  $n$  ise bu durum  $\{m, n\}$  ile ifade edilir.  $\{m, n\}$  ikilisine  *$M$  figürünün tipi* denir.

**1.38. Tanım.** Bir  $S$  yüzeyi üzerinde hareket eden bir  $M$  figürünü ele alalım. Aynı  $S$  yüzeyi üzerinde köşe ve yüzlerin yer değiştirmesiyle oluşan figüre  $M$ 'nin *dual figürü* denir ve bu dual figürün tipi de  $\{n, m\}$  şeklindedir.

**1.39. Tanım.** Bir kenar ve buna bağlı bir köşeden oluşan bu ikiliye  $M$ 'nin *bir dartı* denir.

Bu dart, Şekil 1.4'te görüldüğü gibi kenar üzerinde bağlı bir köşeye doğru çizilen bir ok ile gösterilir.  $M$ 'nin dartlarının kümesini  $\rho_{dart}$  ile göstereceğiz.

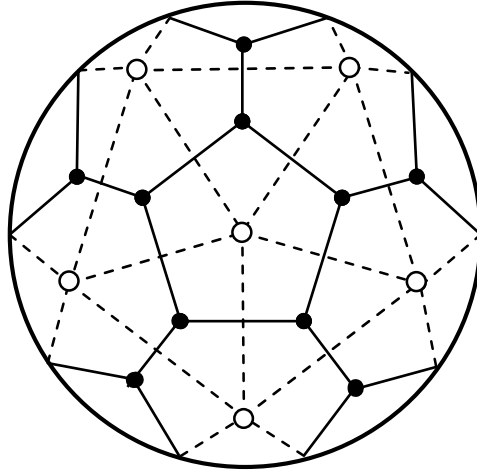


**Şekil 1.4.** Bir  $v$  köşesine ait bir  $\alpha$  dartı (oku)

**1.40. Tanım.**  $M$ 'nin dartlarının etki alanını (yönünü) koruyan  $S$ 'nin yön koruyan homeomorfizmine  $M$ 'nin bir otomorfizmi denir.

**1.41. Tanım.**  $M$ 'nin tüm otomorfizmlerinin kümesine  $M$ 'nin bir otomorfizm grubu denir ve  $AutM$  ile gösterilir.

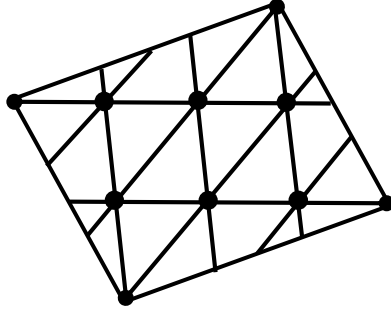
**1.42. Tanım.**  $M$  figürünün  $AutM$  ile gösterilen otomorfizmlerinin grubu,  $M$ 'nin  $\rho_{dart}$  ile gösterilen dartlarının kümesi üzerinde geçişli (transitive) ise  $M$  figürüne bir düzgün figür denir.



**Şekil 1.5.** Bir projektif düzlemde bir düzgün figür ve duali

Bir figür düzgün ise tüm köşeleri kendi içinde aynı değere, tüm yüzleri de kendi içinde aynı değere sahiptir. Bu ifade aynı zamanda, her bir köşeye bitişik aynı sayıda yüz, her bir yüze bitişik aynı sayıda köşe var anlamındadır.





**Şekil 1.6.** Tor üzerine  $K_7$  tam grafinin gömülmesiyle elde edilen  $\{6,3\}_{2,1}$  düzgün figürü

Şimdi düzgün bir  $M$  figürü için Euler karakteristiğini tanımlayalım.

**1.43. Tanım.** Cinsi  $g$ , tipi  $\{m, n\}$  olan bir  $M$  düzgün figürünün dartlarının sayısı  $|Aut(M)|$  sayısına eşittir. Asimetrik (chiral) bir düzgün figürün dartlarının sayısı  $|Aut(M)| = 2 \cdot |E|$  ve yansımali bir figürün dartlarının sayısı  $|Aut(M)| = 4 \cdot |E|$ 'dir.  $|M| = n \cdot |V| = 2 \cdot |E| = m \cdot |F|$  eşitliği ve Euler karakteristiğinden bu  $M$  düzgün figürünün cinsini

$$g = g(M) = \begin{cases} |Aut(M)| \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4m} - \frac{1}{4n} \right) + 1 ; \text{Eğer } M \text{ yönlendirilebilir ve yansımali ise} \\ |Aut(M)| \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \right) + 1 ; \text{Eğer } M \text{ yönlendirilebilir ve asimetrik ise} \\ |Aut(M)| \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \right) + 2 ; \text{Eğer } M \text{ yönlendirilemez ise} \end{cases}$$

eşitliği ile bulabiliriz. Bu tezde yönlendirilebilir yüzeyler üzerinde çalışıldığından,

$$\chi(M) = |V| - |E| + |F| = 2 - 2g = |Aut(M)| \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right)$$

eşitliğine bir  $M$  düzgün figürü için Euler karakteristiği denir.

Figürler ile üçgen gruplarının normal alt grupları arasında oldukça önemli bir ilişki vardır. Jones ve Singerman (1978), düzgün figürler ile  $(2, m, n)$  simgeli üçgen grupların normal alt grupları arasında birebir dönüşümün varlığını göstermiştir. Bu dönüşüm yardımıyla biz de  $H(\lambda)$  Hecke gruplarının normal alt grupları hakkında pek çok sonuç elde edeceğiz.

**1.44. Tanım (Hecke grubu).**  $\lambda \in \mathbb{R}$  ve  $H(\lambda) < PSL(2, \mathbb{R})$  olmak üzere,

- i.  $\lambda < 2$  iken  $q \geq 3$  ve  $q \in \mathbb{R}$  değerleri için  $\lambda = \lambda_q = 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$
- ii.  $\lambda \geq 2$  iken  $\lambda \in \mathbb{R}$

olarak tanımlı  $H(\lambda_q)$  alt grubuna *Hecke grubu* denir (Hecke, 1936).

1.44 Tanımına göre Hecke grupları için aşağıdakiler söylenebilir:

- 1)  $H(\lambda_q)$ 'nin bir Fuchsian grup olması için gerek ve yeter şart  $H(\lambda_q)$ 'nin bir temel bölgesinin olmasıdır.
- 2)  $H(\lambda_q)$ 'nin bir temel bölgeye sahip olması için gerek ve yeter şart  $\lambda < 2$  olduğunda  $\lambda = \lambda_q = 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ ,  $q \geq 3$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  veya  $\lambda \geq 2$  iken  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmasıdır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde ilk olarak tezin çıkış noktası olan kuramsal temellerden bahsedilecektir. Sonrasında düzgün figürler ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

$H(\lambda)$  ile gösterilen Hecke grupları ilk olarak 1936 yılında Erich Hecke tarafından yayımlanan makalede geçmektedir. Hecke, bu makalede  $H(\lambda)$  gruplarının üreteçlerini belirlemiş, ve bu grupların hangi  $\lambda$  değerleri için bir temel bölgeye sahip olduğunu tespit etmiştir. Böylece  $H(\lambda)$  grubunun bir Fuchsian grup olması için gerek ve yeter şartın sağlanacağını belirlemiştir.  $H(\lambda_q)$  Hecke grubu,  $PSL(2, \mathbb{R})$  grubunun mertebesi 2 olan  $R(z) = -\frac{1}{z}$  ve mertebesi  $q$  olan  $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$  üreteçleri ile üretilen bir ayrık alt grubudur. Rosen (1954), sürekli kesirleri kullanarak  $q = 4$  ve  $q = 6$  değerleri için  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun elemanlarının yer değiştirmesiyle ilgili gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Coxeter ve Moser (1957),  $q = 5$  değeri için  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun elemanlarının bir sınıflandırmasını vermiştir. Rosen (1954-1977) ve Leutbecher (1967),  $H(\lambda_5)$  Hecke grubu ile ilgili çalışmalar yapmıştır.  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $q = 3$  durumu literatürde modüler grup olarak bilinir ve bu grup ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu grup, elemanlarının katsayıları rasyonel tamsayılar olan gruptur ve  $PSL(2, \mathbb{Z})$  ile de gösterilir. Newman (1964a-1964b), modüler grubun kuvvet ve komütatör alt gruplarını incelemiştir. Ayrıca modüler grubun serbest alt grupları ile ilgili çıkarımlarda bulunmuştur. Newman (1963), Mc Quillan (1965), Macbeath (1969) ile Ivrişsimtziş ve Singerman (2005) temel denklik alt grupları ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Macbeath (1963),  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun, mertebesi 2 ve  $q$  olan sonlu üreteçli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olduğunu göstermiştir.

Jones ve Singerman (1978),  $H(\lambda)$  Hecke grubunun normal alt gruplarını düzgün figürler ile arasındaki bire bir dönüşüm yardımıyla tespit etmiştir. Cangül (1993), bu dönüşümden yararlanarak Hecke gruplarının normal alt gruplarını çalışmıştır. O zamana kadar cinsi 7'ye kadar olan düzgün figürler bilindiğinden Hecke gruplarının cinsi 7'ye kadar olan normal alt gruplarının simgelerini belirlemiş, grup yapıları ve özelliklerini çalışmıştır.

Conder ile Dobcsanyi (2001), cinsi 15'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri belirlemiştir. Conder (2006), cinsi 101'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri belirlemiş ve böylece Hecke gruplarının cinsi 101'e kadar olan normal alt gruplarını çalışmak mümkün olmuştur. Düzgün figürler sayesinde Jones ve Singerman tarafından verilen permütasyon metodu kullanılarak Hecke gruplarının normal alt grupları tespit edilecektir. Delen ve Cangül (2018),  $\Omega$  ile gösterilen omega değişmezi olarak adlandırılan yeni bir topolojik graf değişmezi tanımlamış ve özelliklerini vermiştir. Bu değişmez Hecke gruplarının normal alt gruplarının rankı ile ilgili parametrelerde kullanılacaktır.

Şimdi düzgün figürler ile ilgili temel bilgiler verelim. Detaylı bilgi için (Kepler, 1619), (Heawood, 1890), (Heffter, 1898), (Klein, 1879), (Dyck, 1880), (Burnside, 1911), (Brahana, 1927), (Jones ve Singerman, 1978), (Bryant ve Singerman, 1985), (Sah, 1969), (Jones ve Singerman, 1996), (Jones, 1997), (Gardiner, Nedela, Siran ve Skoviera, 1999), (Biggs, 1971), (James ve Jones, 1985), (Jones, Nedela ve Skoviera, 2007), (Sherk, 1959), (Kwak ve Kwon, 2005), (Du, Kwak ve Nedela, 2005), (Conder ve Dobcsanyi, 2001), (Breda d'Azevedo, Jones, Nedela ve Skoviera, 2006), (Wilson, 1978a), (Wilson, 1978b), (Grothendieck, 1984), (Coxeter, 1948), (Tucker, 1983), (Garbe, 1969), (Garbe, 1978), (Scherwa, 1985), (Bergau ve Garbe 1989), (Coxeter ve Moser, 1957), (Anderson, 2007), (Firby ve Gardiner, 2001), (Beardon, 1983), (Coxeter, 1989), (Conder, 2006), (Van Wijk, 2009) ve (Conder, 2011) kaynaklarına bakılabilir.

Düzgün figürlerin belki de en ünlü örnekleri, beş Platonik çokyüzlülerdir. Bununla birlikte, bu konuya büyüleyici boyutlar kazandıran, küre üzerinde olmayan düzgün figürlerin zenginliğidir. Bu tür figürler, ortaçağ gökbilimcileri tarafından gezegen sistemini açıklama girişimlerinde dikkate alınmıştır. Bununla ilgili örnekler, 1619'da Kepler'in çalışmasında ortaya çıkan yıldız şeklinde çokyüzlülerdir. İki yüzyıldan fazla bir süre sonra figürler ve düzgün figürler, birbiriyle alakası olmayan iki ayrı araştırmada yeniden ortaya çıkmıştır. İlki, esas olarak dört renk probleminin ortaya çıkması ve Heawood (1890) tarafından ortaya atılan harita renklendirme problemi ile ilgilidir. Bu bağlamda Heffter (1898), asal mertebeden tam grafların yönlendirilebilir yüzeylerde düzgün olarak gömülmesini keşfetmiştir. Hemen hemen aynı zamanda, cinsi üç olan

yüzeydeki düzgün figürler, Klein (1879) ve Dyck (1880) tarafından, çoklu periyodik (veya otomorfik) karmaşık fonksiyonların tamamen farklı bir bağlantılı yapılarında incelenmiştir. Burnside (1911) tarafından yazılan monografide, grupların geometrik bir temsilinin bir yolu olarak düzgün figürler de ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte, düzgün figür terimi ilk kez 1927'de Brahana tarafından tanıtılmıştır. Modern yönelimli düzgün figürler teorisinin temelleri, Jones ve Singerman (1978) ile Bryant ve Singerman (1985) tarafından atılmıştır Jones ve Singerman (1996) ve Jones (1997) tarafından yazılan art arda yazılan iki makale, aynı zamanda figürler teorisi, gruplar teorisi, geometri arasındaki büyüleyici bağlantılara işaret eder. İki boyutlu projektif özel lineer gruplara izometrik olan otomorfizm gruplarına sahip olan yönlendirilebilir düzgün figürlerin bir listesi Sah (1969) tarafından oluşturulan sonuçlardan çıkarılabilir. Tam grafların yönlendirilebilir düzgün yüzeylere gömülmesi ile ilgili sınıflandırmalar Biggs (1971) tarafından başlatılmış, James ile Jones (1985) tarafından tamamlanmıştır. Yönlendirilebilir yüzeylerde 2'den 15'e kadar olan tüm düzgün figürler ve yönlendirilemez yüzeylerde 2'den 30'a kadar olan tüm düzgün figürler hesaplamalı grup teorisi yaklaşımıyla Conder ve Dobcsanyi (2001) tarafından sınıflandırılmış ve numaralandırılmıştır. Bu iş için kapsamlı araştırma ve paralel işlemler yapılmış, yüksek düzeyde optimize edilmiş bir yazılım ve buluşsal yöntem kullanılmıştır. Çift taraflı tam grafların, çok taraflı tam grafların ve küplerin yönlendirilebilir düzgün yüzeylere gömülmesi ile ilgili en son ilerlemenin örnekleri Jones, Nedela ile Skoviera (2007), Kwak ile Kwon (2005) ve Du, Kwak ile Nedela (2005, 2007) tarafından verilmiştir. Kiral (asimetrik) figürler, Breda d'Azevedo, Jones, Nedela ve Skoviera (2006) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Conder (2006), cinsi 2 ile 101 arasındaki yönlendirilebilir yüzeyler üzerindeki tüm düzgün figürleri ve cinsi 2 ile 202 arasındaki yönlendirilemez yüzeyler üzerindeki tüm düzgün figürleri sıralamıştır. Son olarak cinsi 2 ile 301 arasındaki yönlendirilebilir yüzeyler üzerindeki düzgün figürler sıralanmıştır (Conder, 2011).

Düzgün figürlerin görselleştirilmesi ile ilgili çalışmalar, Hanson'ın (1994) etkileyici görselleştirmelerinden esinlenerek, sicim kuramının (string theory) yüksek boyutlu uzaylarının yapısını anlama girişiminden başlamıştır. Burada baz uzayının topolojik yapısı önemlidir. Bir düzgün figür, kapalı bir yüzeyin, köşe çiftlerini birleştiren kenarlarla

sınırlanan yüzlerle döşenmesidir. Burada köşe, kenar ve yüzler en fazla sayıda simetriye sahiptir. 0 ve 1 cinsi (küre ve tor) için düzgün figürlerin nasıl oluşturulacağı ve gösterileceği iyi bilinmektedir. Platonik katılar iyi bilinen birer örnektir. Cins 2 ve üstü için düzgün figürler, cinsi 1 olan düzgün figürleri elde etme yönteminin geliştirilmesiyle uzay modelleri oluşturularak elde edilebilir. Yöntem, tor için kullanılan yöntemin geliştirilmesine dayanır. Uygun cinse sahip şekiller, tüpleştirme yoluyla düzgün figürlerden türetilir, kenarların yerini tüpler alır. Mozaikler, grup teorisi ve hiperbolik geometri kullanılarak üretilir. Bunlar ilgi çekici şekiller ve görüntüler koleksiyonudur.

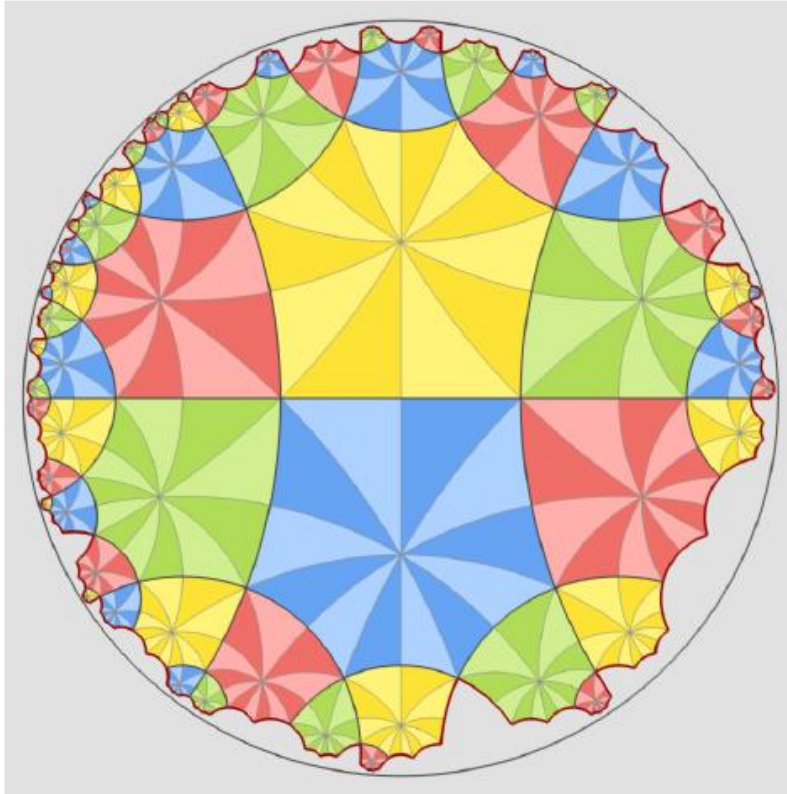
Düzgün figürler, matematiğin birçok farklı dalının kesişme noktasında bulunur (Nedela, 2001). Genel olarak, bir cebirsel yön (simetri) ve bir geometrik yön (şekil) vardır ve bunlar örneğin, yüzey topolojisi, saymaya dayalı grup teorisi, graf teorisi, hiperbolik geometri ve cebirsel geometri açısından incelenebilir. Mozaikler, bilgisayar grafikleri ve sayısal benzetimlerde öne çıkar. En düzenli mozaığın neye benzeyeceği merak edilebilir. Ayrıca bu şekiller sanatsal açıdan da ilgi çekicidir. Simetri, tüm bunların altında yatan güçlü bir temadır ve son yıllarda önde gelen matematikçilerin yayınlarına konu olmaktadır (Conway ve diğerleri, 2008), (Stewart, 2008).

**2.1. Tanım (Mozaik döşeme).** Bir düzlemin, nokta çiftlerini (köşeler) birleştiren yaylarla (kenarlar) sınırlanan, birbirleriyle çakışmayan basit bağlantılı bölgelerle (yüzlerle) kaplanmasına *düzlemin mozaiklenmesi* veya *mozaik döşeme* denir.

Genel olarak düzgün figürler ve düzlemin düzgün figürler ile kaplanması demek olan mozaikler, saymaya dayalı grup teorisi ile uzun ve güçlü bir bağlantıya sahiptir, çünkü simetri her ikisinde de anahtar kavramdır. Saymaya dayalı grup teorisinde, tipik olarak temsil teorisi (representation theory) kullanılarak ayrık gruplar incelenir. Burada bir grup bir temsil aracılığıyla tanımlanır. Örneğin bir  $A$  üretici ve bir  $B$  bağıntısından oluşan bir küme ile bir  $G$  grubu  $G = \langle A; B \rangle$  şeklinde gösterilir. Burada  $A$  ve  $B$  kümeleri genellikle elemanların bir numaralandırması olarak verilir. Bir üreteç bir semboldür; grubun her elemanı bir kelime, yani bir sembol dizisi olarak tanımlanabilir.  $n$  tane benzer  $X$

sembolünün dizileri için  $X_n$  gösterimi kullanılır. Herhangi bir bağıntı tanımlanmamışsa, grup sonsuz sayıda elemana sahip serbest bir gruptur. Bir bağıntı,  $I$  özdeşliği ile tanımlanan bir serbest grubun bir elemanıdır. Bağıntılar yardımıyla, orijinal serbest grubun bölüm grupları tanımlanır.

Temsil teorisinde, grup elemanları matrisler olarak temsil edilir. Bu ise grup işlemi matris çarpımı ile temsil edilebilir demektir. Burada, elemanlar kürenin, Öklid düzleminin veya hiperbolik düzlemin izometrik dönüşümlerini ifade eder. Bu elemanlar küresel geometride  $3 \times 3$  dönme matrisleriyle, iki boyutlu Öklid geometrisinde  $3 \times 3$  homojen dönüşüm matrisleriyle, hiperbolik geometride Poincare disk modeli kullanılarak Mobius dönüşümleri için  $2 \times 2$  karmaşık matrisler ile tanımlanabilir. Yüzey topolojisinde genellikle, soldan çarpma işlemi kullanılır ve dönüşümler küresel dönüşümler olarak yorumlanır. Alternatif ve eşdeğer bir yorum, geçerli bir çerçeveye göre yerel dönüşümleri kullanarak sağdan çarpmayı kullanmaktır.



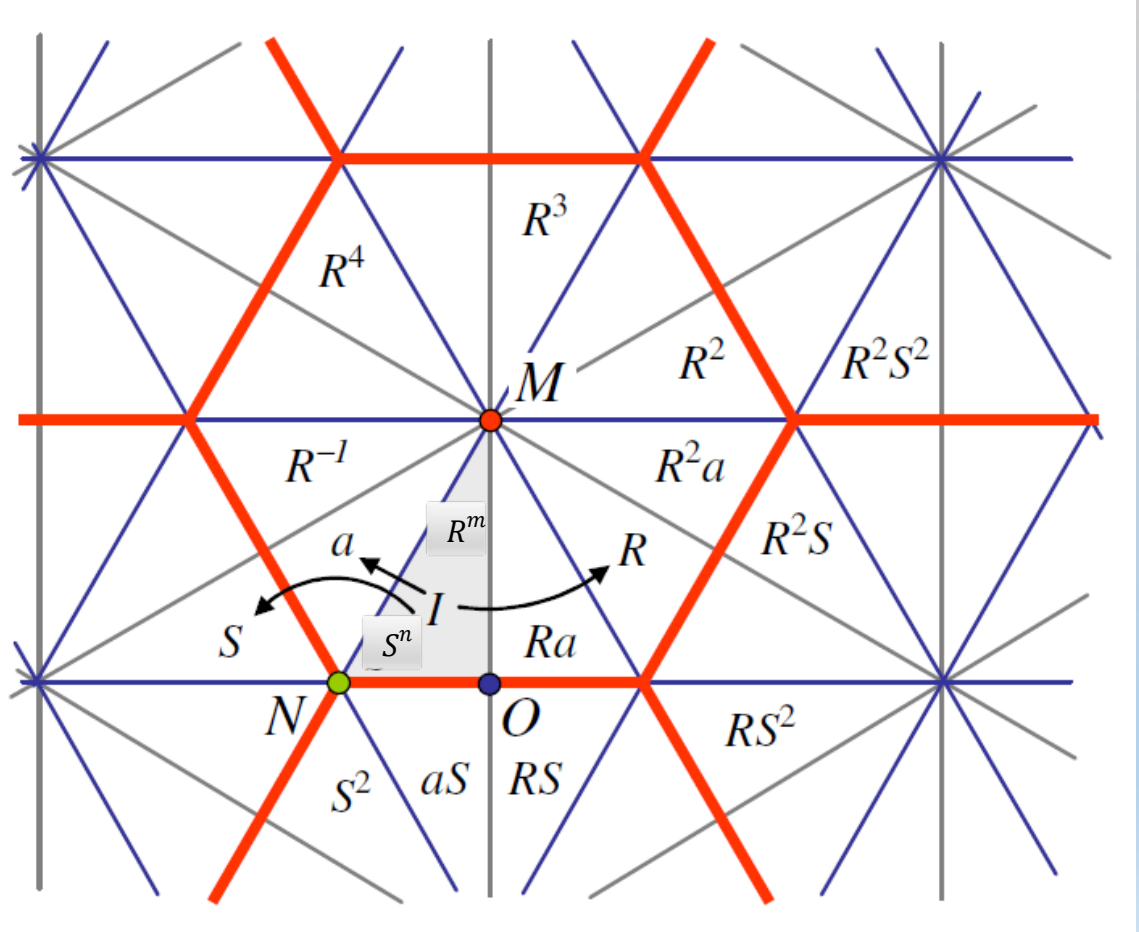
**Şekil 2.1.**  $(F, m, n) = (64, 6, 4)$  düzgün figürünün kesit modeli

Hiperbolik düzlem için model olarak Poincare disk modeli kullanır. Burada hiperbolik düzlem,  $\mathbb{C}$  karmaşık düzleminde  $|z| < 1$  diskinde dönüşür. Poincare disk modelinde güçlü bir "perspektif (derinlik)" bozukluğu vardır. Daireye yakın alanlar güçlü bir şekilde sıkıştırılmıştır (Coxeter, 1989). Şekil 2.1, hiperbolik düzlemin altıgenlerle kısmi bir mozaiklemesini göstermektedir ve her ne kadar görüntü aksini kuvvetle gösterse de burada tüm altıgenler eş kenarlıdır ve aynı boyuta sahiptir. Poincare disk modelinde mesafeler ve alanlar bozuk, ancak kenarlar arasındaki açılar doğru gösterilir. Dönüşüm açı-korur özelliğindedir. Hiperbolik düzlemdeki sonsuz düz çizgiler, birim çembere dik olarak yaklaşan dairesel yaylara eşlenir, orijinden geçen çizgiler diskin ortasındaki düz çizgilerle eşlenir.

Düzenli bir mozaik, uyumlu çokgenlere sahip bir döşemedir. Böyle bir mozaikleme, çokgenin kenar çiftleri arasında tam bir eşleşme olduğunda ve mozaiklemenin her bir köşesi etrafındaki açılarının toplamı  $2\pi$ 'ye eşit olduğunda elde edilebilir (Beardon, 1983). Buradaki şartlar, mozaikleme yapabilmek için gerekli şartlardır. Eşleştirme, çokgenin bir kenarının dönüştürülmüş çokgenin bir kenarına eşleneceği ve içlerinin çakışmayacağı şekilde izometrik bir dönüşümdür. Bu dönüşümlerin tekrar tekrar uygulanması, düzlemin bir kaplamasını verir. Düzlemi bu şekilde çakışmadan kaplayan bölgeye temel bölge denir. Düzlemi üçgenlerle kaplamak için  $\pi/m, \pi/n, \pi/l$  açılara sahip bir  $MNO$  üçgeni düşünülebilir; burada  $m, n$  ve  $l$  sayıları 2'ye eşit veya 2'den büyük tam sayılardır (bkz. Şekil 2.2). Kenarlara  $a, b$  ve  $c$  yansımalarının tekrar tekrar uygulanması, düzlemin bir kaplamasını verir ve  $M, N$  ve  $O$ 'da sırasıyla  $2m, 2n$  ve  $2l$  tane üçgen buluşur. Her tepe noktasında  $n$  tane çokgenin (ve kenarların) buluşacağı şekilde  $m$  kenarlı çokgenlerle düzlemin bir kaplaması,  $\{m, n\}$  mozaikleme olarak gösterilir. Burada  $\{m, n\}$  Schläfli sembolüdür. Böyle bir mozaikleme,  $l = 2$  alınarak ve  $2m$  tane üçgeni birbirine yapıştırarak üçgen bir mozaiklemeden türetilir.  $R$ , çokgenin merkezi olan  $M$  etrafında  $2\pi/m$  açılık bir dönüşü ve  $S$  çokgenin bir tepe noktası olan  $N$  etrafında  $2\pi/n$  açılık bir dönüşü gösterir. Başka bir deyişle,  $R$ , bir çokgenin kendisi üzerine  $m$ . mertebeden bir eşlemesidir ve  $S$ , bir tepe noktasında birleşen kenarlarının  $n$ . mertebeden bir eşlemesidir. Simetri grubunun gösterimi  $G(m, n) = \langle R, S; R^m, S^n, (RS)^2 \rangle$  şeklindedir.  $RS$  terimi,  $O$  etrafında bir dönüşü belirtir. Bu grup için temel bir çokgen, düzlem üzerindeki üçgen



örgünün iki üçgeninden oluşan bir çifttir.  $R$  ve  $S$ , mozaikleme otomorfizmleridir. Bunlar mozaiklemeyi bire bir olarak kendi üzerine resmeder. Örneğin mozaikleme bir kenarındaki  $a$  yansımasını dahil ederek mozaikleme yansıtılmasına da izin verirsek, düzlem üzerindeki üçgen mozaikleme bir üçgeni de bir temel üçgen olur ve  $a$  yansıması da bir otomorfizmdir.



**Şekil 2.2.**  $\{m, n\}$  mozaik kaplaması

Figür, sınırları olmayan kapalı bir yüzeyin,  $V$  köşe çiftlerini birleştiren  $E$  kenarlarıyla sınırlanan, örtüşmeyen, basit bağlantılı  $F$  yüzlerle mozaiklenmesidir. Euler-Poincare özelliği  $\chi = V - E + F$  yüzeyin bir değişmezidir. Yönlendirilebilir bir yüzey için  $\chi$  çifttir ve bir yüzeyin cinsi  $g$ , yaklaşık olarak delik sayısıdır,  $g = (2 - \chi)/2$ 'den çıkar. Köşeleri ve yüzleri yer değiştirerek ikili bir dual figür elde edilir. Bir figürün otomorfizmi,

otomorfizmler olarak  $R$  ve  $S$  otomorfizmlerini içeren bağlantılı bir otomorfizm grubu iken insidansı koruyan (yapı-koruyan) elemanlarının bir permütasyonudur (Coxeter ve Moser 1957). Bir figür ki onun bağlantılı bir otomorfizm grubu  $R$  ve  $S$  otomorfizmlerini içeriyorsa (bu durum düzlemin mozaiklerle kaplanması gibi düşünülebilir), düzenlidir. Bu durumda grubun mertebesi  $mF'$ 'dir. Düzgün figür aynı zamanda bir  $a$  yansımasına izin veriyorsa, buna yansımali düzgün figür denir ve grubun mertebesi  $2mF'$ 'dir. Sonuç olarak, tüm yüzler ve köşeler topolojik olarak eşdeğerdir veya figür yüz geçişli ve köşe geçişlidir. Ayrıca figür kenar geçişlidir. Petrie çokgenleri göz önüne alınarak görülebilir (Coxeter, 1989). Bu bahsettiklerimiz, kenarlar üzerinde zikzak bir yol izlenerek elde edilir. Öncelikle bir kenardan başlanır ve bir sonraki tepe noktasında sola dönülür. Ardından bir sonrakinde sağa dönülür ve tekrar başlangıç noktasına ulaşana kadar bu işlemler tekrar edilir. Düzgün bir figür için nereden başlandığı önemli değildir, her zaman aynı sayıda adım atılır. Bu Petrie çokgenlerinin kenarlarının sayısı düzgün bir figür için değişmezdir.

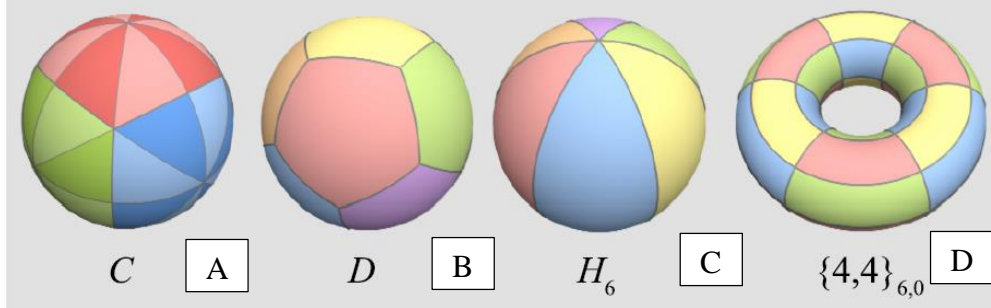
Düzgün bir figür, o düzlemde uygun bir çokgen tanımlayarak ve bu çokgeni kenarları tanımlanmış kapalı bir yüzey olarak kabul ederek, düzlemin bir  $\{m, n\}$  mozaiklemeinden türetilebilir. Bu kenarlarda  $\{m, n\}$  çokgenleri eşleşmelidir.  $(F, m, n) = (64, 6, 4)$  düzgün figürü için Şekil 2.1, böyle bir çokgeni göstermektedir. Böyle bir çokgen, mozaikleme gereksinimlerini karşılar ve dolayısıyla düzlem bu çokgenlerle kaplanabilir.  $\{m, n\}$  mozaikleme bir düzgün figürün evrensel örtüsü veya kaplama alanı (uzayı) olarak adlandırılır. Düzgün bir figürün  $M$  grubu,

$$M(m, n) = \langle R, S; R^m, S^n, (RS)^2, g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$$

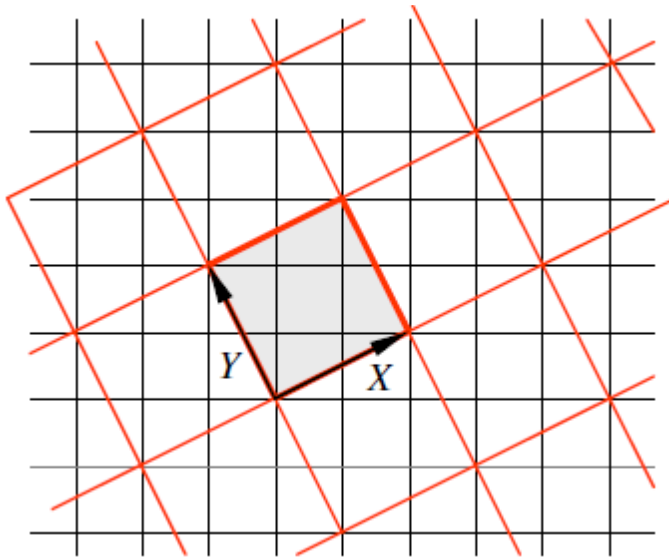
$g_i$  uygun bağıntıları ile  $r$  tane eklenerek  $G(m, n)$ 'den türetilebilir. Bu grup el ile veya hesaplamalı grup teorisi kullanılarak bulunabilir.

Düzgün bir figürün elemanlarının sayısı  $V = 2ml$ ,  $E = mnl$  ve  $F = 2nl$ 'dir.  $\chi$ ,  $m$  ve  $n$  arasında,  $l$  bir pozitif sayı iken  $\chi = l(2m + 2n - mn)$  bağıntısı vardır.  $2m + 2n - mn$  değeri; pozitif, sıfır veya negatif olma durumuna göre sırasıyla küresel, Öklid veya hiperbolik geometriden hangi geometrinin kullanılacağını belirler.

Küre ( $\chi = 2$ ) için düzgün figürler,  $\{3, 3\}$ ,  $\{4, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{5, 3\}$  ve  $\{3, 5\}$  küresel mozaikleri; platonik katılar olarak  $\{2, n\}$  (hosohedron) ve  $\{m, 2\}$  (dihedron) figürleridir.



**Şekil 2.3.** Basit düzgün figür örnekleri **A)** Sekiz tane üçgene bölünmüş yüzlerle bir küp **B)** Dodecahedron (on iki yüzlü şekil) **C)** Hosohedron (plaj topu) **D)** Tor

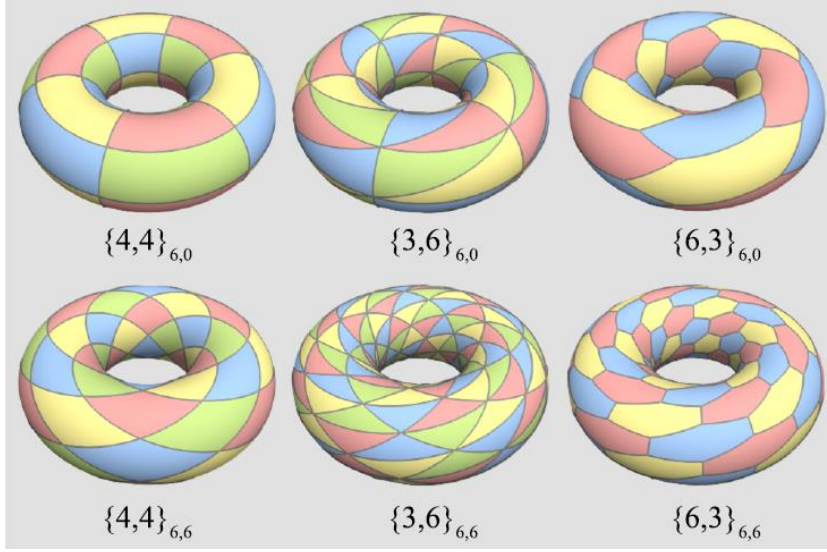


**Şekil 2.4.** Tor yüzeyi üzerinde  $\{4,4\}_{2,1}$  figürünün oluşturulması

Tor durumu ( $\chi = 0$ ) için, olası üç mozaikleme  $\{4, 4\}$ ,  $\{6, 3\}$  ve  $\{3, 6\}$ 'dir. Bunlar sırasıyla dikdörtgen bir kafese, bir bal peteği kafese ve her köşede altı üçgen bulunan bir üçgen kafese karşılık gelir. Burada  $l$  belirsizdir ve sonsuz sayıda olası değer alır. Dikdörtgen bir kafese denk olan mozaikleme ile düzgün bir figür elde etmek için kare bir bölge alınır ve karşı kenarları eşleştirilir. Bunu sağlamak için  $a \geq b \geq 0$  için  $X = (a, b)$  ve  $Y = (-b, a)$  olmak üzere iki temel (baz) vektörü olan bir dikdörtgen kafes tanımlanır (bkz. Şekil 2.4).

Ortaya çıkan düzgün figür  $\{4,4\}_{a,b}$  ile gösterilir. Yalnızca  $a = b$  veya  $b = 0$  olduğunda bu düzgün figür yansıtılabilir. Altıgen ve üçgen kafesler için benzer bir yaklaşım kullanılır ve denk gelen düzgün figürler  $\{6,3\}_{a,b}$  ve  $\{3,6\}_{a,b}$  ile gösterilir (bkz. Şekil 2.5).

$2m + 2n - mn < 0$  ise  $g > 1$  olur. Yine simit benzeri şekiller elde edilir, ama şimdi birden fazla delik var. Bu eşitsizliği sağlayan sonsuz sayıda  $\{m,n\}$  mozaiği vardır. Bunlardan bazıları  $\{3,7\}$ ,  $\{3,8\}$ ,  $\{4,5\}$ ,  $\{4,6\}$  mozaikleridir.



**Şekil 2.5.** Tor yüzeyi üzerindeki düzgün figürler

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Gruplar, soyut cebirin temel konularından biri olduğundan Hecke gruplarının normal alt gruplarının hesaplanmasında soyut cebirdeki temel yöntemler kullanılmıştır. Ayrıca ayrık gruplar, sayılar teorisi, sonlu cisimler, düzgün figürler teorisi gibi teorilerde kullanılan klasik yöntemlerden de yararlanılmıştır. Tezde deneysel bir aşama bulunmamaktadır.

Kullanılan klasik yöntemler üçgen grupları, serbest gruplar, serbest çarpımlar ile ilgili teoremler, Nielsen-Schreier Yöntemi, Sylow teoremleri ve homomorfizm ve izomorfizm teoremleri, otomorfizm kavramı, Galois teorisi, cisim genişlemeleri ile ilgili teoremlerdir. Hecke gruplarının normal alt grupları ile ilgili parametreler, projektif gruplar ve Fuchsian gruplar ile ilgili temel özellikler, Kurosh alt grup teoremi, Hecke gruplarının normal alt gruplarının üzerinde hareket ettiği yüzeye göre cinsini bulmak için Euler karakteristiği de kullanılan yöntemlerdendir.

En fazla kullanılan temel yöntemlerden birisi düzgün figürler yardımıyla Hecke gruplarının normal alt gruplarını tespit etmek ve simgesini bulmak için kullanılan Jones ve Singerman tarafından ortaya konulan permütasyon metodudur.

Riemann-Hurwitz formülü, Hecke grubu ile sonlu indeksli bir alt grubunun temel bölgelerinin hiperbolik alanları arasında bir oran verdiği için hesaplamalarda kullanılmıştır.

Reidemeister-Schreier yöntemi,  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçlerini bulmak için kullanılmıştır.

Omega değişmezi ve özellikleri de Hecke gruplarının normal alt grupları ile ilgili yeni parametreler elde etmek için kullanılan bir başka yeni yöntemdir.

## 4. BULGULAR

Bu bölüm tezin ana bölümüdür. Öncelikle  $\Omega$  omega değişmezi ile ilgili temel kavramlar, teoremler ve genel bilgiler verilecektir. Sonrasında Hecke gruplarının normal alt grupları, yeni elde edilen alt grup parametreleri kullanılarak, düzgün figürler ve omega değişmezi yardımıyla elde edilecek ve tablolar halinde verilecektir.

### 4.1. $\Omega(G)$ Omega Değişmezi

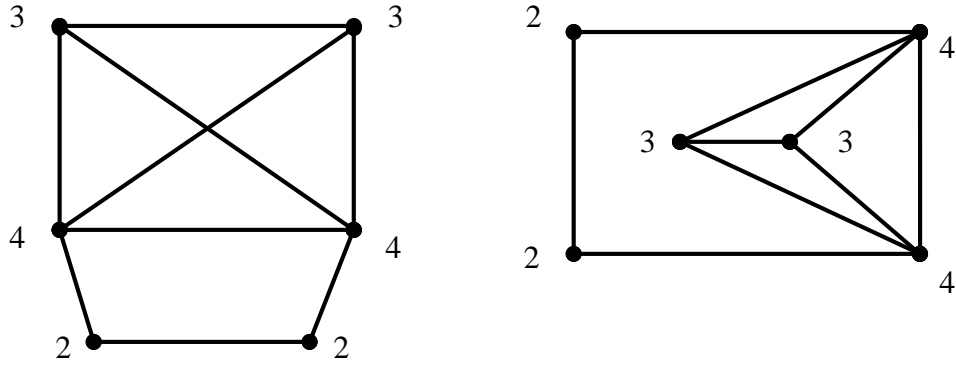
Bu alt bölümde grafların özelliklerden ve yeni bir graf değişmezinden bahsedeceğiz. Ayrıntılı bilgi ve bu bölümde ispatsız verilen sonuçlar için (Delen ve Cangül, 2018), (Delen ve Cangül, 2019), (Yurttaş, Togan, Delen ve Cangül, 2018), (Delen, Yurttaş, Togan ve Cangül, 2019), (Cangül, Yurttaş, Güneş, Togan ve Delen, 2019), (Öz ve Cangül, 2020), (Özden, Ersoy, Özen, Cangül, Srivastava, G ve Srivastava, H, 2020), (Aşcıoğlu, Demirci ve Cangül, 2020), (Yurttaş, Güneş, Delen, Demirci, Çevik ve Cangül, 2020), (Togan, Yurttaş, Güneş, Delen ve Cangül, 2020), (Şanlı, Çelik, Delen ve Cangül, 2020), (Delen, Togan, Yurttaş, Ana ve Cangül, 2020), (Demirci, Akbayrak, Özbek ve Cangül, 2021), (Demirci, Yurttaş, Güneş, Delen ve Cangül, 2021), (Bondy ve Murty, 2008), (Wallis, 2007) ve (Demirci, Delen, Çevik ve Cangül, 2021) kaynaklarına bakılabilir.

Genel olarak,  $|E(G)| = m$  kenara ve  $|V(G)| = n$  köşeye sahip  $G = (V, E)$  ile gösterilen bir  $G$  grafı için  $n$  sayısı bu grafın mertebesini,  $m$  sayısı aynı grafın boyutunu gösterir. Bir  $v \in V(G)$  köşesi için,  $v$  köşesinin derecesi  $d_v$  ile gösterilir. Derecesi bir olan bir köşe, pendant (sarkık, sallantılı) köşe olarak adlandırılır. Benzer şekilde pendant köşeye sahip bir kenar da pendant kenar olarak adlandırılır. Bir grafta bir köşenin en küçük derecesi  $\delta$  ve en büyük derecesi  $\Delta$  ile gösterilir. Bir  $G$  grafı için,  $e$  kenarı ile bağlı olan  $u$  ve  $v$  köşeleri bitişik (komşu) köşeler olduğundan bu durum  $e = u \cdot v$  ile temsil edilir. Bu durumda  $u$  ve  $v$  köşelerine bitişik köşeler,  $e$  kenarına da  $u$  ve  $v$  ile bağlantılıdır denir. Bitişiklik ve bağlantılılık, graf teorisinin grafların lineer cebirsel çalışmaları ile alakalı bir alt dalı olan spektral graf teoride çok önemli bir rol oynar.

$a_i$ ,  $i$  dereceli köşelerin sayısını göstermek üzere bir  $G$  grafının tüm köşelerinin derecelerini içeren bir derece dizisi genel olarak

$$DS(G) = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

şeklinde gösterilir.



**Şekil 4.1.** Aynı  $\{2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(2)}\}$  derece dizisine sahip graflar

**4.1.1. Tanım.**  $D$  kümesi, azalmayan ve negatif olmayan tamsayıların bir kümesi olsun. Eğer bir  $G$  grafının derece dizisi  $D$  kümesine eşit ise  $D$ 'ye  $G$  grafının bir çizimi (*realization*) ya da *çizilebilir derece dizisi* denir.

Bu tanımdan anlaşılacağı üzere, bir çizilebilir derece dizisi için, bu derece dizisine sahip en az bir graf vardır. Örnek olarak Şekil 4.1'de gösterilen birbirinden tamamen farklı iki graf, aynı derece dizisine sahiptir.

Negatif olmayan tamsayılardan oluşacak şekilde verilen bir kümenin çizilebilir (*realizable*) olup olmadığını belirlemek için pek çok sonuç ve algoritma vardır. Bunların en bilinenlerinden birisi de Havel-Hakimi'ye ait olandır. Ayrıntılı bilgi için (Havel, 1955, s. 477-480) ve (Hakimi, 1962, s. 496-506) kaynaklarına bakılabilir. Yukarıda sözü edilen yöntemden (Handshaking Lemma) anlaşılan en belirgin ölçüt, tüm köşe derecelerinin toplamının kenar sayısının iki katına eşit olmasından dolayı çift olmasıdır.

Graflar, en az bir devire sahip olup olmamasına göre de sınıflandırılır. Devire sahip olmayan graflar, devirsiz graflar olarak adlandırılır. Örnek olarak, ağaç (tree) şeklindeki graflar devirsiz, diğer tüm graflar devirli graflar olarak adlandırılır.

Bir  $T$  ağaç grafında,  $\Delta$ , en büyük köşe derecesi ve  $a_i$ ,  $i$  dereceli köşe sayısını göstermek üzere, bu  $T$  ağaç grafının yapraklarının sayısı  $a_1$  (pendant köşe sayısı)

$$a_1 = 2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta$$

ile gösterilir. Bu eşitlik

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = -2$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Bu ifadenin sol tarafındaki sayıyı  $\Omega$  ile göstereceğiz. Bu değişmez, bir grafın derece dizisi yardımıyla, bu graf hakkında yapısal ve saymaya dayalı bilgi verme konusunda çok büyük potansiyele sahiptir.

**4.1.2. Tanım ( $\Omega(G)$  omega değişmezi).**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  bir çizilebilir derece dizisi ve onun temsili de bir  $G$  grafı olmak üzere

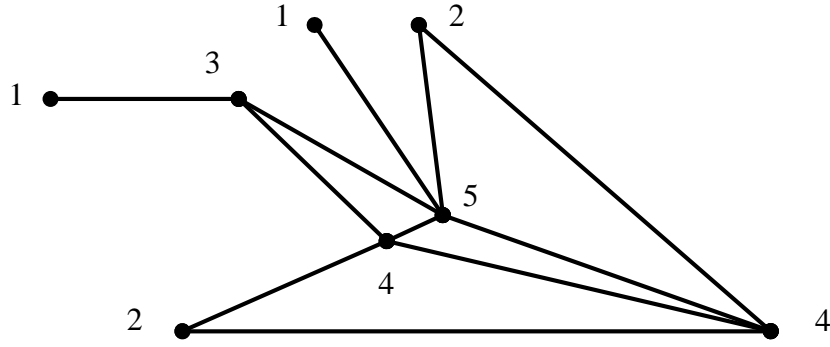
$$\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1$$

$$= \sum_{i=1}^{\Delta} (i - 2)a_i$$

ifadesine  $G$  grafının omega değişmezi denir ve  $\Omega(G)$  ile gösterilir (Delen ve Cangül, 2018).

Benzer şekilde verilen bir  $D$  derece dizisinin  $\Omega$  omega değişmezi  $\Omega(D)$  ile gösterilir.  $\Omega$  omega değişmezini anlamak için Şekil 4.2'deki  $G$  grafı incelenebilir.





Şekil 4.2.  $\Omega(G) = 6$  olan bir  $G$  grafi

Bu  $G$  grafinin derece dizisi  $\{1^{(2)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(1)}\}$  dir.  $G$  grafinin omega değışmezi

$$\begin{aligned}\Omega(G) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

bulunur.

$\Omega(G)$ , önemli hesaplanabilir bir özelliğe sahiptir.

**4.1.3. Teorem.** Herhangi bir  $G$  grafi için omega değışmezi  $\Omega(G) = 2(m - n)$  olarak tanımlıdır (Delen ve Cangül, 2018).

**İspat.** Handshaking Lemmadan

$$\begin{aligned}2m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta \\ &= (a_3 + 2a_4 + \dots + (a - 2)a_\Delta - a_1) + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_\Delta)\end{aligned}$$

olduğu biliniyor.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\Delta = n$$

ve

$$\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1$$

olduğundan bu değerler eşitlikte yerine yazılırsa

$$2m = \Omega(G) + 2n$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$\Omega(G) = 2(m - n)$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

4.1.4 Teoremi, 4.1.3 Teoreminden kolayca elde edilir:

**4.1.4. Teorem.** Herhangi bir  $G$  grafi için  $\Omega(G)$  omega değışmezi çifttir.

4.1.5 Sonucu, verilen bir derece dizisinin çizilebilirliği (realizability) ile ilgili fikir verir:

**4.1.5. Sonuç.**  $D$ , negatif olmayan tamsayıların bir kümesi olsun. Eğer  $\Omega(D)$  tek ise  $D$  çizilemezdir.

Genel olarak,  $P_n$  yol grafini,  $C_n$  devirli grafi,  $S_n$  yıldız grafini,  $K_n$  tam grafi,  $n = r + s$  iken  $T_{r,s}$  larva grafini ve  $K_{r,s}$  iki parçalı tam grafi gösterir.  $T$  bir ağaç grafi olsun. Bu iyi bilinen graf sınıfları için,  $\Omega(G)$  omega değışmezi sırasıyla  $\Omega(C_n) = 0$ ,  $\Omega(P_n) = -2$ ,  $\Omega(S_n) = -2$ ,  $\Omega(T) = -2$ ,  $\Omega(K_n) = n(n - 3)$ ,  $\Omega(T_{r,s}) = 2[rs - (r + s)]$ ,  $\Omega(K_{r,s}) = 0$  olarak bulunur.

Herhangi bir yol, yıldız veya ağaç graflarının  $\Omega$  değışmezinin  $-2$  sayısına eşit olduğuna dikkat ediniz. Bu eşitlikler bütün bağlantılı devirsiz graflar için geçerlidir.

Bir  $G$  grafinin kenarları ile sınırlı olan kapalı bölgelerin (yüzlerin) sayısı  $r$  olsun. Graf teoride, topolojinin aksine, çalışılan grafin dışındaki sonsuz bölge bir yüz olarak sayılmamaktadır. Bir kapalı bölgenin  $n \geq 3$  iken bir  $n$ -devir,  $n = 1$  iken bir döngü ya da  $n = 2$  iken de çoklu kenarlar ile sınırlandırılabilirdiğini biliyoruz. Bu bölgelerin sayısı 4.1.6 Teoreminde verilmiştir:

**4.1.6. Teorem.**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  olsun. Eğer  $D$ , bağlantılı düzlemsel bir  $G$  grafi olarak çizilebiliyorsa, bu durumda  $r$  ile gösterilen kapalı bölgelerin sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

ile bulunur (Delen ve Cangül, 2018).

Burada genellikle bağlantısız graflarla çalışılacağından, Bir  $G$  grafinin  $\Omega$  omega değışmezi “ $G$  grafinin bileşenlerinden oluşan küme üzerinde toplamsaldır” ifadesiyle eş değer olan 4.1.7 Teoremindeki gibi yararlı bir sonuca ihtiyaç vardır.

**4.1.7. Teorem.**  $G_1, G_2, \dots, G_c$  gibi  $c$  tane bileşene sahip bir bağlantısız  $G$  grafi için

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^c \Omega(G_i)$$

ile ifade edilir (Delen ve Cangül, 2018).

4.1.6 Teoremi bağlantısız graflara genelleştirilirse 4.1.8 Sonucu elde edilir:

**4.1.8. Sonuç.**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  kümesi,  $c$  tane birleşime sahip bir  $G$  grafinin temsilcisi olsun.  $G$  grafinin  $r$  ile gösterilen yüz sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

ile bulunur.

$r \geq 0$  olduğundan 4.1.9 Sonucuna ulaşılır:

**4.1.9. Sonuç.** Her bir  $G$  grafi için,  $c \geq -\frac{\Omega(G)}{2}$  olduğundan denk olarak  $c \geq n - m$  olur (Delen ve Cangül, 2018).

Euler karakteristiği  $\chi$  ile omega değişmezi  $\Omega$  arasında 4.1.10 Yardımcı Teoremindeki gibi bir bağlantı vardır:

**4.1.10. Yardımcı Teorem.** Herhangi bir  $G$  grafi için,  $\Omega(G) = 2(r - \chi(G))$  elde edilir (Delen ve Cangül, 2018).

**4.1.11. Teorem.**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  ve  $\Omega(D) \geq 0$  olsun. Eğer  $D$  bağlantılı bir  $G$  grafi olarak çizilebilirse bu  $G$  grafi için  $l$  döngü sayısı,  $ch$  giriş sayısı ve  $e_m$  çoklu kenar sayısı iken

$$\frac{\Omega(G)}{2} = l + ch + e_m$$

bağıntısı gerçekleşir (Delen ve Cangül, 2018).

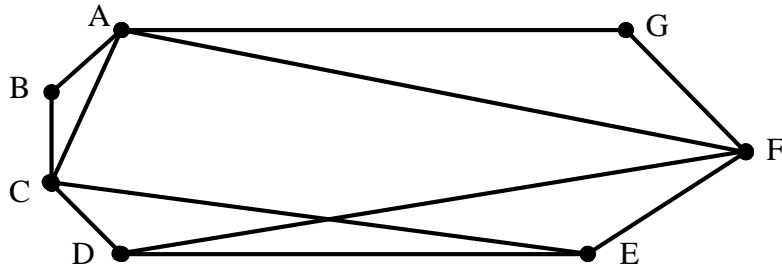
4.1.10 Yardımcı Teoremi ve 4.1.11 Teoreminden  $G$  grafi için  $r$  kapalı bölgelerin sayısı,  $l$  döngü sayısı,  $ch$  giriş sayısı ve  $e_m$  çoklu kenar sayısı iken 4.1.12 Sonucu elde edilir:

**4.1.12. Sonuç.**  $\Omega(G) \geq 0$  ise  $D$ 'nin bir  $G$  bağlantılı temsilcisinin Euler karakteristiği,

$$\chi(D) = r - l - ch - e_m$$

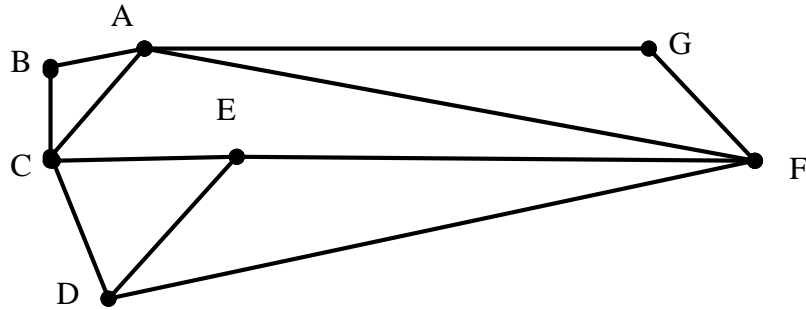
ile gösterilir.

Bazen kapalı bölgelerin sayısını tek tek saymak kolay değildir. Örneğin Şekil 4.3'teki grafta kapalı bölgeler örtüştüğünden bu kapalı bölgeleri saymak kolay bir iş değildir.



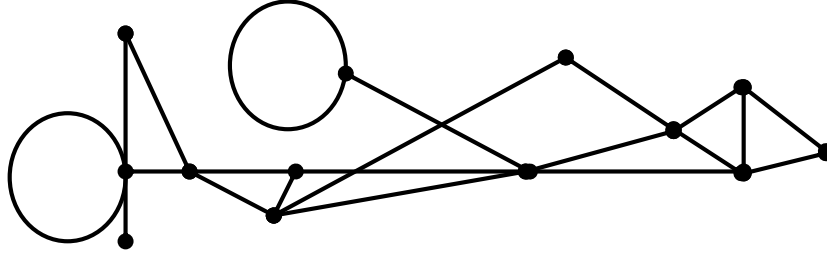
**Şekil 4.3.** Örtüşen kapalı bölge grafi

Şekil 4.3'te çoklu kenar ya da bir döngü yoktur. Bu yüzden kirisleri saymaya ihtiyac vardır. Bunlardan dört tanesi, beş tane kapalı bölge olduğunu gerçekler. Şekil 4.4, aynı grafın bir başka çizimini gösterir ve gerçekten de beş tane örtüşmeyen kapalı bölge olduğu bellidir.



**Şekil 4.4.** Şekil 4.3'teki grafın örtüşmeyen kapalı bölge çizimi

Başka bir örnek için Şekil 4.5'e bakınız.



Şekil 4.5. Bir bağlantılı graf

Beş kiriş ve her biri iki kapalı bölge ile bağlantılı üç kesik köşe vardır.  $5 + 3 = 8$ 'e bir eklemek, kapalı bölgelerin sayısı olan 9'u verir.  $\Omega(G) = 16$  olduğundan,  $r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$  iken, kapalı bölgelerin sayısı  $r = \frac{16}{2} + 1 = 9$  olarak bulunur.

4.1.13 Sonucu  $\Omega$ ,  $m$  ve  $n$  arasında ilginç bir bağlantı olduğunu gösterir:

**4.1.13. Sonuç.**  $G$ , bir bağlantılı graf olsun. Eğer  $k \geq -1$  şartını sağlayan bir  $k$  tamsayısı için,  $\Omega(G) = 2k$  oluyorsa  $m = n + k$  olur (Delen ve Cangül, 2018).

Genellikle sadece bir kapalı bölgesi olan tek-devirli graflarla çalışacağız ki bu graflar ya en az üç kenara sahip bir devir, ya çoklu kenarların bir parçası olan bir devir ya da bir döngülü bir devirdir. 4.1.6 Teoreminden tüm tek-devirli gaflar için  $\Omega = 0$  olduğu biliniyor. Buradan 4.1.14 Sonucuna direkt olarak ulaşılır:

**4.1.14. Sonuç.**  $G$ , bir bağlantılı graf olsun. Eğer  $\Omega(G) = 0$  ise  $m = n$  olur.

Benzer şekilde iki devire sahip bir bağlantılı graf için  $m = n + 1$  bağıntısı ve üç devire sahip bir bağlantılı graf için  $m = n + 2$  bağıntısı vardır.

**4.1.15. Yardımcı Teorem.**  $G$ ,  $m > n = 3$  şartını sağlayan bir graf olsun.  $G$ , en az bir tane çoklu kenara ya da döngüye sahiptir (Delen ve Cangül, 2018).

**4.1.16. Teorem.**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  olmak üzere bir  $D$  derece dizisi,  $c$  bileşenli,  $l$  döngülü,  $ch$  kirişli ve  $e_m$  çoklu kenarlı bir  $G$  grafı gibi temsil edilebilir. Bu  $G$  grafında en büyük devirli kenar sayısı  $n_c$  olsun. Eğer  $\Omega(G) \geq 0$  ise

$$\frac{\Omega(G)}{2} = ch + l + e_m = m - a_1 - n_c$$

olur (Delen ve Cangül, 2018).

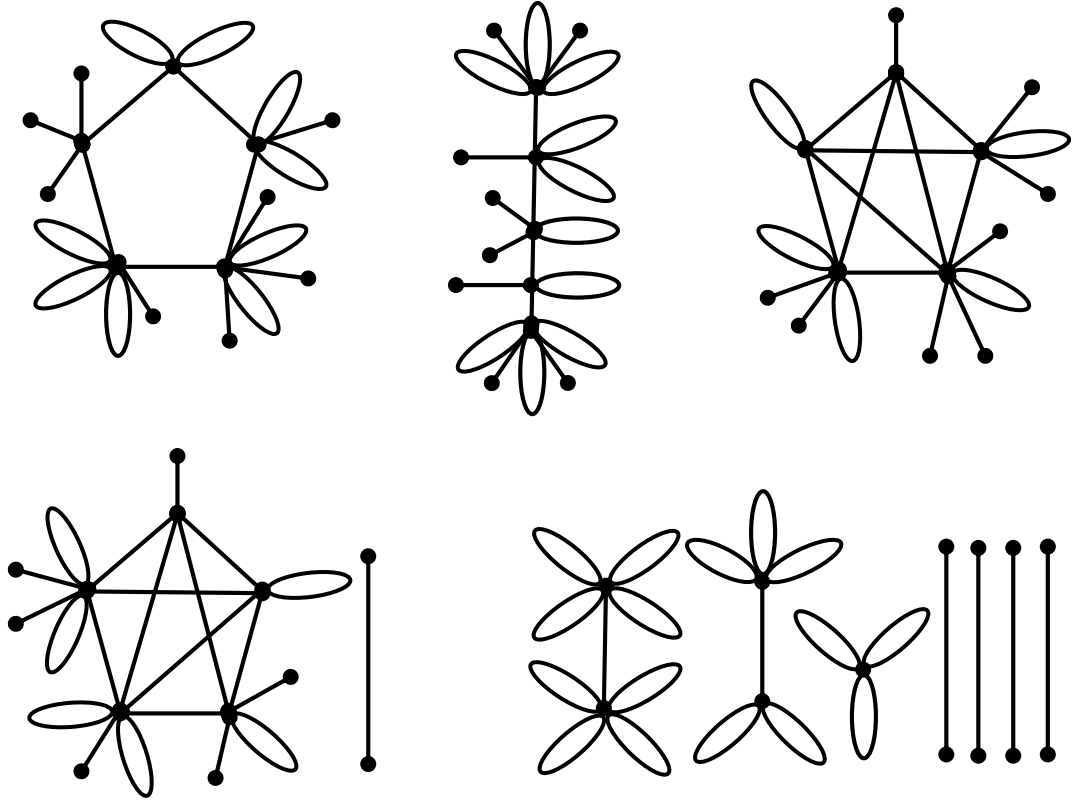
4.1.16 Teoreminden 4.1.17 Sonucu elde edilir. Bu sonuç  $\Omega(D) = 0$  iken oldukça yararlıdır:

**4.1.17. Sonuç.** Eğer  $\Omega(D) = 0$  ise  $D$ 'nin herhangi bir temsilcisinin bir kirişi, döngüsü ya da çoklu kenarları yoktur.

Verilen bir  $D$  derece dizisi için, en büyük döngü sayısını hesaplama problemi incelenebilir. Delen ve Cangül, (2019, s. 161-171) yayımladıkları bir makalede bu problemi,  $\Omega(D) \leq -4$ ,  $\Omega(D) = -2$  ve  $\Omega(D) \geq 0$  olmak üzere üç durumda incelemiştir.

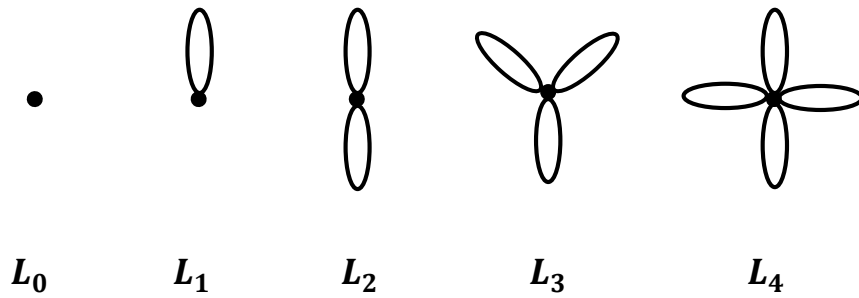
En büyük döngü sayısı, bir  $D$  derece dizisinin çizimlerinin üç farklı alt ailesinde hesaplanmıştır. Bu alt aileler, tüm çizimler, tanımlanacak olan tüm temel çizimler ve tüm bağlantılı çizimlerdir.

Verilen bir derece dizisinin ne kadar farklı çizimlerinin olduğunu anlamak için alınan bir  $D = \{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$  derece dizisi incelenebilir. Burada  $\Omega(D) = 18$  olarak bulunur. Şekil 4.6'daki graflar  $D$ 'nin olabilecek tüm olası çizimlerinden bazılarıdır.



Şekil 4.6. Aynı derece dizisinin beş farklı gösterimi

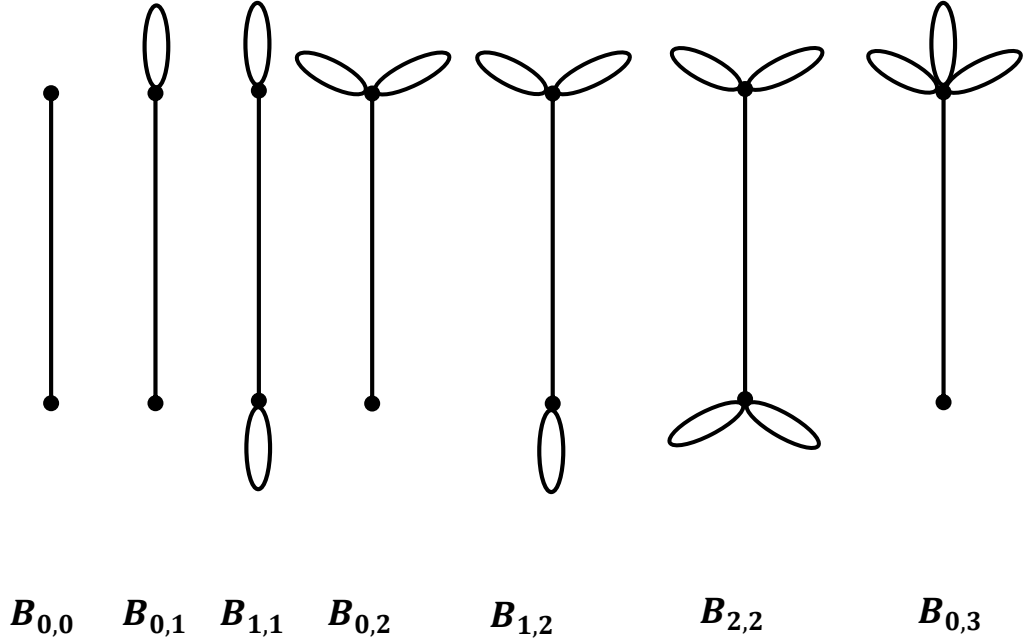
İlk olarak  $\Omega(D) \geq 0$  olsun.  $q$  bir doğal sayı olmak üzere, tek bir noktaya  $q$  tane döngü eklenerek elde edilen bir graf  $L_q$  ile gösterilir. Şekil 4.7’de bu graflardan ilk birkaçı gösterilmiştir.



Şekil 4.7. Bazı  $L_q$  grafları



$r$  ve  $s$  birer doğal sayı olmak üzere, bir kenarın bir ucuna  $r$  tane döngü, diğer ucuna  $s$  tane döngü ekleyerek elde edilen bir graf  $B_{r,s}$  ile gösterilir. Şekil 4.8'de ilk birkaç  $B_{r,s}$  grafi gösterilmiştir.



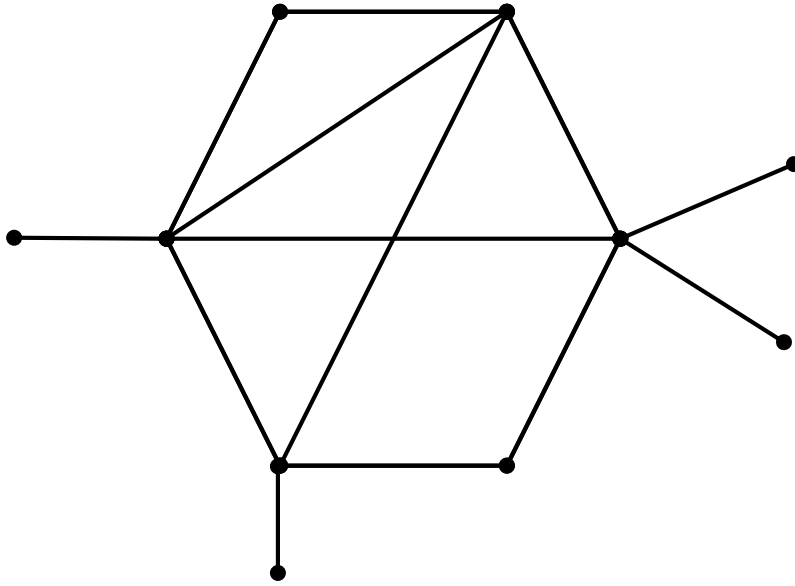
Şekil 4.8. Bazı  $B_{r,s}$  grafları

Bu iki graf sınıfı aracılığıyla 4.1.18 Teoremi elde edilir:

**4.1.18. Teorem.**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  şeklinde verilen bir  $D$  derece dizisi çizilebilir (realizable) olsun. Bu durumda  $D$ 'nin herhangi bir  $G$  grafi olarak çiziminin (realization) sahip olabileceği en fazla bileşen sayısı

$$c_{max} = \sum_{d_i \text{ çift}} a_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} a_i$$

eşitliği ile bulunur (Delen ve Cangül, 2019).



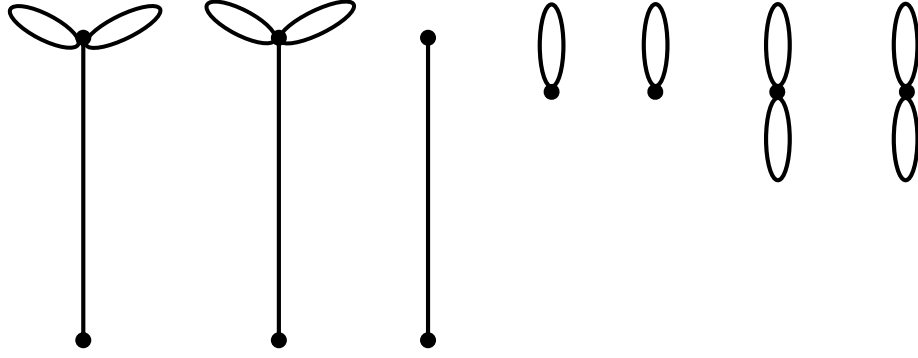
**Şekil 4.9.**  $D$ 'nin bağlantılı bir çizimi

**4.1.19. Örnek.**  $D = \{1^{(4)}, 2^{(2)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}\}$  bir derece dizisi olsun. Burada  $\Omega(D) = 6$  olarak bulunur. Şekil 4.9'da görüldüğü gibi  $D$ 'nin bağlantılı devirli bir çizimi vardır (Delen ve Cangül, 2019, s. 161-171).

4.1.19 Örneğindeki  $D$ 'nin bağlantılı ve bağlantılı olmayan birkaç temsili vardır. 4.1.18 Teoremi yardımıyla, bu bileşenlerin  $c_{max}$  ile gösterilen en büyük sayısı, Şekil 4.10'da gösterilen bir  $D$  graf temsili için

$$\begin{aligned}
 c_{max} &= \frac{a_1 + a_3 + a_5}{2} + a_2 + a_4 \\
 &= \frac{4 + 0 + 2}{2} + 2 + 2 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.



**Şekil 4.10.**  $D$ 'nin en fazla bileşene sahip bir çizimi

Grafların temel biçimi kavramı,  $\Omega(D) \geq 0$ ,  $\Omega(D) \leq -4$  ve  $\Omega(D) = -2$  gibi üç durumda tanımlanmıştır. Bu temsiller sırasıyla  $D$ 'nin temel devirli temsili,  $D$ 'nin temel devirsiz temsili ve  $D$ 'nin temel karışık temsili olarak adlandırılır (Delen ve Cangül, 2019). Bu temsiller  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  olmak üzere 4.1.20 Tanım, 4.1.21 Tanım ve 4.1.22 Tanımlarında verilmiştir.

**4.1.20. Tanım.** Eğer  $\Omega(D) \geq 0$  ise, böylece  $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_\Delta$  uzunluklu bir devire, döngülere, kirişlere ve  $a_1$  pendant kenara sahip bir bağlantılı temsile,  $D$ 'nin bir devirli temel temsili denir (Delen ve Cangül, 2019).

**4.1.21. Tanım.** Eğer  $\Omega(D) = -2$  ise, böylece uygun şekilde yerleştirilmiş pendant kenarlar ile birlikte  $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_\Delta + 2$  uzunluklu bir yol grafindan oluşan bir tırtıl ağacına (caterpillar tree)  $D$ 'nin bir devirsiz temsili denir (Delen ve Cangül, 2019).

**4.1.22. Tanım.** Eğer  $\Omega(D) \leq -4$  ise, böylece  $D$ 'nin bazı döngüler, pendant kenarlar ve ayrıca bazı  $K_2$ 'ler, ki bunların sayısı, 1'den daha büyük olan tek dereceli köşelerin sayısına eşittir, ile birlikte  $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_\Delta$  uzunluklu bir devirin oluşturduğu bir ana bileşenden oluşan bir temsiline  $D$ 'nin bir karışık temsili denir (Delen ve Cangül, 2019).

## 4.2. Hecke Gruplarının Normal Altgrupları

Tezin ana sonuçlarını içeren kısmı olan bu alt bölümde  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt grupları, Jones ve Singerman (1978) tarafından tanımlanan dönüşümden yararlanarak cinsi  $2 \leq g \leq 101$  olan düzgün figürler yardımıyla belirlenmiştir. Ayrıca  $\Omega(G)$  omega değişmezi kullanılarak Hecke gruplarının normal alt gruplarının rankı ile ilgili çeşitli parametreler elde edilmiş ve bu parametreler yardımıyla da ranklar hesaplanmıştır. Elde edilen serbest ve serbest olmayan normal alt gruplar bölüm sonunda tablolar halinde verilmiştir. Kullanılan kavramlar ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için (Hecke, 1936), (Cangül, 1993), (Coxeter ve Moser, 1957), (Conder, 2006), (Conder ve Dobcsanyi, 2001), (Delen ve Cangül, 2018), (Delen ve Cangül, 2019), (Conder, 2011), (Jones ve Singerman, 1978), (Demirci ve ark., 2021) kaynaklarına bakılabilir.

Jones ve Singerman (1978) tarafından belirlenen  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının belirli üçgen grupların normal alt grupları ile düzgün figürler arasındaki bire bir dönüşüm şu şekildedir:  $q$ 'yu bölen her  $m \in N$  için,

$$\theta : H(\lambda_q) \cong (2, q, \infty) \rightarrow (2, m, n) \cong H(\lambda_q)/N$$

2-devirli  $R$  üreteci,  $m$ -devirli  $S$  üreteci ve  $n$ -devirli  $T = R \cdot S$  üreteci olan bir epimorfizm elde ederiz. Eğer  $|G| = \mu$  ise  $R$  üretecindeki devir sayısı  $\mu / 2$ ,  $S$  üretecindeki devir sayısı  $\mu / m$  ve  $T$  üretecindeki devir sayısı  $\mu / n$  olur.  $H(\lambda_q)/N$  bölüm grubuna ait olan  $R$  üretecindeki her bir devir,  $N$  normal alt grubuna denk olan düzgün figürdeki kenara denk olduğundan  $e = \mu / 2$  olur. Benzer şekilde  $S$  üretecindeki her bir devir,  $N$  normal alt grubuna denk olan düzgün figürdeki yüze denk olduğundan  $f = \mu / m$  ve son olarak  $T$  üretecindeki her bir devir,  $N$  normal alt grubuna denk olan düzgün figürdeki köşeye denk olduğundan  $v = \mu / n$  olur. Buradan

$$N \cong \left( g; \frac{q}{m} \binom{\mu}{m}, \infty \binom{\mu}{n} \right) = \left( g; \frac{q^{(f)}}{m}, \infty^{(v)} \right)$$

elde edilir.  $g$  sayısı,  $N$  normal alt grubuna denk olan düzgün figürün üzerinde hareket ettiği yüzeyin cinsidir ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak bulunabilir.

**4.2.1. Teorem.** Eğer  $H(\lambda_q)$ 'nin bir normal alt grubu

$$N \cong (g; d^{(f)}, \infty^{(v)})$$

ise bu normal alt grup

$$N \cong F_{1+e-f} * \prod_{i=1}^f C_d$$

ile elde edilir (Demirci ve Ark., 2021).

**İspat:**  $N$  normal alt grubunun serbest kısmı için rank  $r(N) = 2g + v - 1$  eşitliği ile tanımlıdır (Cangül, 1993). Cinsi  $g$  ile gösterilen yönlendirilebilir yüzey üzerindeki bir graf için  $v$  köşe sayısını,  $e$  kenar sayısını,  $f$  yüz sayısını göstermek üzere Euler karakteristiği  $v - e + f = 2 - 2g$  eşitliği ile gösterilir (bkz. 1.36 Tanım). Buradan

$$\begin{aligned} r(N) &= 2g + v - 1 \\ &= 2 - v + e - f + v - 1 \\ &= e - f + 1 \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak, her bir  $d = q / m$  sayısı için, serbest çarpımda  $d$  uzunluğuna sahip  $f$  tane  $C_d$  deviri elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Özbek (2022), 4.2.1 Teoreminden yararlanarak 4.2.2 Sonucunu, 4.2.3 Sonucunu, 4.2.4 Sonucunu ve 4.2.5 Sonucunu elde etmiştir:

**4.2.2. Sonuç.** Eğer  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun bir normal alt grubu  $N \cong (g; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  ise  $m = q / d$  iken  $N$  normal alt grubu

$$N \cong F_{1 + \left(\frac{m-2}{2m}\right)\mu} * \prod_{i=1}^f C_d$$

olarak bulunur (Özbek, 2022). İspat, 4.2.1 Teoreminde  $e = \mu / 2$  ve  $f = \mu / m$  yazılarak tamamlanır.

**4.2.3. Sonuç.**  $N \cong (0; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  simgesi ile gösterilen  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun küre yüzeyi üzerindeki bir  $N$  normal alt grubunun rankı

$$r(N) = v - 1$$

eşitliği ile bulunur (Özbek, 2022).

**4.2.4. Sonuç.**  $N \cong (1; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  simgesi ile gösterilen  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun tor yüzeyi üzerindeki bir  $N$  normal alt grubunun rankı

$$r(N) = v + 1$$

eşitliği ile bulunur (Özbek, 2022).

**4.2.5. Sonuç.**  $N \cong (2; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  simgesi ile gösterilen  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun iki delikli tor üzerindeki bir  $N$  normal alt grubunun rankı

$$r(N) = v + 3$$

eşitliği ile bulunur (Özbek, 2022).

Delen ve Cangül (2018) tarafından yeni bir topolojik graf değişmezi tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. Bu yeni topolojik graf değişmezi, omega değişmezi olarak adlandırılır ve  $\Omega$  ile gösterilir (bkz. 4.1.2 Tanım). Ayrıntılı bilgi için (Delen ve Cangül, 2018), (Delen ve Cangül, 2019), (Delen ve ark., 2019) ve (Şanlı ve ark., 2020) kaynaklarına bakılabilir. Herhangi bir  $G$  grafının  $\Omega$  ile gösterilen omega değişmezi,  $\Omega(G) = 2(e - v)$  eşitliği ile tanımlıdır (bkz. 4.1.3 Tanım). Bir düzgün figür de bir graf olduğundan bu eşitlik düzgün figürler için de kullanılabilir. Bu yolla 4.2.6 Teoremi elde edilir:

**4.2.6. Teorem.** Bir  $G$  düzgün figürü için  $\chi(G)$ ,  $G$  düzgün figürünün Euler karakteristiğini göstermek üzere,  $G$  düzgün figürünün  $f$  ile gösterilen yüz sayısı

$$f = \frac{\Omega(G)}{2} + \chi(G)$$

eşitliği ile bulunur (Demirci ve Ark., 2021).

**İspat.**  $\Omega(G) = 2(e - v)$  olduğu biliniyor (Delen ve Cangül, 2018). Euler karakteristiği

$$v - e + f = 2 - 2g$$

oldüğundan

$$\Omega(G) = 2(f - 2 + 2g)$$

elde edilir. Böylece

$$f = \frac{\Omega(G)}{2} + 2 - 2g$$

sonucuna ulaşılır.  $\chi(G) = 2 - 2g$  olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

4.2.6 Teoreminden 4.2.7 Sonucu elde edilir:

**4.2.7. Sonuç.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $N$  ile gösterilen bir normal alt grubunun rankı, bir  $G$  düzgün figürünün köşe sayısı  $v$  iken,

$$r(N) = 1 + v - \chi(G)$$

eşitliği ile bulunur (Demirci ve Ark., 2021).

**İspat.** 4.2.1 Teoreminden  $r(N) = e - f + 1$  olduğu biliniyor. 4.2.6 Teoremi ve 4.1.3 Tanımından

$$\begin{aligned} r(N) &= 1 + e - \left( \frac{\Omega(G)}{2} + \chi(G) \right) \\ &= 1 + e - (e - v + \chi(G)) \\ &= 1 + v - \chi(G) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.8 Teoremi oldukça kullanışlıdır ve  $f, q, g$  ve  $v$  arasında bir bağıntı oluşturur:

**4.2.8. Teorem.**  $H(\lambda_q)$ 'nin bir normal alt grubu  $N \cong (g; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  olsun.  $\frac{f}{g-1+\frac{v}{2}}$  sayısı, her  $q$  için sabittir. Dahası

- i.  $N$ , serbest bir normal alt grup ise  $\frac{f}{g-1+\frac{v}{2}} = \frac{4}{q-2}$  eşitliği sağlanır.
- ii.  $N$ , serbest olmayan normal bir alt grup ise  $\frac{f}{g-1+\frac{v}{2}} = \frac{4}{q-2}$  eşitliği sağlanır.



**İspat.**  $N$  serbest normal alt grubu için ispat şu şekildedir:  $|G| = \mu = 2e = fq$  olduğu biliniyor. Eşitliğin her iki yanından  $2v + 2f$  sayısı çıkarılırsa

$$2e - 2v - 2f = fq - 2v - 2f$$

eşitliği elde edilir. Euler karakteristiğinin özelliği kullanılarak  $f(q - 2) = 2v - 4 + 4g$  bulunur. İfade düzenlenirse  $\frac{f}{g-1+\frac{v}{2}} = \frac{4}{q-2}$  sonucuna ulaşılır.

$N$ , serbest olmayan normal alt grubu için  $|G| = \mu = 2e = fq$  eşitliğinde  $q$  yerine  $\frac{q}{d}$  alınarak  $\frac{f}{g-1+\frac{v}{2}} = \frac{4}{\frac{q}{d}-2}$  sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.8 Teoreminden  $\frac{f}{g-1+\frac{v}{2}}$  oranının her  $q$  için sabit ve  $N$ 'nin serbest bir alt grup olup olmamasına göre  $\frac{4}{q-2}$  ya da  $\frac{4}{\frac{q}{d}-2}$  oranına eşit olduğu görülür. Özbek (2022) tarafından  $K_q$  olarak adlandırılan bu oran,  $N$  serbest bir alt grup iken

$$K_q = \frac{4}{q-2}$$

ve  $N$ , serbest olmayan bir alt grup iken

$$K_q = \frac{4}{\frac{q}{d}-2}$$

olarak bulunur.

$K_q$  sabiti,  $r(N)$  ile gösterilen  $N$  normal alt grubunun rankı ve  $f$  cinsinden ifade edilebilir ve bu ifade 4.2.9 Sonucunda verilmiştir:

**4.2.9. Sonuç.**  $K_q = \frac{2f}{r(N)-1}$ .

**İspat.**  $r(N) = 2g + v - 1$  (Cangül, 1993) ve 4.2.8 Teoreminden  $K_q = \frac{f}{g+\frac{v}{2}-1}$  olduğu için

$$\begin{aligned} K_q &= \frac{f}{g + \frac{v}{2} - 1} \\ &= \frac{2f}{2g + v - 2} \\ &= \frac{2f}{r(N) - 1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$K_q$  sayısı  $e$  ile gösterilen kenar sayısı ve  $f$  ile gösterilen yüz sayısı cinsinden ifade edilebilir ve bu ifade 4.2.10 Sonucunda verilmiştir:

**4.2.10. Sonuç.**  $K_q = \frac{2f}{e-f}$ .

**İspat.** 4.2.9 Sonucundan ve 4.2.1 Teoreminden

$$\begin{aligned} K_q &= \frac{2f}{r(N) - 1} \\ &= \frac{2f}{1 + e - f - 1} \\ &= \frac{2f}{e - f} \end{aligned}$$

elde edilir.

$H(\lambda_q)$  Hecke grubunun bir  $N$  normal alt grubunun  $r(N)$  ile gösterilen rankı,  $f$  ile gösterilen yüz sayısı ve  $q$  cinsinden ifade edilebilir ve bu ifade 4.2.11 Teoreminde verilmiştir:

**4.2.11. Teorem.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun bir  $N$  normal alt grubunun  $r(N)$  ile gösterilen rankı

i.  $N$ , serbest bir alt grup ise  $r(N) = \frac{f \cdot (q-2)}{2} + 1$  eşitliği ile bulunur.

ii.  $N$ , serbest olmayan bir alt grup ise  $r(N) = \frac{f \cdot (q-2d)}{2d} + 1$  eşitliği ile bulunur.

**İspat.** Serbest bir  $N$  normal alt grubu için ispat şu şekildedir:

4.2.9 Sonucundan bir  $N$  normal alt grubu için

$$r(N) = 1 + \frac{2f}{K_q}$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$\begin{aligned} r(N) &= 1 + \frac{2f}{\frac{4}{q-2}} \\ &= 1 + \frac{f \cdot (q-2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Serbest olmayan bir  $N$  normal alt grubu için yukarıdaki eşitlikte  $q$  yerine  $\frac{q}{d}$  alınarak ispat yapılabilir.

Conder ve Dobcsanyi (2001),  $g$  sayısı yüzeyin cinsini göstermek üzere,  $g \geq 2$  şartını sağlayan yansıma özelliğine sahip yönlendirilebilir figürler için beş farklı sınıf elde etmiştir. Bu sınıflandırma neticesinde  $\{m, n\}$  ikilisindeki  $m$  ve  $n$  için en büyük değerler tespit edilebilir. Bu sınıflandırma 4.2.12 Sonucu ile verilmiştir:

**4.2.12. Sonuç.**  $g$  sayısı yüzeyin cinsini göstermek üzere,  $g \geq 2$  şartını sağlayan yansıma özelliğine sahip yönlendirilebilir figürler için beş farklı sınıf vardır. Bu sınıflar sırasıyla şu şekildedir:

- 1)  $\{4g, 4g\}$  tipindeki bir tane köşe ve  $2g$  tane kenara sahip, tek bir yüzü olan figürler.  
Bu tipteki figürlerin otomorfizm grubu, mertebesi  $4g$  olan  $D_{2g}$  dihedral grubudur.
- 2)  $\{2g + 1, 4g + 2\}$  tipindeki bir tane köşe ve  $2g + 1$  tane kenara sahip, iki tane yüzü olan figürler.  
Bu tipteki figürlerin otomorfizm grubu, mertebesi  $8g + 4$  olan  $D_{4g+2}$  dihedral grubudur.
- 3)  $\{2g + 2, 2g + 2\}$  tipindeki iki tane köşe ve  $2g + 2$  tane kenara sahip, iki tane yüzü olan figürler.  
Bu tipteki figürlerin otomorfizm grubu, mertebesi  $8g + 8$  olan  $D_{2g+2} * C_2$  direkt çarpım grubudur.
- 4)  $\{4, 4g\}$  tipindeki iki tane köşe ve  $4g$  tane kenara sahip,  $2g$  tane yüzü olan figürler.  
Bu tipteki figürlerin otomorfizm grubu  $16g$  mertebelidir.
- 5)  $\{4, 2g + 2\}$  tipindeki dört tane köşe ve  $4g + 4$  tane kenara sahip,  $2g + 2$  tane yüzü olan figürler.  
Bu tipteki figürlerin otomorfizm grubu,  $16g + 16$  mertebelidir (Conder ve Dobcsanyi, 2001).

Bu sınıflandırma neticesinde  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt gruplarına denk gelen yansıma özelliğine sahip, yönlendirilebilir olan  $\{m, n\}$  tipindeki figürler için  $m$  veya  $n$  sayıları en fazla  $4g + 2$  değerini alabilir. Elde edilen bu üst limit, Hecke grubunun normal alt gruplarını tespit ederken çalışılan değerleri kısıtlayarak bize kolaylık sağladığından oldukça faydalıdır.

Bu sınıflandırma  $g \geq 2$  şartını sağlayan yansıma özelliğine sahip yönlendirilebilir figürler içindir.  $0 \leq g < 2$  şartı için bahse konu olan  $\{m, n\}$  tipindeki bu figürler, küre ve tor yüzeyi üzerindedir. Şu halde  $m$  veya  $n$ 'nin aldığı değerler çok daha geniş aralıktadır.

$g = 0$  için  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun bölüm grubu küre yüzeyi üzerinde hareket ettiğinden, ilk olarak  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunu  $H(\lambda_q)/N \cong D_n = (2, 2, n)$  üzerine resmeden bir  $\Phi$  epimorfizmi için bu  $\Phi$ 'nin çekirdeği olarak adlandırılan ve  $N$  normal alt grubuna denk olan  $\{2, n\}$  tipindeki bir düzgün figür elde edilir. Burada  $n$  sayısı için herhangi bir kısıtlama olmadığından,  $n$  sayısı istenildiği kadar büyük seçilebilir.

İkinci olarak  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunu  $H(\lambda_q)/N \cong D_n = (2, n, 2)$  üzerine resmeden bir  $\Phi$  homomorfizmi  $n|q$  iken mevcut olduğundan elde edilen  $N$  normal alt grubu,  $\{n, 2\}$  tipindeki bir düzgün figür olur. Burada da  $n$  sayısı için herhangi bir kısıtlama olmadığından, bu sayı istenildiği kadar büyük seçilebilir. Özetle küre yüzeyi üzerinde hareket eden  $\{m, n\}$  tipindeki bir düzgün figür için  $m$  veya  $n$  sayılarını kısıtlayıcı bir üst sınır yoktur. Bu sayılar, en küçük değer olarak 1 sayısını alabilir.

$g = 1$  için  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun bölüm grubu tor yüzeyi üzerinde hareket ettiğinden,  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunu sadece  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 6, 3)$  ve  $(2, 4, 4)$  üzerine resmedebilen bir  $\Phi$  homomorfizmi vardır. Dolayısıyla bu  $\Phi$  homomorfizminin çekirdeği olarak adlandırılan ve  $N$  normal alt grubuna denk olan  $\{3, 6\}$ ,  $\{6, 3\}$  ve  $\{4, 4\}$  tipindeki düzgün figürler elde edilir. Bu durumda  $m$  veya  $n$  sayılarının en küçük değeri 3, en büyük değeri 6 olarak bulunur.

Şimdi bu bölümde ispat ettiğimiz teoremler, bulduğumuz sonuçlar yoluyla  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt gruplarını hesaplayabiliriz. Örnek olarak  $g = 12$  için normal alt grupları bulalım. Conder ve Dobcsanyi (2001) tarafından yayımlanan makaleden  $g = 12$  için düzgün figürler dualleri ile birlikte  $\{4,15\}$ ,  $\{4,26\}$ ,  $\{4,48\}$ ,  $\{5,10\}$ ,  $\{6,14\}$ ,  $\{8,10\}$ ,  $\{10,5\}$ ,  $\{10,8\}$ ,  $\{10,30\}$ ,  $\{14,6\}$ ,  $\{14,28\}$ ,  $\{15,4\}$ ,  $\{15,15\}$ ,  $\{25,50\}$ ,  $\{26,4\}$ ,  $\{26,26\}$ ,  $\{28,14\}$ ,  $\{30,10\}$ ,  $\{48,4\}$ ,  $\{48,48\}$  ve  $\{50,25\}$ 'tir. Jones ve Singerman (1978) tarafından belirlenen  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının belirli üçgen grupların normal alt grupları ile düzgün figürler arasındaki bire bir dönüşümü kullanalım. Bahsettiğimiz dönüşüm şu şekildedir:  $q$ 'yu bölen her  $m \in N$  için,

$$\theta : H(\lambda_q) \rightarrow (2, m, n) \cong H(\lambda_q)/N$$

olacak şekilde  $N$  normal alt grubu vardır. Bu grubun simgesi,  $f$  düzgün figürün yüz sayısını,  $e$  kenar sayısını ve  $v$  ise köşe sayısını göstermek üzere  $N \cong \left(g; \frac{q}{m}^{(f)}, \infty^{(v)}\right)$  şeklindedir. Şimdi  $g = 12$  için  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun normal alt gruplarını  $q \geq 3$  değerleri için hesaplayalım. Burada  $q$  sayısı 1.44 Tanımından (Hecke grubu) en küçük 3 olur.  $q$  sayısının en büyük değeri ise 4.2.12 Sonucu gereği düzgün figürün cinsi  $g$ 'ye göre en fazla  $4g + 2$  olacağından  $g = 12$  için  $4 \cdot 12 + 2 = 50$  olur.  $q = 3$  için  $m|3$  şartını sağlayan  $\{m, n\}$  değerlerine bakalım.  $g = 12$  için  $m = 3$  veya  $n = 3$  olacak şekilde bir düzgün figür olmadığından  $q = 3$  için bir normal alt grup yoktur.  $q = 4$  için  $m|4$  şartını sağlayan  $\{m, n\}$  değerlerine bakalım.  $g = 12$  için  $m = 4$  veya  $n = 4$  olacak şekilde düzgün figürler  $\{4,15\}$ ,  $\{4,26\}$  ve  $\{4,48\}$ 'dir. Dolayısıyla  $N$  normal alt grupları vardır.  $\{4,15\}$  düzgün figürünün köşe sayısı 8, kenar sayısı 60 ve yüz sayısı 30 olduğundan normal alt grubun simgesi  $N \cong \left(g; \frac{q}{m}^{(f)}, \infty^{(v)}\right) = \left(12; \frac{4}{4}^{(30)}, \infty^{(8)}\right) = (12; 1^{(30)}, \infty^{(8)})$  olur.  $1^{(30)}$  durumunu yazmaya gerek yoktur. Simge  $N \cong (12; \infty^{(8)})$  şekline dönüşür. Serbest grup olarak gösterimi ise 4.2.1 Teoremi gereği  $N \cong F_{1+e-f} * \prod_{i=1}^f C_d$  olmalıdır. Burada  $d = q / m$ 'dir. Figürün kenar ve yüz değerlerini yerine koyarsak normal alt grubun simgesi  $N \cong F_{1+60-30} * \prod_{i=1}^{30} C_{1/1} = F_{31}$  olur. Burada  $C_1$  devirli grubu aşıkardır. Yazmaya gerek yoktur. Aynı işlemleri  $\{4,26\}$  ve  $\{4,48\}$  düzgün figürleri için yaparak

serbest normal alt grupların simgelerini sırasıyla  $F_{27}$  ve  $F_{25}$  buluruz.  $q = 5$  için  $m|5$  şartını sağlayan düzgün figür  $\{5,10\}$ 'dur. Bu düzgün figürün köşe sayısı 11, kenar sayısı 55 ve yüz sayısı 22 olduğundan figürün mertebesi  $\left(\frac{\mu}{2}\right) = e$  eşitliği ile  $\left(\frac{\mu}{2}\right) = 55$  olur. Buradan  $\mu = 110$  bulunur. Dolayısıyla  $N$  normal alt grubun simgesi 4.2.2 Sonucunda değerler yerine yazılarak

$$N \cong F_{1+\left(\frac{m-2}{2m}\right)\cdot\mu} * \prod_{i=1}^f C_d \cong F_{1+\left(\frac{5-2}{10}\right)\cdot 110} * \prod_{i=1}^{22} C_1$$

bulunur. İşlemler yapılarak normal alt grubun simgesi için  $N \cong F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_1 = F_{34}$  elde edilir.  $q = 6$  için  $m|6$  şartını sağlayan düzgün figür  $\{6,14\}$ 'tür. Bu düzgün figürün köşe sayısı 6, kenar sayısı 42 ve yüz sayısı 14 olduğundan 4.2.11 Teoremi gereği normal alt grubun rankı  $r(N) = \frac{f\cdot(q-2)}{2} + 1$  formülü ile bulunur. Buradan rank,  $r(N) = \frac{14\cdot(6-2)}{2} + 1$  olur. Sonuç olarak  $r(N) = 29$  bulunur. Normal alt grubun simgesi  $N \cong F_{29}$  olarak bulunur.  $q = 7$  için  $m|7$  şartını sağlayan bir düzgün figür olmadığından  $q = 7$  için bir normal alt grup yoktur.  $q = 8$  için  $m|8$  şartını sağlayan düzgün figürler  $\{4,15\}$ ,  $\{4,26\}$ ,  $\{4,48\}$  ve  $\{8,10\}$ 'dur.  $\{4,15\}$  figürü için  $m|8$  şartı sağlanır.  $\{4,15\}$  düzgün figürünün köşe sayısı 8, kenar sayısı 60 ve yüz sayısı 30 olduğundan normal alt grubun simgesi 4.2.1 Teoremi gereği  $N \cong F_{1+e-f} * \prod_{i=1}^f C_d = F_{1+60-30} * \prod_{i=1}^{30} C_d$  olmalıdır. Burada  $4|8$  olduğundan her bir  $d = 8 / 4 = 2$  için, serbest çarpımdaki sayısı 30 olan 2 uzunluğunda bir  $C_2$  devir elde edilir. Bulunan  $N$  alt grubu,  $N \cong F_{1+60-30} * \prod_{i=1}^{30} C_{8/4} = F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_2$  şeklinde serbest olmayan bir normal alt gruptur.  $\{4,26\}$  düzgün figürünün köşe sayısı 4, kenar sayısı 52 ve yüz sayısı 26 olduğundan 4.2.11 Teoremi gereği  $N$ , serbest olmayan normal alt grubu için rank  $r(N) = \frac{f\cdot(q-2d)}{2d} + 1$  eşitliği ile bulunur.  $d = 8 / 4 = 2$  olduğundan değerler eşitlikte yerine yazılırsa  $r(N) = \frac{26\cdot(8-2\cdot 2)}{2\cdot 2} + 1 = 27$  bulunur. Dolayısıyla serbest olmayan normal alt grup  $F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_2$  olarak bulunur.  $\{4,48\}$  düzgün figürünün köşe sayısı 2, kenar sayısı 48 ve yüz sayısı 24 olduğundan 4.2.11 Teoremi gereği  $N$ , serbest olmayan alt grubunun rankı  $r(N) = \frac{f\cdot(q-2d)}{2d} + 1$  eşitliği ile bulunur.

$d = 8 / 4 = 2$  olduğundan değerler eşitlikte yerine yazılırsa  $r(N) = \frac{24 \cdot (8-2 \cdot 2)}{2 \cdot 2} + 1 = 25$  bulunur. Dolayısıyla serbest olmayan normal alt grup  $F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_2$  olur.  $\{8,10\}$  düzgün figürünün köşe sayısı 8, kenar sayısı 40, yüz sayısı 10 ve  $8|8$  olduğundan serbest normal alt grup vardır ve bu grubun simgesi 4.2.1 Teoremi gereği  $N \cong F_{1+e-f} * \prod_{i=1}^f C_d$  olmalıdır. Değerler formülde yerine yazılırsa normal alt grup  $F_{1+40-10} * \prod_{i=1}^{10} C_1 = F_{31}$  olarak bulunur.

50'ye kadar olan  $q$  değerleri için normal alt gruplar da benzer şekilde bulunur.  $q = 50$  için  $m|50$  şartını sağlayan düzgün figürler  $\{5,10\}$ ,  $\{10,8\}$ ,  $\{10,30\}$  ve  $\{25,50\}$ 'dir. Burada  $\{5,10\}$  düzgün figürünün dual figürü  $\{10,5\}$  figürü ve  $\{50,25\}$  dual figürü de  $m|50$  şartını sağlar.  $\{50,25\}$  düzgün figürü için  $50|50$  olduğundan bir serbest normal alt grup vardır ve bu normal alt grubun rankı 4.2.11 Teoremi gereği  $r(N) = \frac{f \cdot (q-2)}{2} + 1$  eşitliği ile bulunur.  $\{50,25\}$  düzgün figürünün köşe sayısı 2, kenar sayısı 25 ve yüz sayısı 1 olduğundan bu değerler rank formülünde yerine yazılırsa  $r(N) = \frac{1 \cdot (50-2)}{2} + 1 = 25$  bulunur. Bu serbest normal alt grubun simgesi de  $F_{25}$  olur. Diğer düzgün figürler için  $C_d = C_{q/m} = C_{50/5} = C_{10}$ ,  $C_5$  ve  $C_2$  devirleri ile birlikte serbest olmayan normal alt gruplar vardır. Bu normal alt grupların rankı 4.2.11 Teoremi gereği  $r(N) = \frac{f \cdot (q-2d)}{2d} + 1$  eşitliği ile bulunur. Değerler eşitlikte yerine yazılıp işlemler yapıldığında  $\{5,10\}$ ,  $\{10,5\}$ ,  $\{10,8\}$ ,  $\{10,30\}$  ve  $\{25,50\}$  düzgün figürlerinin rankları sırasıyla 34, 45, 33, 25, 24 bulunur. Serbest olmayan normal alt gruplar da sırasıyla  $F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_{10}$ ,  $F_{45} * \prod_{i=1}^{11} C_5$ ,  $F_{33} * \prod_{i=1}^8 C_5$ ,  $F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_5$ ,  $F_{24} * \prod_{i=1}^2 C_2$  olarak bulunur.  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $g = 12$  ve  $3 \leq q \leq 50$  değerleri için serbest ve serbest olmayan normal alt grupları Çizelge 4.3'te gösterilmiştir.

Bu çalışmada  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $2 \leq g \leq 101$  ve  $q = 3,4,5,6,7,8,9,10$  değerleri için serbest ve serbest olmayan alt gruplarının simgeleri ve sayıları bulunmuştur. Bu sayılar Çizelge 4.7'de verilmiştir. Çizelge 4.7'de \$ işareti serbest normal alt grup sayısını, # işareti ise serbest olmayan normal alt grup sayısını göstermektedir.



$H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $3 \leq g \leq 16$  ve  $3 \leq q \leq 66$  için tüm serbest normal alt grupların simgeleri,  $3 \leq g \leq 12$  ve  $3 \leq q \leq 50$  için tüm serbest olmayan normal alt grupların simgeleri bulunmuştur. Çok sayıda normal alt grup olduğundan hepsini teze sığdırmak zordur. Bunlardan bir kısmı tezde çizelgeler halinde gösterilmiştir. Detaylar için bölüm sonundaki çizelgeler incelenebilir.

$H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $2 \leq g \leq 6$  ve  $3 \leq q \leq 26$  değerleri için serbest normal alt gruplarının simgeleri Çizelge 4.1’de gösterilmiştir.

$H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $7 \leq g \leq 11$  ve  $3 \leq q \leq 46$  değerleri için serbest normal alt gruplarının simgeleri Çizelge 4.2’de gösterilmiştir.

$H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $2 \leq g \leq 4$  ve  $3 \leq q \leq 18$  değerleri için serbest olmayan normal alt gruplarının simgeleri Çizelge 4.4’te gösterilmiştir.

$H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $5 \leq g \leq 7$  ve  $3 \leq q \leq 30$  değerleri için serbest olmayan normal alt gruplarının simgeleri Çizelge 4.5’te gösterilmiştir.

$H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt gruplarının simgeleri Çizelge 4.6’da gösterilmiştir.

$H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $q$  değerleri için normal alt grupları tespit edilirken bu normal alt gruplara denk gelen cinsi  $g$  olan düzgün figürlerden yararlanıldığından uygun  $q$  değerleri için o cinsteki düzgün figür yoksa bu durum çizelgelerde “-” işareti ile gösterilmiştir.

$H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $q$  değerleri için normal alt grupları tespit edilirken 4.12 Sonucundan dolayı düzgün figürün  $g$  ile gösterilen cinsine göre  $q$  sayısının alabileceği değer aralığı belli olduğundan bu aralık dışındaki değerlerde normal alt grup yoktur. Bu durum tabloda “\*” işareti ile gösterilmiştir.

**Çizelge 4.1.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 6$  ve  $3 \leq q \leq 26$  değerleri için serbest normal alt grupları

$g \backslash q$	2	3	4	5	6
3	$F_9$	$F_{29}, F_{17}, F_9$	$F_{13}$	$F_{33}, F_{21}$	$F_{26}$
4	$F_7, F_5$	$F_{13}, F_9, F_7$	$F_{31}, F_{19}, F_{11}, F_9$	$F_{41}, F_{25}, F_{17}, F_{13}, F_{11}$	$F_{31}, F_{19}, F_{15}, F_{13}$
5	$F_4$	-	$F_{37}, F_{19}$	$F_{49}, F_{25}$	$F_{16}$
6	$F_9, F_5$	$F_{17}, F_9$	$F_{25}, F_{13}, F_9$	$F_{33}, F_{17}, F_{11}$	$F_{41}, F_{17}$
7	-	$F_{61}, F_6$	-	-	-
8	$F_{19}, F_7, F_4$	$F_{37}, F_{13}, F_7$	-	$F_{73}, F_{25}, F_{13}$	$F_{19}$
9	-	-	$F_8$	-	$F_{29}, F_{15}$
10	$F_5$	-	$F_{17}, F_9$	$F_{49}$	$F_{61}, F_{21}, F_{13}$
11	*	-	-	$F_{10}$	-
12	*	$F_{21}, F_{11}, F_6$	$F_{31}, F_{11}$	$F_{21}, F_{11}$	-
13	*	-	-	-	$F_{12}$
14	*	$F_7$	-	-	$F_{25}, F_{13}$
15	*	*	-	$F_{14}$	$F_{14}$
16	*	*	$F_{15}, F_8$	-	-
17	*	*	-	-	-
18	*	*	$F_9$	-	-
19	*	*	*	-	-
20	*	*	*	$F_{19}, F_{10}$	-
21	*	*	*	-	-
22	*	*	*	$F_{11}$	-
23	*	*	*	*	-
24	*	*	*	*	$F_{23}, F_{12}$
25	*	*	*	*	-
26	*	*	*	*	$F_{13}$

**Çizelge 4.2.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $7 \leq g \leq 11$  ve  $3 \leq q \leq 46$  değerleri için serbest normal alt grupları

$g \backslash q$	7	8	9	10	11
3	$F_{85}, F_{25}$	$F_{57}$	$F_{33}$	$F_{73}, F_{55}, F_{37},$ $F_{31}, F_{28}, F_{25}$	-
4	$F_{17}, F_{15}$	$F_{19}, F_{17}$	$F_{81}, F_{49}, F_{33},$ $F_{25}, F_{21}, F_{19}$	$F_{91}, F_{55}, F_{43},$ $F_{37}, F_{28}, F_{23}$ $F_{21}$	$F_{61}, F_{41}, F_{31},$ $F_{25}, F_{23}$
5	-	-	$F_{97}, F_{49}, F_{37}$	$F_{109}$	-
6	$F_{19}, F_{17}, F_{15}$	$F_{29}, F_{21}, F_{17}$	$F_{65}, F_{41}, F_{33}$	$F_{73}, F_{37}, F_{25}$ $F_{21}$	$F_{81}, F_{41}, F_{33}$ $F_{23}$
7	$F_{181}, F_{21}$	-	-	$F_{61}$	-
8	-	$F_{127}, F_{19}$	$F_{49}, F_{25}, F_{19}$	$F_{55}, F_{28}, F_{163}$	$F_{61}, F_{37}, F_{31}$ $F_{25}$
9	$F_{22}$	-	-	$F_{127}, F_{22}$	-
10	-	$F_{25}, F_{17}$	-	-	-
11	-	-	-	-	-
12	$F_{61}, F_{21}$	$F_{21}$	$F_{81}, F_{41}, F_{21}$	$F_{91}, F_{46}, F_{31},$ $F_{21}$	$F_{51}, F_{26}$
13	-	-	-	-	-
14	-	-	$F_{19}$	-	-
15	$F_{14}$	-	-	$F_{79}$	-
16	$F_{29}, F_{15}$	-	-	-	$F_{29}$
17	-	$F_{16}$	-	-	-
18	-	$F_{33}, F_{17}$	-	$F_{73}, F_{25}$	-
19	-	-	$F_{18}$	-	-
20	-	$F_{19}$	$F_{37}, F_{19}$	-	-
21	$F_{20}$	-	$F_{20}$	$F_{20}$	-

**Çizelge 4.2.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $7 \leq g \leq 11$  ve  $3 \leq q \leq 46$  değerleri için serbest normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	7	8	9	10	11
22	-	-	-	$F_{41}, F_{21}$	-
23	-	-	-	-	$F_{22}$
24	-	$F_{23}$	$F_{23}$	$F_{67}, F_{23}$	$F_{45}, F_{23}$
25	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-
28	$F_{27}, F_{14}$	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-
30	$F_{15}$	-	-	$F_{29}$	-
31	*	-	-	-	-
32	*	$F_{31}, F_{16}$	-	-	-
33	*	-	-	-	$F_{32}$
34	*	$F_{17}$	-	-	-
35	*	*	-	-	-
36	*	*	$F_{35}, F_{18}$	-	-
37	*	*	-	-	-
38	*	*	$F_{19}$	-	-
39	*	*	*	-	-
40	*	*	*	$F_{39}, F_{20}$	-
41	*	*	*	-	-
42	*	*	*	$F_{21}$	-
43	*	*	*	*	-
44	*	*	*	*	$F_{43}, F_{22}$
45	*	*	*	*	-
46	*	*	*	*	$F_{23}$

**Çizelge 4.3.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $g = 12$  ve  $3 \leq q \leq 50$  değerleri için \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grupları

$q$	\$	#
3	-	-
4	$F_{31}, F_{27}, F_{25}$	-
5	$F_{34}$	-
6	$F_{29}$	-
7	-	-
8	$F_{31}$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_2, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_2$
9	-	-
10	$F_{45}, F_{33}, F_{25}$	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_2$
11	-	-
12	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_3, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_3, F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_2$
13	-	-
14	$F_{37}, F_{25}$	-
15	$F_{53}, F_{27}$	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_3$
16	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_4, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_4, F_{31} * \prod_{i=1}^{10} C_2$
17	-	-
18	-	$F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_3$
19	-	-
20	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_5, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_5, F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_4,$ $F_{45} * \prod_{i=1}^{11} C_2, F_{33} * \prod_{i=1}^8 C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_2$
21	-	-
22	-	-
23	-	-
24	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_6, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_6, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_6, F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_4$
25	$F_{24}$	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_5$
26	$F_{49}, F_{25}$	-
27	-	-

**Çizelge 4.3.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $g = 12$  ve  $3 \leq q \leq 50$  değerleri için \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$q$	\$	#
28	$F_{27}$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_7, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_7, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_7, F_{37} * \prod_{i=1}^6 C_2,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^4 C_2$
29	-	-
30	$F_{29}$	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_6, F_{45} * \prod_{i=1}^{11} C_3, F_{33} * \prod_{i=1}^8 C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_3,$ $F_{53} * \prod_{i=1}^8 C_2, F_{27} * \prod_{i=1}^4 C_2$
31	-	-
32	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_8, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_8, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_8, F_{31} * \prod_{i=1}^{10} C_4$
33	-	-
34	-	-
35	-	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_7$
36	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_9, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_9, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_9, F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_6$
37	-	-
38	-	-
39	-	-
40	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_{10}, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_{10}, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_{10}, F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_8,$ $F_{31} * \prod_{i=1}^{10} C_5, F_{45} * \prod_{i=1}^{11} C_4, F_{33} * \prod_{i=1}^8 C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_4$
41	-	-
42	-	$F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_7, F_{37} * \prod_{i=1}^6 C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^4 C_3$
43	-	-
44	-	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_{11}, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_{11}, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_{11}$
45	-	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_9, F_{53} * \prod_{i=1}^8 C_3, F_{27} * \prod_{i=1}^4 C_3$
46	-	-
47	-	-
48	$F_{47}, F_{24}$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_{12}, F_{27} * \prod_{i=1}^{26} C_{12}, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_{12}, F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_8,$ $F_{31} * \prod_{i=1}^{10} C_6$
49	-	-

**Çizelge 4.3.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $g = 12$  ve  $3 \leq q \leq 50$  değerleri için \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$q$	\$	#
50	$F_{25}$	$F_{34} * \prod_{i=1}^{22} C_{10}, F_{45} * \prod_{i=1}^{11} C_5, F_{33} * \prod_{i=1}^8 C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_5,$ $F_{24} * \prod_{i=1}^2 C_2$

**Çizelge 4.4.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 4$  ve  $3 \leq q \leq 18$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları

$g \backslash q$	2	3	4
3	-	-	-
4	-	-	-
5	-	-	-
6	$F_9 * \prod_{i=1}^{16} C_2$	$F_{29} * \prod_{i=1}^{56} C_2, F_{17} * \prod_{i=1}^{32} C_2,$ $F_9 * \prod_{i=1}^{16} C_2$	$F_{13} * \prod_{i=1}^{24} C_2$
7	-	-	-
8	$F_7 * \prod_{i=1}^6 C_2,$ $F_5 * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_2, F_9 * \prod_{i=1}^8 C_2,$ $F_7 * \prod_{i=1}^6 C_2$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_2, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_2,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_2, F_9 * \prod_{i=1}^8 C_2$
9	$F_9 * \prod_{i=1}^{16} C_3$	$F_{29} * \prod_{i=1}^{56} C_3, F_{17} * \prod_{i=1}^{32} C_3,$ $F_9 * \prod_{i=1}^{16} C_3$	$F_{13} * \prod_{i=1}^{24} C_3$
10	$F_4 * \prod_{i=1}^2 C_2$	-	$F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_2, F_{19} * \prod_{i=1}^{12} C_2$
11	*	-	-
12	*	$F_{29} * \prod_{i=1}^{56} C_4, F_{17} * \prod_{i=1}^{32} C_4,$ $F_9 * \prod_{i=1}^{16} C_4, F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_3,$ $F_9 * \prod_{i=1}^8 C_3, F_7 * \prod_{i=1}^6 C_3,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_2, F_9 * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{13} * \prod_{i=1}^{24} C_4, F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_3,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_3, F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_3,$ $F_9 * \prod_{i=1}^8 C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_2,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^6 C_2, F_9 * \prod_{i=1}^4 C_2$
13	*	-	-
14	*	$F_{61} * \prod_{i=1}^{24} C_2, F_6 * \prod_{i=1}^2 C_2$	-

**Çizelge 4.4.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 4$  ve  $3 \leq q \leq 18$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	2	3	4
15	*	*	$F_{13} * \prod_{i=1}^{24} C_5, F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_3,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{12} C_2$
16	*	*	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_4, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_4,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_4, F_9 * \prod_{i=1}^8 C_4$
17	*	*	-
18	*	*	$F_{13} * \prod_{i=1}^{24} C_6, F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_3,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^6 C_3, F_9 * \prod_{i=1}^4 C_3,$ $F_8 * \prod_{i=1}^2 C_2$

**Çizelge 4.5.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $5 \leq g \leq 7$  ve  $3 \leq q \leq 30$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları

$g \backslash q$	5	6	7
3	-	-	-
4	-	-	-
5	-	-	-
6	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_2, F_{21} * \prod_{i=1}^{40} C_2$	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_2$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_2$
7	-	-	-
8	$F_{41} * \prod_{i=1}^{40} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_2,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_2, F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_2,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_2$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_2,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_2,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_2,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_2$	$F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_2, F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_2$
9	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_3, F_{21} * \prod_{i=1}^{40} C_3$	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_3$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_3$
10	$F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{16} C_2$	$F_{16} * \prod_{i=1}^{10} C_2$	-



**Çizelge 4.5.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $5 \leq g \leq 7$  ve  $3 \leq q \leq 30$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	5	6	7
11	-	-	-
12	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_4, F_{21} * \prod_{i=1}^{40} C_4,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{40} C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_3,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_3, F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_3,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_3, F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_2,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_2, F_{11} * \prod_{i=1}^5 C_2$	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_4,$ $F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_3,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_3,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_3,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_3,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_2,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_2$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_4,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_3, F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_3,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^9 C_2, F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_2,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^7 C_2$
13	-	-	-
14	-	-	$F_{181} * \prod_{i=1}^{72} C_2, F_{21} * \prod_{i=1}^8 C_2$
15	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_5, F_{21} * \prod_{i=1}^{40} C_5,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^{16} C_3$	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_5,$ $F_{16} * \prod_{i=1}^{10} C_3$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_5$
16	$F_{41} * \prod_{i=1}^{40} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_4,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_4, F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_4,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_4, F_{73} * \prod_{i=1}^{24} C_2,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^8 C_2, F_{13} * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_4,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_4,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_4,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_4,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_2$	$F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_4, F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_4$
17	-	-	-
18	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_6, F_{21} * \prod_{i=1}^{40} C_6$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_3, F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_3,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^5 C_3$	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_6,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_3,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_3,$ $F_{29} * \prod_{i=1}^8 C_2,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_6, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_6,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^9 C_3, F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_3,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^7 C_3, F_{22} * \prod_{i=1}^6 C_2$
19	-	-	-

**Çizelge 4.5.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $5 \leq g \leq 7$  ve  $3 \leq q \leq 30$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	5	6	7
20	$F_{41} * \prod_{i=1}^{40} C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_5,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_5, F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_5,$ $F_{11} * \prod_{i=1}^{10} C_5, F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_4,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^{16} C_4, F_{49} * \prod_{i=1}^{12} C_2$	$F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_5,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_5,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_5,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_5,$ $F_{16} * \prod_{i=1}^{10} C_4,$ $F_{61} * \prod_{i=1}^{15} C_2,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^5 C_2,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^3 C_2$	$F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_5, F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_5$
21	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_7, F_{21} * \prod_{i=1}^{40} C_7$	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_7$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_7, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_7,$ $F_{181} * \prod_{i=1}^{72} C_3, F_{21} * \prod_{i=1}^8 C_3$
22	$F_{10} * \prod_{i=1}^2 C_2$	-	-
23	*	-	-
24	*	$F_{26} * \prod_{i=1}^{50} C_8,$ $F_{31} * \prod_{i=1}^{30} C_6,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_6,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_6,$ $F_{13} * \prod_{i=1}^{12} C_6,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_4,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_4,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_3,$	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_8, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_8,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_6, F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_6,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^9 C_4, F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_4,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^7 C_4, F_{61} * \prod_{i=1}^{12} C_2,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^4 C_2$
25	*	$F_{16} * \prod_{i=1}^{10} C_5$	-
26	*	$F_{12} * \prod_{i=1}^2 C_2$	-
27	*	*	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_9, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_9,$ $F_{22} * \prod_{i=1}^6 C_3$

**Çizelge 4.5.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $5 \leq g \leq 7$  ve  $3 \leq q \leq 30$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	5	6	7
28	*	*	$F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_7, F_{15} * \prod_{i=1}^{14} C_7,$ $F_{181} * \prod_{i=1}^{72} C_4, F_{21} * \prod_{i=1}^8 C_4$
29	*	*	-
30	*	*	$F_{85} * \prod_{i=1}^{168} C_{10}, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_{10},$ $F_{19} * \prod_{i=1}^9 C_5, F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_5,$ $F_{15} * \prod_{i=1}^7 C_5, F_{14} * \prod_{i=1}^2 C_2$

**Çizelge 4.6.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları

$g \backslash q$	8	9	10
3	-	-	-
4	-	-	-
5	-	-	-
6	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_2$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_2$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_2, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_2,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_2, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_2,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_2$
7	-	-	-
8	$F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_2,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_2$	$F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_2, F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_2,$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_2,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_2, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_2$	$F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_2, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_2,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_2, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_2,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_2, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_2,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_2$
9	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_3$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_3$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_3, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_3,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_3, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_3,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_3$

**Çizelge 4.6.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	8	9	10
10	-	$F_{97} * \prod_{i=1}^{64} C_2, F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_2,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_2$	$F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_2$
11	-	-	-
12	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_4,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_3,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_3,$ $F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_2,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_2,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_2$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_4, F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_3,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_3, F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_3,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_3, F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_3,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_3, F_{65} * \prod_{i=1}^{32} C_2,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_2, F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_2$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_4, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_4,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_4, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_4,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_4,$ $F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_3, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_3,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_3, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_3,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_3, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_3,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_3, F_{73} * \prod_{i=1}^{36} C_2,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{18} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_2,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_2$
13	-	-	-
14	-	-	$F_{61} * \prod_{i=1}^{24} C_2,$
15	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_5$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_5, F_{97} * \prod_{i=1}^{64} C_3,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_3, F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_3$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_5, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_5,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_5, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_5,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_5,$ $F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_3$
16	$F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_4,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_4$ $F_{127} * \prod_{i=1}^{42} C_2,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_2$	$F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_4, F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_4,$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_4,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_4, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_4,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{16} C_2, F_{25} * \prod_{i=1}^8 C_2,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_2$	$F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_4, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_4,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_4, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_4,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_4, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_4,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_4, F_{163} * \prod_{i=1}^{54} C_2,$ $F_{55} * \prod_{i=1}^{18} C_2, F_{28} * \prod_{i=1}^9 C_2$
17	-	-	-

**Çizelge 4.6.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	8	9	10
18	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_6,$ $F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_3,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_3,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_3$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_6, F_{65} * \prod_{i=1}^{32} C_3,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_3, F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_3$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_6, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_6,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_6, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_6,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_6, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_6,$ $F_{73} * \prod_{i=1}^{36} C_3, F_{37} * \prod_{i=1}^{18} C_3,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_3, F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_3,$ $F_{127} * \prod_{i=1}^{36} C_2, F_{22} * \prod_{i=1}^6 C_2$
19	-	-	-
20	$F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_5,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_5,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_2,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_5, F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_5,$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_5,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_5, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_5,$ $F_{97} * \prod_{i=1}^{64} C_4, F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_4,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_4$	$F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_5, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_5,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_5, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_5,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_5, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_5,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_5, F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_4$
21	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_7$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_7$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_7, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_7,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_7, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_7,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_7, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_7,$ $F_{61} * \prod_{i=1}^{24} C_3$
22	-	-	-
23	-	-	-
24	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_8,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_6,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_6,$ $F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_4,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_4,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_4,$ $F_{127} * \prod_{i=1}^{42} C_3,$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_8, F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_6,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_6, F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_6,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_6, F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_6,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_6, F_{65} * \prod_{i=1}^{32} C_4,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_4, F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_4,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{16} C_3, F_{25} * \prod_{i=1}^8 C_3,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_3, F_{81} * \prod_{i=1}^{16} C_2,$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_8, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_8,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_8, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_8,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_8, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_8,$ $F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_6, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_6,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_6, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_6,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_6, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_6,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_6, F_{73} * \prod_{i=1}^{36} C_4,$

**Çizelge 4.6.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	8	9	10
24	$F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_3,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{41} * \prod_{i=1}^8 C_2, F_{21} * \prod_{i=1}^4 C_2$	$F_{37} * \prod_{i=1}^{18} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_4,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_4, F_{163} * \prod_{i=1}^{54} C_3,$ $F_{55} * \prod_{i=1}^{18} C_3, F_{28} * \prod_{i=1}^9 C_3,$ $F_{91} * \prod_{i=1}^{18} C_2, F_{46} * \prod_{i=1}^9 C_2,$ $F_{31} * \prod_{i=1}^6 C_2, F_{21} * \prod_{i=1}^4 C_2$
25	-	$F_{97} * \prod_{i=1}^{64} C_5, F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_5,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_5$	$F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_5$
26	-	-	-
27	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_9$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_9$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_9, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_9,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_9, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_9,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_9, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_9,$ $F_{127} * \prod_{i=1}^{36} C_3, F_{22} * \prod_{i=1}^6 C_3$
28	$F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_7,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_7$	$F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_7, F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_7,$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_7, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_7,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_7, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_7,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^3 C_2$	$F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_7, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_7,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_7, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_7,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_7, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_7,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_7, F_{61} * \prod_{i=1}^{24} C_4$
29	-	-	-
30	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_{10},$ $F_{29} * \prod_{i=1}^{14} C_5,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_5,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^8 C_5,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^6 C_3,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^4 C_3$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_{10}, F_{97} * \prod_{i=1}^{64} C_6,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_6, F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_6,$ $F_{65} * \prod_{i=1}^{32} C_5, F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_5,$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_5$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_{10}, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_{10},$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_{10}, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_{10},$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_{10}, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_{10},$ $F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_6, F_{73} * \prod_{i=1}^{36} C_5,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{18} C_5, F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_5,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_5, F_{79} * \prod_{i=1}^{12} C_2$
31	-	-	-

**Çizelge 4.6.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	8	9	10
32	$F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_8,$ $F_{17} * \prod_{i=1}^{16} C_8,$ $F_{127} * \prod_{i=1}^{42} C_4,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_4$	$F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_8, F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_8,$ $F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_8, F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_8,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_8, F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_8,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{16} C_4, F_{25} * \prod_{i=1}^8 C_4,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^6 C_4$	$F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_8, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_8,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_8, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_8,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_8, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_8,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_8, F_{163} * \prod_{i=1}^{54} C_4,$ $F_{55} * \prod_{i=1}^{18} C_4, F_{28} * \prod_{i=1}^9 C_4$
33	$F_{57} * \prod_{i=1}^{112} C_{11}$	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_{11}$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_{11}, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_{11},$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_{11}, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_{11},$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_{11}, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_{11}$
34	$F_{16} * \prod_{i=1}^2 C_2$	-	-
35	*	$F_{97} * \prod_{i=1}^{64} C_7, F_{49} * \prod_{i=1}^{32} C_7,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{24} C_7$	$F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_7, F_{61} * \prod_{i=1}^{24} C_5$
36	*	$F_{33} * \prod_{i=1}^{64} C_{12}, F_{81} * \prod_{i=1}^{80} C_9,$ $F_{49} * \prod_{i=1}^{48} C_9, F_{33} * \prod_{i=1}^{32} C_9,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^{24} C_9, F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_9,$ $F_{19} * \prod_{i=1}^{18} C_9, F_{65} * \prod_{i=1}^{32} C_6,$ $F_{41} * \prod_{i=1}^{20} C_6, F_{33} * \prod_{i=1}^{16} C_6,$ $F_{81} * \prod_{i=1}^{16} C_3, F_{41} * \prod_{i=1}^8 C_3,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^4 C_3$	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_{12}, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_{12},$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_{12}, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_{12},$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_{12}, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_{12},$ $F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_9, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_9,$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_9, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_9,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_9, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_9,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_9, F_{73} * \prod_{i=1}^{36} C_6,$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{18} C_6, F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_6,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_6, F_{127} * \prod_{i=1}^{36} C_4,$ $F_{22} * \prod_{i=1}^6 C_4, F_{91} * \prod_{i=1}^{18} C_3,$ $F_{46} * \prod_{i=1}^9 C_3, F_{31} * \prod_{i=1}^6 C_3,$ $F_{21} * \prod_{i=1}^4 C_3, F_{73} * \prod_{i=1}^9 C_2,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^3 C_2$
37	*	-	-

**Çizelge 4.6.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $8 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  değerleri için serbest olmayan normal alt grupları (devam)

$g \backslash q$	8	9	10
38	*	$F_{18} * \prod_{i=1}^2 C_2$	-
39	*	*	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_{13}, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_{13},$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_{13}, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_{13},$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_{13}, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_{13}$
40	*	*	$F_{91} * \prod_{i=1}^{90} C_{10}, F_{55} * \prod_{i=1}^{54} C_{10},$ $F_{43} * \prod_{i=1}^{42} C_{10}, F_{37} * \prod_{i=1}^{36} C_{10},$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{27} C_{10}, F_{23} * \prod_{i=1}^{22} C_{10},$ $F_{21} * \prod_{i=1}^{20} C_{10}, F_{109} * \prod_{i=1}^{72} C_8,$ $F_{163} * \prod_{i=1}^{54} C_5, F_{55} * \prod_{i=1}^{18} C_5,$ $F_{28} * \prod_{i=1}^9 C_5$
41	*	*	-
42	*	*	$F_{73} * \prod_{i=1}^{144} C_{14}, F_{55} * \prod_{i=1}^{108} C_{14},$ $F_{37} * \prod_{i=1}^{72} C_{14}, F_{31} * \prod_{i=1}^{60} C_{14},$ $F_{28} * \prod_{i=1}^{54} C_{14}, F_{25} * \prod_{i=1}^{48} C_{14},$ $F_{73} * \prod_{i=1}^{36} C_7, F_{37} * \prod_{i=1}^{18} C_7,$ $F_{25} * \prod_{i=1}^{12} C_7, F_{21} * \prod_{i=1}^{10} C_7,$ $F_{61} * \prod_{i=1}^{24} C_6, F_{20} * \prod_{i=1}^2 C_2$

**Çizelge 4.7.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 101$  ve  $3 \leq q \leq 10$  değerleri için \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grup sayıları

$q \backslash g$	3		4		5		6		7		8		9		10	
	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#
2	1	-	2	-	1	-	2	1	-	-	3	2	-	1	1	1
3	3	-	3	-	-	-	2	3	2	-	3	3	-	3	-	-
4	1	-	4	-	2	-	3	1	-	-	-	4	1	1	2	2



**Çizelge 4.7.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 101$  ve  $3 \leq q \leq 10$  değerleri için  
 \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grup sayıları (devam)

$g \backslash q$	3		4		5		6		7		8		9		10	
	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#
5	2	-	5	-	2	-	3	2	-	-	3	5	-	2	1	2
6	1	-	4	-	1	-	2	1	-	-	1	4	2	1	3	1
7	2	-	2	-	-	-	3	2	2	-	-	2	1	2	-	-
8	1	-	2	-	-	-	3	1	-	-	2	2	-	1	2	-
9	1	-	6	-	3	-	3	1	-	-	3	6	-	1	-	3
10	6	-	7	-	1	-	4	6	1	-	3	7	2	6	-	1
11	-	-	5	-	-	-	4	-	-	-	4	5	-	-	-	-
12	-	-	3	-	1	-	1	-	-	-	1	3	-	-	3	1
13	2	-	4	-	1	-	4	2	-	-	-	4	1	2	2	1
14	1	-	2	-	-	-	3	1	1	-	1	2	-	1	1	-
15	4	-	4	-	-	-	2	4	1	-	2	4	1	4	1	-
16	1	-	4	-	2	-	3	1	-	-	2	4	-	1	3	2
17	3	-	6	-	2	-	5	3	2	-	4	6	-	3	1	2
18	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	2	3	-	-	1	-
19	2	-	7	-	2	-	4	2	2	-	2	7	1	2	2	2
20	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	2	2	1	-	1	-
21	1	-	7	-	-	-	3	1	-	-	5	7	-	1	-	-
22	2	-	3	-	1	-	4	2	-	-	4	3	1	2	1	1
23	-	-	2	-	-	-	1	-	-	-	1	2	-	-	-	-
24	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	3	-	-	2	-
25	4	-	6	-	-	-	6	4	-	-	-	6	1	4	3	-
26	2	-	2	-	1	-	3	2	-	-	2	2	-	2	4	1
27	1	-	5	-	1	-	-	1	-	-	4	5	1	1	-	1
28	4	-	4	-	-	-	5	4	-	-	3	4	1	4	2	-
29	-	-	5	-	1	-	6	-	-	-	3	5	-	-	1	1
30	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	3	-	-	-	-

**Çizelge 4.7.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 101$  ve  $3 \leq q \leq 10$  değerleri için  
 \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grup sayıları (devam)

$g \backslash q$	3		4		5		6		7		8		9		10	
	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#
31	2	-	7	-	1	-	4	2	-	-	-	7	-	2	-	1
32	-	-	2	-	1	-	3	-	-	-	1	2	-	-	3	1
33	2	-	7	-	1	-	3	2	1	-	5	7	-	2	1	1
34	-	-	4	-	2	-	2	-	-	-	1	4	1	-	3	2
35	-	-	4	-	-	-	2	-	-	-	3	4	-	-	-	-
36	2	-	4	-	1	-	3	2	-	-	2	4	-	2	3	1
37	5	-	8	-	-	-	7	5	-	-	3	8	1	5	2	-
38	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	2	2	-	-	1	-
39	1	-	3	-	-	-	-	1	-	-	3	3	1	1	1	-
40	1	-	3	-	-	-	5	1	1	-	1	3	2	1	1	-
41	1	-	9	-	2	-	6	1	-	-	6	9	6	1	-	2
42	-	-	3	-	1	-	1	-	-	-	2	3	-	-	2	1
43	3	-	3	-	-	-	6	3	-	-	3	3	2	3	1	-
44	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	1	2	-	-	2	-
45	3	-	4	-	1	-	2	3	-	-	3	4	-	3	2	1
46	2	-	6	-	-	-	5	2	-	-	3	6	2	2	2	-
47	-	-	2	-	-	-	1	-	-	-	2	2	-	-	-	-
48	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	3	-	-	2	-
49	3	-	11	-	3	-	8	3	3	-	1	11	1	3	3	3
50	1	-	3	-	-	-	5	1	-	-	2	3	-	1	-	-
51	2	-	8	-	-	-	2	2	-	-	6	8	-	2	-	-
52	1	-	2	-	-	-	3	1	-	-	1	2	-	1	2	-
53	-	-	7	-	-	-	5	-	-	-	4	7	-	-	-	-
54	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	3	-	-	1	-
55	3	-	8	-	1	-	9	3	1	-	2	8	1	3	1	1
56	1	-	3	-	1	-	4	1	-	-	3	3	-	1	5	1

**Çizelge 4.7.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 101$  ve  $3 \leq q \leq 10$  değerleri için  
 \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grup sayıları (devam)

$g \backslash q$	3		4		5		6		7		8		9		10	
	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#
57	2	-	6	-	1	-	4	2	-	-	4	6	-	2	2	1
58	1	-	3	-	-	-	4	1	-	-	-	3	1	1	1	-
59	-	-	4	-	-	-	1	-	1	-	3	4	-	-	-	-
60	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	3	-	-	1	3
61	-	-	10	-	1	-	7	-	-	-	-	10	-	-	2	1
62	-	-	2	-	1	-	3	-	-	-	1	2	-	-	2	1
63	1	-	3	-	-	-	-	1	1	-	2	3	1	1	-	-
64	4	-	3	-	1	-	6	4	-	-	2	3	1	4	2	1
65	3	-	9	-	3	-	7	3	1	-	5	9	-	3	1	3
66	1	-	4	-	-	-	1	1	-	-	2	4	1	1	3	-
67	-	-	3	-	-	-	3	-	-	-	1	3	1	-	1	-
68	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	1	2	-	-	2	-
69	1	-	6	-	-	-	1	1	-	-	4	6	1	1	-	-
70	-	-	2	-	1	-	2	-	-	-	-	2	-	-	-	1
71	-	-	4	-	-	-	3	-	-	-	4	4	1	-	-	-
72	-	-	3	-	1	-	1	-	-	-	1	3	-	-	3	1
73	6	-	12	-	1	-	10	6	1	-	3	12	1	6	4	1
74	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	3	2	-	-	1	-
75	1	-	5	-	-	-	1	1	-	-	5	5	-	1	-	-
76	3	-	3	-	1	-	5	3	-	-	-	3	2	3	4	1
77	-	-	4	-	-	-	4	-	-	-	3	4	1	-	1	-
78	1	-	3	-	-	-	2	1	-	-	1	3	-	1	2	-
79	1	-	5	-	-	-	5	1	1	-	2	5	2	1	-	-
80	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	1	2	-	-	1	-
81	2	-	11	-	4	-	3	2	-	-	7	11	2	2	2	4
82	4	-	6	-	1	-	6	4	-	-	3	6	2	4	2	1

**Çizelge 4.7.**  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun  $2 \leq g \leq 101$  ve  $3 \leq q \leq 10$  değerleri için  
 \$: serbest ve #: serbest olmayan normal alt grup sayıları (devam)

$q \backslash g$	3		4		5		6		7		8		9		10	
	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#	\$	#
83	-	-	4	-	-	-	2	-	-	-	4	4	-	-	-	-
84	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	1	3	-	-	2	-
85	4	-	8	-	-	-	10	4	-	-	4	8	1	4	2	-
86	1	-	2	-	-	-	3	1	-	-	1	2	-	1	2	-
87	1	-	3	-	-	-	-	1	1	-	2	3	-	1	-	-
88	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	-	2	-	-	2	-
89	1	-	5	-	1	-	4	1	-	-	3	5	-	1	2	1
90	-	-	3	-	-	-	1	-	-	-	2	3	-	-	-	-
91	3	-	10	-	2	-	6	3	-	-	4	10	-	3	2	2
92	1	-	3	-	-	-	7	1	-	-	2	3	-	1	2	-
93	-	-	3	-	-	-	-	-	1	-	3	3	-	-	-	-
94	1	-	4	-	-	-	4	1	-	-	-	4	1	1	2	-
95	-	-	2	-	-	-	1	-	-	-	1	2	-	-	-	-
96	1	-	3	-	-	-	1	1	-	-	1	3	1	1	3	-
97	3	-	12	-	2	-	11	3	3	-	1	12	1	3	2	2
98	-	-	2	-	-	-	3	-	-	-	2	2	-	-	1	-
99	2	-	5	-	-	-	1	2	1	-	5	5	-	2	-	-
100	1	-	5	-	-	-	3	1	1	-	1	5	2	1	3	-
101	-	-	8	-	1	-	6	-	-	-	7	8	-	-	1	1

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Erich Hecke tarafından 1936 yılında yayımlanan bir makalede tanımlanmış olan Hecke grupları için normal alt gruplar, düzgün figürler sayesinde 1978 yılında Jones ve Singerman tarafından tanımlanan bire bir dönüşüm vasıtasıyla tespit edilebilir. 1993 yılına kadar cinsi 7'ye kadar olan düzgün figürler bilindiğinden Cangül, Hecke gruplarının cinsi 7'ye kadar olan normal alt gruplarının simgelerini belirlemiş, grup yapılarını ve özelliklerini çalışmıştır. 2001 yılında Conder ile Dobcsanyi cinsi 15'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri belirlemiştir. 2006 yılında Conder'in cinsi 101'e kadar olan yönlendirilebilir düzgün figürleri tespit etmesi ile Hecke gruplarının cinsi 101'e kadar olan normal alt gruplarını çalışmak mümkün olmuştur.

Bu tezde  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt grupları, Conder (2006) tarafından sınıflandırılan cinsi  $2 \leq g \leq 101$  olan düzgün figürler yardımıyla, Jones ve Singerman (1978) tarafından tanımlanan dönüşümden yararlanarak belirlenmiştir. Ayrıca Delen ve Cangül (2018) tarafından tanımlanan yeni bir topolojik graf değişmezi olan  $\Omega(G)$  omega değişmezi kullanılarak Hecke gruplarının normal alt gruplarının rankı ile ilgili çeşitli parametreler elde edilmiş ve bu parametreler yardımıyla da ranklar hesaplanmıştır. Çok sayıda normal alt grup olduğundan hepsini teze sığdırmak zordur. Bunlardan bir kısmı tezin dördüncü bölümünde çizelgeler halinde gösterilmiştir.  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $2 \leq g \leq 11$  ve  $3 \leq q \leq 46$  için tüm serbest normal alt grupların simgeleri, Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de,  $2 \leq g \leq 10$  ve  $3 \leq q \leq 42$  için tüm serbest olmayan normal alt grupların simgeleri Çizelge 4.4, Çizelge 4.5, Çizelge 4.6'da verilmiştir. Ayrıca  $g = 12$  ve  $3 \leq q \leq 50$  değerleri için serbest ve serbest olmayan normal alt gruplar Çizelge 4.3'te gösterilmiştir.  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının  $2 \leq g \leq 101$  ve  $q = 3,4,5,6,7,8,9,10$  değerleri için serbest ve serbest olmayan alt gruplarının sayıları Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Hecke gruplarının normal alt grupları ile ilgili elde edilen yeni bulgular ve ulaşılan sonuçların matematiğin ayrık grup teorisi soyut cebir, sayılar teorisi, graf teori gibi diğer alanlarında yeni sonuçlar doğurması ve özgün çalışmalar yapılmasına kapı aralayacağı düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

- Allenby, R. B. J.T. (1991). *Rings, fields and groups. An introduction to abstract algebra, Second edition*. Edward Arnold, London, 156-167.
- Anderson, J. W. (2007). *Hyperbolic Geometry*. (2. baskı). Springer.
- Aşçıoğlu, M., Demirci, M. ve Cangül, İ. N. (2020). Omega invariant of union, join and corona product of two graphs. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 30(3), 297-306.
- Başkan, T. (1980). *Ayrık gruplar*. Beytepe, Ankara: Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi.
- Beardon, A. F. (1983). *The Geometry of Discrete Groups*, (2. baskı). Springer.
- Bergau, P. ve Garbe, D. (1989). Non-orientable and orientable regular maps. *In Proceedings of "Groups-Korea 1988", Lect. Notes Math. 1398*. Springer, 29-42. <https://doi.org/10.1007/BFb0086237>
- Biggs, N. L. (1971). Automorphisms of inbedded graphs. *J. Combinat. Theory Ser. B*, 11, 132-138.
- Bondy, J. A. ve Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Springer NY.
- Brahana, H. R. (1927). Regular maps and their groups. *American J. Math.* 49, 268-284.
- Breda d'Azevedo, A., Jones, G.A., Nedela, R., ve Škoviera, M. (2006). Chirality groups of maps and hypermaps. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 29, 337-355.
- Bryant, R. P. ve Singerman, D. (1985). Foundations of the theory of maps on surfaces with boundary. *The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Ser. (2)*36, 17-41. <https://doi.org/10.1093/qmath/36.1.17>
- Burnside, W. (1911). *Theory of Groups of Finite Order*. Cambridge University Press.
- Cangül, İ. N. (1993). *Normal subgroups of Hecke groups*. Ph.D. Thesis. Southampton University.
- Cangül, İ. N. (1994). Normal subgroups of the Hecke group  $H(\sqrt{2})$ . *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 43, 129-135.
- Cangül, İ. N. (1995). Normal subgroups of the Hecke groups and regular maps. *Hacettepe Bull. of Nat. Sci. and Eng.*, 24, 15-23.

- Cangül, İ. N. (1996). The group structure of Hecke groups  $H(\lambda_q)$ , *Tr. J. of Mathematics*, 20, 203-207.
- Cangül, İ. N. (2017). *Graf teori-1, temel konular*. (1. baskı). Bursa: Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti.
- Cangül, İ. N. ve Singerman, D. (1998). Normal subgroups of Hecke groups and regular maps. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 123, 59-74.
- Cangül, İ. N., Yurttaş Güneş, A., Togan, M. ve Delen, S. (2019). Connectedness of graphs and omega invariant. *Proceedings Book of MICOPAM-2019*, 59-62.
- Conder, M. (2006). Orientable regular maps of genus 2 to 101. <https://www.math.auckland.ac.nz/~conder/RegularOrientableMaps101.txt>
- Conder, M. (2011). Orientable regular maps of genus 2 to 301. <https://www.math.auckland.ac.nz/~conder/RegularOrientableMaps301.txt>
- Conder, M. ve Dobcsanyi, P. (2001). Determination of all regular maps of small genus. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 81(2), 224-242.
- Conway, J. H., Burgiel, H. ve Goodman-Strauss, C. (2008). *The symmetries of things*, (1.baskı). New York: A.K. Peters Book/CRC Press.
- Coxeter, H. (1948). Configurations and maps. *Rep. Math. Colloq* (2)8,18-38.
- Coxeter, H. (1989). *Introduction to Geometry*,(2. baskı). Wiley.
- Coxeter, H. ve Moser, W. (1957). *Generators and Relations for Discrete Groups*. Berlin: Springer.
- Delen, S. ve Cangül, İ. N. (2018). A new graph invariant. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 6(1), 30-33.
- Delen, S. ve Cangül, İ. N. (2019). Extremal problems on components and loops in graphs. *Acta Mathematica Sinica, English Series* 35(2), 161-171.
- Delen, S., Togan, M., Yurttaş, A., Ana, U. ve Cangül, İ. N. (2020). The effect of edge and vertex deletion on omega invariant. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 14(3), 685-696.
- Delen, S., Yurttaş, A., Togan, M. ve Cangül, İ. N. (2019). Omega invariant of graphs and cyclicity. *Applied Sciences*, 21, 91-95.

- Demirci, M., Akbayrak, O., Özbek, A. ve Ana, U. (2021). New relations for the normal subgroups of Hecke groups. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 24(2), 191-195. Doi: 10.17777/pjms2021.24.2.195.
- Demirci, M., Delen, S., Çevik, A. S. ve Cangül, İ. N. (2021). Omega index of line and total graphs. *Journal of Mathematics*, Vol. 2021, Article ID 5552202 1-6. <https://doi.org/10.1155/2021/5552202>
- Demirci, M., Özbek, A., Akbayrak, O. ve Cangül, İ. N. (2021). Lucas graphs. *Journal of applied mathematics and computing*, 65(1-2), 93-106. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01382-z>
- Demirci, M., Soydan, G. ve Cangül, İ. N. (2006). Diophantine equations and congruence subgroups of the Hecke groups  $H(\sqrt{2})$  and  $H(\sqrt{3})$ . *Adv. Studies in Contemporary Maths.*, 12, 309-313.
- Demirci, M., Yurttaş Güneş, A., Delen, S. ve Cangül, İ. N. (2021). The effect of omega invariant on some topological graph indices. *Creative Mathematics and Informatics*, 30(2), 175-180.
- Du, S., Kwak, J.H., ve Nedela, R. (2005). Regular embeddings of complete multipartite graphs. *Eur. J. Comb.*, 26, 505-519.
- Du, S., Kwak, J.H., ve Nedela, R. (2007). Classification of regular embeddings of hypercubes of odd dimension. *Discret. Math.*, 307, 119-124.
- Dyck, W. (1880). Über aufstellung und untersuchung von gruppe und irrationalitat regularer Riemannscher flachen. *Math. Ann.* 17, 473-508.
- Fine, B. (1976). Fuchsian subgroups of the Picard group. *Cand. J. Math.*, 28, 481-485.
- Fine, B. ve Rosenberger, G. (1999). Algebraic generalizations of discrete groups. *Markel Dekker, Inc, New-York*, 5-12.
- Firby, P. A. ve Gardiner, C. F. (2001). *Surface topology*, (3. baskı). Horwood publishing.
- Garbe, D. (1969). Über die regulären zerlegungen geschlossener orientierbarer flachen. *J. Reine Angew. Math.* 237, 39-45.
- Garbe, D. (1978). A remark on non-symmetric Riemann surfaces. *Arch. Mat.* 30, 435-437.
- Gardiner, A., Nedela, R., Siran, J. ve Skoviera, M. (1999). Characterization of graphs which underlie regular maps on closed surfaces. *J. London Math. Soc.* (2)59, 100-108. <https://doi.org/10.1112/S0024610798006851>



- Grothendieck, A. (1984). *Esquisse d'un programme*. L. Schneps, ve P. Lochak, (Editörler), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 242, Geometric Galois actions 1, (s. 5-48) içinde. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 199.
- Hakimi, S. L. (1962). On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *J. SIAM Appl. Math.*, 10, 496-506.
- Hanson, A. (1994). A construction for computer visualization of certain complex curves. *Notices of the Amer.Math.Soc.* 41, 9 (Kasım/Aralık), 1156–1163.
- Havel, V. (1955). A remark on the existence of finite graphs (Czech). *Casopis Pest. Mat.*, 80, 477-480.
- Heawood, P.J. (1890). Map-colour theorem. *Quart. J. Math.* 24, 332-338.
- Hecke, E. (1936). Über die bestimmung Dirichletscher reihen durch ihre funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, 112, 664-699.
- Heffter, L. (1898). Über metazyklische gruppen und nachbarconfigurationen. *Math. Ann.* 50, 261-268.
- Ivrissimtzis, J. ve Singerman, D. (2005). Regular maps and principal congruence subgroups of Hecke groups. *European Journal of Combinatorics* 26, 437–456.
- James, L. D. ve Jones, G. A. (1985). Regular orientable imbeddings of complete graphs. *J. Combinat. Theory Ser. B* 39, 353-367.
- Johnson, D. L. (1980). *Topics in the theory of group presentations*. L.M.S. Lecture note series, 42. Cambridge University Press.
- Jones, G. A. (1997). Maps on surfaces and Galois groups. *Math. Slovaca* 47, 1-33.
- Jones, G.A., Nedela, R., ve Škoviera, M. (2007). Regular embeddings of  $K_{n,n}$  where n is an odd prime power. *Eur. J. Comb.*, 28, 1863-1875.
- Jones, G. A. ve Singerman, D. (1978). Theory of maps on orientable surfaces. *Proc. London Math. Soc.* 37(3), 273-307.
- Jones, G. A. ve Singerman, D. (1987). *Complex Functions*, Cambridge University Press, 60.
- Jones, G. A. ve Singerman D. (1996). Belyi functions, hypermaps, and Galois groups. *Bull. London Math. Soc.* 28, 561-590.

- Kepler, J. (1619). *The harmony of the world*, (Translation from the Latin “Harmonice Mundi”). Memoirs American Philosophical Society 209, Philadelphia, PA: American Philosophical Society.
- Klein, F. (1879). Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen. *Math. Ann.* 14, 428-471.
- Kwak, J.H., ve Kwon, Y.S. (2005). Regular orientable embeddings of complete bipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, 50.
- Leutbecher, A. (1967). Über die Hecke'schen gruppen  $G(\lambda)$ . *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 31, 199-205.
- Lyndon, R. C. ve Schupp, P. E. (1977). *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York.
- Macbeath, A. M. (1969). Generators of the linear fractional groups. *Proc. Symp. Pure Math., A.M.S.*, 12, 14-32.
- Macbeath, A. M (1963). Packings, free products and residually finite groups. *Proc. Comb. Phil. Soc.*, 59, 555-558.
- Mc Quillan, D. L. (1965). Classification of normal subgroups of the modular group. *American Jour. Math.*, 87, 285-296.
- Nedela, R. (2001). Regular maps-combinatorial objects relating different fields of mathematics. *Journal of the Korean Mathematical Society* 38(5), 1069–1105.
- Newman, M. (1963). Normal congruence subgroups of the modular group. *American J. Math.*, 85, 419-427.
- Newman, M. (1964a). A complete Description of the normal subgroups of genus one of the modular group. *American J. Math.*, 86, 17-24.
- Newman, M. (1964b). Free Subgroups and normal subgroups of the modular group. *Illionis J. Math.*, 8, 262-265.
- Öz, M. S. ve Cangül, İ. N. (2020). Bounds for matching number of fundamental realizations according to graph invariant omega. *Proceedings of the Jangeon Mathematical Society*, 23(1), 23-37.
- Özbek, A. (2022). *Hecke grupları ve düzgün figürler*. [Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi]. Bursa Uludağ Üniversitesi Açık Erişim Sistemi. Erişim adresi: <https://acikerisim.uludag.edu.tr/handle/11452/24926>

- Özdemir, H. B., Demirci, M. ve Cangül, İ. N. (2006). A method for finding normal subgroups of Hecke groups. *Proc. of the Jangjeon Math. Soc.*, 9, 51-55.
- Özden, H., Ersoy Zihni, F., Özen Erdoğan, F., Cangül, İ. N., Srivastava, G. ve Srivastava, H. M. (2020). Independence number of graphs and line graphs of trees by means of omega invariant. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 114, 91. <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00821-7>
- Rosen, D. (1954). A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups. *Duke Math. J.*, 21, 549-563.
- Rosen, D. (1977). Continued fractions in algebraic number fields. *Research problems*, 37-39.
- Sah, C. H. (1969). Groups related to compact Riemann surfaces. *Acta Math.* 123, 13-42.
- Scherwa, J. (1985). *Regulaere Karten geschlossener nichtorientierbarer Flaechen*. Diploma Tezi. Bielefeld.
- Sherk, F. A. (1959). The regular maps on a surface of genus three. *Canad. J. Math.* 11, 452-480.
- Singerman, D. (1970). Subgroups of fuschian groups and finite permutation groups. *Bull. London Math. Soc.*, 2, 319.
- Siran J. (2006). Regular Maps on a Given Surface: A Survey. In: Klazar M., Kratochvíl J., Loebel M., Matoušek J., Valtr P. ve Thomas R. (editörler) *Topics in Discrete Mathematics. Algorithms and Combinatorics*, vol 26. Springer. Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/3-540-33700-8\\_29](https://doi.org/10.1007/3-540-33700-8_29)
- Stewart, I. (2008). *Why Beauty is Truth: The history of Symmetry*. Basic Books.
- Şanlı, U., Çelik, F., Delen, S. ve Cangül, İ. N. (2020). Connectedness criteria for graphs by means of omega invariant. *FILOMAT*, 34(2), 647-652.
- Togan, M., Yurttaş Güneş, A., Delen, S. ve Cangül, İ. N. (2020). Omega invariant of the line graphs of unicyclic graphs. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2(2), 45-48.
- Tucker, T. W. (1983). Finite groups acting on surfaces and the genus of a group. *J. Combinat. Theory Ser. B* 34. No. 1, 82-98.
- Van Wijk, J. (2009). Symmetric tiling of closed surfaces: Visualization of regular maps. *ACM Trans. Graph.* 28, 3, Article 49, 1-12. <http://doi.acm.org/10.1145/1531326.1531355>
- Wallis, W. D. (2007). *A Beginner's Guide to Graph Theory*, Birkhauser, Boston.

Wilson, S. E. (1978a). Non-orientable regular maps. *Ars Combin.*5, 213-218.

Wilson, S. E. (1978b). Riemann surfaces over regular maps. *Canad. J. Math.* 30, 763-782.

Yurttaş, A., Togan, M., Delen, S. ve Cangül, İ. N. (2018). Omega invariant and its applications in Graph Theory. *MICOPAM Proceedings Book*.

Yurttaş Güneş, A., Delen, S., Demirci, M., Çevik, A. S. ve Cangül, İ. N. (2020). Fibonacci Graphs. *Symmetry-Basel*, 12, 1383. Doi:10.3390/sym12091383.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osman AKBAYRAK  
Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA, 15/02/1986  
Yabancı Dil : İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Bursa Yıldırım Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi, 2005  
Lisans : Kütahya Dumlupınar Üniversitesi,  
Fen-Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü, 2009  
Birleştirilmiş Doktora : Bursa Uludağ Üniversitesi,  
Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Ana Bilim Dalı,  
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı, 2022

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : MEB Matematik Öğretmeni, 2014

İletişim (e-posta) : osmanakbayrak266@gmail.com

### Yayınları

:

Demirci, M., Özbek, A., Akbayrak, O. ve Cangül, İ. N. (2021). Lucas graphs. *Journal of applied mathematics and computing*, 65(1-2), 93-106. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01382-z>

Demirci, M., Akbayrak, O., Özbek, A. ve Ana, U. (2021). New relations for the normal subgroups of Hecke groups. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 24(2), 191-195. Doi: 10.17777/pjms2021.24.2.195.