



**J.S. BACH'IN EĞİTİM AMAÇLI ESERLERİNDEN BWV 784
LA MİNÖR ENVANSİYONUNUN GEOMETRİK MODELLEMESİ**
Rasim Erol DEMİRBAĞIR¹, Filiz YAĞCI², Rıdvan EZENTAS³

Makale Bilgisi	Özet
DOI: 10.19171/uefad.627458	Müzik, belli bir amaç ve yöntemle, belirli bir güzellik anlayışına göre işlenerek birleştirilmiş seslerden oluşan estetik bir bütündür. Johann Sebastian Bach (1685-1750), Barok dönemde yaşamış müzik tarihinin en önemli bestecilerinden biridir. Bach'ın bestelediği iki ve üç sesli envansiyonlar, çoğunlukla eğitime yöneliktir. Buluş anlamına gelen "envansiyon" olgusu, bestecinin her eserinin yapısal özelliklerinde gizlidir. Bu çalışmanın amacı, Bach'ın eğitim amaçlı yapıtlarından BWV 784 la minör iki sesli envansiyonunun matematiksel kodlama yoluyla geometrik modellemesinin oluşturulmasıdır. Seçilen eserin ses yükseklik ve süre değerleri matematiksel olarak kodlanmış, daha sonra çoklu regresyon analizi yapılarak uygun model bulunmuştur. Bu analizin sonucunda elde edilen regresyon denklemi ile eserin geometrik modellemesi oluşturulmuştur. Bu denklemin, cebirsel, trigonometrik, ters trigonometrik ve üstel fonksiyonların kombinasyonundan meydana geldiği görülmüştür.
<i>Makale Geçmişi:</i>	
Başvuru 01.10.2019	
Kabul 02.05.2020	
<i>Anahtar Kelimeler:</i>	
J.S.Bach, müzik, matematik, matematiksel kodlama, geometrik modelleme.	

**GEOMETRIC MODELING OF J.S.BACH'S MUSICAL EXERCISE,
INVENTION IN A MINOR, BWV 784**

Article Info	Abstract
DOI: 10.19171/uefad.627458	Music is an aesthetic whole composed of sounds combined with a certain purpose and method and processed according to a certain understanding of beauty. Johann Sebastian Bach, who lived in the Baroque period, was one of the most famous organists. Bach's Two- and Three-Voice Inventions are mostly educational in purpose. The phenomenon of "invention" is hidden in the structural features of each composer's work. This study aims to create a geometric modeling of J.S. Bach's musical exercise, the two part invention in A minor, by mathematical coding. The sound pitches and time values of the selected composition were mathematically coded, and a regression analysis was performed to find the appropriate model. Data analysis revealed the geometry modeling of the regression equation. This equation consists of a combination of algebraic, trigonometric, inverse trigonometric and exponential functions.
<i>Article History:</i>	
Received 01.10.2019	
Accepted 02.05.2020	
<i>Keywords:</i>	
J.S.Bach, music, mathematics, mathematical coding, geometric modeling.	

1. GİRİŞ

Müzik sözcüğü, eski Yunan'da sanatın esin tanrıçaları olduğuna inanılan Muse'ların adından türetilmiştir. Bununla birlikte o dönemde mousike sözcüğü, Muse'ların koruması altındaki her sanat ya da bilim dalı için kullanılan genel bir terim olarak tanımlanmaktadır (Mann & Newsom, 2000). Müzik, en temel ögesinden en karmaşık ögesine kadar, çeşitli matematiksel yapıları içermekte olup, müzik ile matematik pek çok açıdan birbiriyle ilişkili iki

¹ Doç.Dr, Bursa Uludağ Üniversitesi, redemir@uludag.edu.tr, OrcID: 0000-0002-9472-3001

² Dr.Öğr.Gör, Bursa Uludağ Üniversitesi, gfiliz@uludag.edu.tr, OrcID: 0000-0001-5574-9922

³ Prof.Dr, Bursa Uludağ Üniversitesi, rezentas@uludag.edu.tr, OrcID: 0000-0001-8619-8334

disiplindir. Müzik, belli bir amaç ve yöntemle, belirli bir güzellik anlayışına göre işlenerek birleştirilmiş seslerden oluşan estetik bir bütündür (Uçan, 1994). Müzik; hem bir sanat, hem de bir bilimdir. Seslerin en güzel şekli müzik ile hayat bulmaktadır. Matematik ise, düşünsel bilginin yetkinliğini ve doğruluğunu araştırmasına paralel olarak, estetik olarak da duyuşsal bilginin doğruluğunu, yani güzelliği araştırmaktadır. Matematikçiler için matematiğin doğasında bulunan güzellik çok önemlidir ve buna matematiğin estetiği denilir. Perspektif, oran, simetri, düzen, harmoni her koşulda ölçülebilir. Sanatın da ölçülebilir yanları vardır ve matematiksel olarak ifade edilen simetriyle doğanın sayılarını barındırır. Bu kavramlar matematiğin estetiğini oluşturmaktadır. Sanatın ve bilimin temeli olan perspektif, oran, şekiller ve simetrilerin incelenmesinde matematiğin ilkeleri kullanılmaktadır. Bu nedenledir ki matematik kurallarının kullanılması sadece yararlı değil, aynı zamanda bir zorunluluktur (Atalay, 2006).

Müzik ve matematik üzerine ilk akademik çalışmaların MÖ 6. yüzyılda Yunan filozof ve matematikçi Pisagor ile başladığı düşünölmektedir. Pisagor'un seslerin frekansları arasındaki çeşitli sayısal oranları keşfiyle ortaya koyduğu sesler arasındaki ilişkilerin sistematik yapısı, müzik kuramının da temelini oluşturmaktadır (Riedweg, 2005). Günümüze kadar birçok filozof, matematik ve müzik insanı tarafından bu iki disiplin arasındaki ilişki üzerine araştırmalar yapılmış, müziğin matematiksel yapısı anlaşılmaya çalışılmıştır. Genellikle, aralıklar, diziler (diyatonic, kromatik vd.) ritim, ölçü, form, melodi, akorlar, oktav eşdeğerliği, doğuşkanlar, tını, akustik, eşit aralıklı ses sistemi ve akordun alternatif yöntemleri gibi bazı müziksel kavramların matematiksel olarak izahı yapılmıştır (Wright, 2009).

Birçok müzik aletinin biçiminin de matematiksel kavramlarla ilgili olduğu bilinmektedir. Örneğin; telli ya da üflemeli çalgıların biçimleri $x \geq 0$ ve $y = 2x$ üstel eğrinin grafiğine benzer. Müzikal seslerin niteliğinin incelenmesi 19. yy.da matematikçi J. Fourier tarafından yapılmıştır. Fourier, müzik aleti ve insandan çıkan bütün müzikal seslerin matematiksel ifadelerle tanımlanabileceğini ve bunun da periyodik sinüs fonksiyonları ile olabileceğini ispatlamıştır (Orhan, 1995). Piyano tuşları İtalyan matematikçi L. Fibonacci'nin oluşturduğu Fibonacci dizisi (1,1,2,3,5,8,13,21,34,...) ile müzik arasındaki bağlantının görsel açıklamasına olanak sağlar. "Klavyedeki bir oktav, biri diğerinden daha yüksek olan iki nota arasındaki müziksel aralığı temsil eder. Yüksek olan notanın frekansı, düşük olanın iki katıdır. Klavyede bir oktav, 5 siyah ve 8 beyaz tuş olacak şekilde bölünür, toplamda 13 tuş vardır. Beş siyah tuş biri ikili biri üçlü olmak üzere iki gruba ayrılır. 2, 3, 5, 8 ve 13 birer Fibonacci sayısıdır. Oktav formundaki on üç nota Batı müziğindeki en popüler aralıklar olan kromatik

dizi oluşturur. Kromatik dizi, 5 notalı pentatonik dizi ve 8 notalı diatonik diziden önce gelir (Bakım, 2014). Örneğin, büyük altılı, sırasıyla do ve la notalarından oluşur, saniyede 264 ve 440 titreşim yaparlar, $264/440 = 3/5$ bir Fibonacci oranıdır. Bir küçük altılı aralığı, mi ve do notalarından oluşur ve saniyede 330 ve 528 titreşim yaparlar $330/528 = 5/8$ Fibonacci oranıdır (Koshy, 2001).

Fibonacci dizisinde ardışık iki sayının oranı olarak yaklaşık $\phi=1,61804$ olan değerine altın oran denilir. Altın oran uyum ve güzellik ölçütü olarak sanat ve estetiğin bir ölçütüdür. Altın oran insan tasarımından kaynaklanmadan, doğada var olan biyolojik bir gerçektir ve müzikte kullanıldığı bilinmektedir. “Müzik aletleri de çoğunlukla ϕ sayısı temel alınarak yapılır. Keman tasarımında olduğu gibi yüksek kalitedeki ses telinin tasarımında da Fibonacci Sayıları ve ϕ kullanılmıştır. Ayrıca birçok ünlü bestecinin (Mozart, Beethoven, Bach, Chopin, Béla Bartók, vd.) eserlerinde Fibonacci Dizisi ve Altın Oran’ı kullandığı varsayılmış ve ispat edilmeye çalışılmıştır. Örneğin Mozart’ın sonatlarında (No1.K.279, No2.K.280, No7.K.309, No10.K.330, No15.K.545, No16.K.570) altın oranı kullandığı ispatlanmıştır. Bunun yanında, Fibonacci dizisini bilinçli olarak kullanan ve bunu belirten besteciler de bulunmaktadır “(Lehmann ve Posamentier, 2007).

Fransız filozof, matematikçi ve müzik kuramcısı olan M. Mersenne, sesin armoniklerini keşfetmiş ve altı armonik oranı açıklamıştır. Ayrıca armonik ve armonik olmayan sesler arasındaki ilişkiyi tanımlamış ve 1720 yılında “Treatise on Harmony” adlı makalesinde uyum teorisini yayınlamıştır. 18. yüzyılın başlarında B. Taylor titreşim dizilerini araştırmaya başlamıştır. Taylor, başlangıç koşullarını sağlayan bir dizi titreşimi temsil eden bir diferansiyel denklem bulmuş ve bu denklemin çözümünün bir sinüs eğrisi olduğunu göstermiştir (Devlin, 2000). Aynı dönemin matematik bilim insanları olan D. Bernoulli ve L. Euler müzik ve matematik hakkında birçok çalışmalar yapmışlardır (Bilal v.d. 2015). D'Alembert ve L. Euler gibi matematikçiler, titreşim dizisini bir diferansiyel denklem olarak ifade etmişler, J.B. Fourier ise titreşim dalgalarını trigonometrik fonksiyonları kullanarak tanımlamıştır (Eberhard, 2008).

Müziksel sesleri gürültüden ayıran özellik, bu seslerin ayırt edilebilir bir perde verebilme özelliğinin olmasıdır. Perde, sesin tizlik derecesine ilişkin bilgiyi gösteren parametresidir (Bakım, 2014). Bir sese ilişkin bir perdenin algılanabilmesinin ölçütü ise o sesin periyodik (sürelili) olma derecesidir. Müziksel bir ses, zamana bağlı bir periyodik fonksiyon olarak düşünülebilir. Yani, $-\infty < t < \infty$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için formül $g(t \mp mT_0) = g(t)$ dir. Şekil 1, periyodu T_0 olan periyodik bir sesi, dikey eksen de şiddetini göstermektedir (Bora, 2002). İnsanoğlunun duyma ve duyduğu sesi taklit edebilme yeteneği ile kulağa melodik, güzel gelen işitsel

dizilimlerden elde edilen müzik belli temel kavramlara dayanmaktadır. Bu temel kavramlar ise ilk aşamada klasik müzik teorisi ve terminolojisi ile açıklanabilmektedir. Aynı görsel olarak doğadaki karmaşık formlar gibi, müzik de işitsel algının çok çeşitli karmaşık yapılarının formudur. Fraktal, belirli bir matematiksel formül içerisinde kendini tekrarlayan form olarak tanımlanmaktadır (Beytekin, 2015). Fraktal geometrisi ise doğada var olan biçimlerin karmaşık formlarına karşılık matematiksel bir açıklama getirmektedir. Beytekin (2015), Fraktal Geometri algoritması mantığını modern caz teorisine uygulayarak ritim olgusunu karıştırmadan armoniler üzerinden analiz yapmış ve caz akorlarının görsel modellerini oluşturmuştur. Oluşturulan modeller arasında tasarım süreçleri, psikolojik algılanma süreçleri arasında bağlantı kurmuştur.

Günümüzde dünyada müzik matematik ilişkisini geometrik modelleme yoluyla inceleyen çalışmalara rastlanmakla birlikte, henüz ülkemizde bu tür çalışmaların küçük ölçeklerde yapıldığı görülmektedir. Gülsoy, Güney ve Özdamar (2013), Beethoven'ın "Vierte Symphony, Op. 60" eserini matematiksel kodlama sistemi ile kodlamış ve kullandıkları regresyon analiziyle Minkowski uzayında bir hiperyüzey; bir başka çalışmada ise, Beethoven'ın "Für Elise" adlı eserini bir manifold olarak bulmuşlardır. Demirbatır, Yağcı ve Ezentaş (2018)'in, Uluslararası Necatibey Eğitim ve Sosyal Bilimler Araştırmaları Kongresi'nde sundukları çalışmada, A. Adnan Saygun'un "İnci" adlı piyano eserinin geometrik modellemesi oluşturulmuştur. Seçilen eserin ses yükseklikleri ve süre değerlerine göre matematiksel kodlaması yapılmış, regresyon analizi yapılarak üç boyutlu regresyon modeli elde edilmiştir. Bu regresyon modelleri içerisinde sağ el ve sol el partileri için eserin melodik çizgilerini oluşturan üç boyutlu geometrik modelin denklemlerinin sinüs fonksiyonuna bağlı olduğu görülmüştür.

Johann Sebastian Bach (1685-1750), dünyaca ünlü Alman barok müzik bestecisi ve orgcusudur. Bach, köklü Alman stillerini özellikle İtalya ve Fransa gibi dış ülkelere aldıkları ritimlerin, formların ve yapıların adaptasyonu ve kontrpuan, armoni, müzikal motiflerin organizasyonundaki ustalığıyla geliştirmiştir. Bach'ın besteleri Brandenburg Konçertoları, Goldberg Varyasyonları, Si minor Missa, 2 Çile ve 200 tanesi günümüze kadar ulaşmış 300'den fazla kantatayı kapsamaktadır. Bach'ın müziğine, teknik hakimiyeti, artistik güzelliği, entelektüel derinliği sayesinde büyük saygı duyulmuştur. Bach 19. yy.'da müziğinin tekrar çalınmaya başlaması ve ilginin tekrar canlanmasına kadar kendi döneminde büyük bir besteci olarak bilinmemiş; ancak günümüzde en büyük bestecilerden biri olarak kabul edilmektedir (tr.wikipedia.org).

Envansiyon ‘buluş’ anlamına gelmektedir. Kısa bir form türü olarak envansiyon, kontrpuan biçiminin özgürce işlenmesi ile bestelenir. Kontrpuan yöntemiyle yazılan büyük füg formunun hazırlayıcısı olarak tanımlanabilir. Her biri farklı yapıda olan envansiyona taklitli yazı hâkimdir. Envansiyon formunda birden fazla motif, ara müziklerle tonal ilişkileri ve geçişleri kurar. Feridunoğlu (2004) ’na göre envansiyon, bir müzikal fikrin veya motifin serbest kontrpuan kurallarına göre işlenmesidir. Bu kısa form Bach’la doruğa ulaşmıştır. Polifonik türün en sade ve gevşek dokudaki yazısı olan envansiyonda motifin işlenmeye uygun yapıda ve tonaliteyi belirtecek niteliklere sahip olması gerekir. Motif, her ses partisinde tekrarlanır ve taklit edilir. Motifle birlikte kontrpantal bir eşlik partisidir. Motifin bulunmadığı yerlerde ara müziği yer alır.

Bach’ın Köthen yıllarında (1723) bestelediği iki ve üç sesli envansiyonlar, çoğunlukla eğitime yöneliktir. Bu envansiyonlar, “Aufrichtige Anleitung” (Doğru Yönlendirme) başlığıyla 30 ayrı parçadan oluşmaktadır. Parçalar, teknik becerinin gelişimi için bestelenmiştir. “Envansiyon kolay bir biçim olarak görünse de aslında gelecek zor eserlere hazırlık olarak tasarlanmıştır. Bu parçaların 15’i iki sesli, 15’i ise üç seslidir. İki ve üç sesli envansiyonlarda tonalite düzeni aynıdır ve do majör-do minör; re majör-re minör; mi bemol majör- mi minör; fa majör-fa minör; sol majör-sol minör; la majör-la minör; si bemol majör-si minör dizilimiyle yazılmıştır” (Büke, 2005). Eserler incelendiğinde her birinin çok farklı bir yapıya sahip olduğu görülür. Her parçada motiflerin, ara müziklerin ve tonal ilişkilerin oluşturduğu kurgu birbirinden farklıdır. Envansiyon olgusu, çalma tekniğindeki buluşlarla sınırlı kalmayıp, sanki her parçanın yapısal özelliklerinde de gizli gibidir (Büke ve Altınel, 2006). Çokseslilik (polifoni), kanonik yapı, birden fazla süsleme ve motifin eşzamanlı yer alması, bestecinin üslup özelliğini ortaya koymaktadır.

Müzik eserlerinin matematiksel boyutta kodlanıp incelenmesi, bilgisayar destekli yazılımlar aracılığıyla eserlerin analizlerinin yapılması, farklı yaklaşımların üretilmesi ve disiplinler arası çalışma olanaklarının sağlanması bakımından yararlı görülmektedir. Bu anlamda soyut boyutta olan seslerin geometrik ortama aktarılarak somut hale dönüştürülmesi, eserleri oluşturan seslerin yükseklik ve süre değerlerinin farklı kombinasyonlarda ele alınarak yapısal analizlerinin gerçekleştirilmesi çalışmaları yenilikçi bir yaklaşım olarak görülmektedir. Bu bakış açısıyla çalışmanın amacı; J.S. Bach’ın eğitsel amaçla yazılmış eserlerinden BWV 784 la minör iki sesli envansiyonunun matematiksel kodlama yoluyla geometrik modellenmesinin oluşturulmasıdır.

2. YÖNTEM

Bu çalışmada J.S. Bach'ın BWV 784 la minör iki sesli envansiyonunun nota ses yükseklikleri ve ses sürelerinin matematiksel kodlamaları ile regresyon analizi yapılarak en uygun geometrik model bulunmaya çalışılmıştır. “Regresyon analizleri, bağımlı bir değişken ile bağımlı bir değişken üzerinde etkisi olduğu varsayılan bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin matematiksel bir model ile açıklanmasında kullanılır. Regresyon analizlerinde bir ya da daha fazla değişkenin (çoklu regresyon) başka bir değişken üzerindeki etkisi ve yönü incelenmektedir. Regresyon analizlerinde bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirlenmesi önemlidir” (Bayram, 2004). “Bağımlı değişkendeki toplam değişimin yüzde kaçının bağımsız değişkenler tarafından açıklandığını bulmak için regresyon analizinde R² değerinden yararlanır. Bu değer tüm değişkenlerin birlikte açıkladıkları varyans oranını verir. R² değeri 0 ile 1 arasında değer alır. Değer 0'a yaklaşırsa, modelin veriye uyum göstermediği veya bağımsız değişkenlerin, bağımlı değişkendeki değişmeyi açıklayamadığı, 1'e yaklaşırsa bağımlı değişkendeki değişimin, bağımlı değişkenler tarafından iyi açıklandığını gösterir. Ayrıca kurulan regresyon modelinin anlamlılığını sınamak için F (ANOVA) testinden yararlanır” (Bayram, 2004).

Çoklu doğrusal regresyon analizinde, farklı ölçme birimleri ve varyanslara sahip bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkene ait görece önemlerini belirlemede standardize edilmiş regresyon katsayıları olan beta değerleri kullanılır. Standardize Beta değeri, söz konusu değişkenler arasındaki korelasyonu ifade etmektedir. F ve p değerleri kurulan regresyon modelinin anlamlılık düzeyini ortaya koymaktadır (Bayram, 2004). Çoklu regresyon analizi, bağımsız değişkenler tarafından bağımlı değişkende açıklanan toplam varyansın yordanmasına, açıklanan varyansın istatistiksel olarak anlamlılığına ve bağımsız değişkenlerle bağımlı değişken arasındaki ilişkinin yönüyle ilgili olarak yorum yapabilmeyi mümkün kılmaktadır (Büyüköztürk, 2002).

Bu çalışmanın verileri, belirlenen eserin sağ ve sol el partilerinin nota ses yükseklikleri ve ses değerlerinin kodlanmasıyla elde edilmiştir. Sağ ve sol el partilerine göre eseri oluşturan ses yükseklik değerlerinin dağılım tablosu Tablo 1 ile Tablo 2'de ve eserin ses süre değerlerinin frekans tablosu ise Tablo 3 ile Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 1

Sağ el partisini oluşturan ses yükseklik değerlerinin dağılımı

Ses Yükseklik Değerleri	Frekans	Yüzde
-6	1	0,3
-4	1	0,3
-3	4	1,8
-1	2	2,4
0	22	6,7
1	7	2,1
3	5	2,5
4	2	0,6
5	21	6,4
6	8	2,4
7	5	1,5
8	12	3,6
9	10	3,0
10	30	9,1
12	35	10,6
13	41	12,4
14	2	0,6
15	37	11,2
16	4	1,2
17	33	10,0
18	13	3,9
19	7	2,1
20	15	4,5
21	1	0,3
22	6	1,8
23	1	0,3
24	3	0,9
25	2	0,6
Toplam	330	100

Tablo 1 incelendiğinde sağ el partisine ait ses yüksekliklerinin tanım aralığı [-6, 25] ve en çok kullanılan seslerin 13 (%12,4), 15 (%11,2), 12 (10,6) ve 17 (%10,0) iken, en az kullanılan seslerin -6, -4, -3, 21, ve 23 (%0,3) olduğu görülmüştür. Eserin sağ el partisinde 32 adet ses kombinasyonu oluşturularak toplam 330 nota kullanılmıştır. Tabloda aynı zamanda seslerin tekrar etme yüzdeleri yer almaktadır.

Tablo 2

Sol el partisini oluşturan ses yükseklik değerlerinin dağılımı

Ses Yükseklik Değerleri	Frekans	Yüzde
-22	2	0,7
-21	2	0,7
-20	4	1,4
-19	2	0,7
-17	4	1,4
-16	4	1,4
-15	10	3,6
-13	12	4,3
-12	12	4,3
-11	1	0,4
-10	10	3,6
-9	1	0,4
-8	23	8,2
-7	7	2,5
-6	8	2,9
-5	17	6,1
-4	10	3,6
-3	26	9,3
-2	2	0,7
-1	22	7,9
0	13	7,9
1	29	10,4
2	1	0,4
3	17	6,1
4	2	0,7
5	20	7,2
6	5	1,8
7	5	1,8
8	6	2,2
9	1	0,4
10	1	0,4
Toplam	279	100

Tablo 2 incelendiğinde sol el partisine ait ses yüksekliklerinin tanım aralığı [-22, 10] ve en çok kullanılan seslerin 1 (%10,4), -3 (%9,3) ve -8 (8,2) iken, en az kullanılan seslerin -9, 2, 9 ve 10 (%0,4) olduğu görülmüştür. Eserin sol el partisinde 33 adet ses kombinasyonu oluşturularak toplam 279 nota kullanılmıştır. Tabloda aynı zamanda seslerin tekrar etme yüzdeleri yer almaktadır.

Tablo 3

Sağ el partisini oluşturan ses süre değerlerinin frekans tablosu

Nota Ses Değerleri	Frekans	Yüzde
4	268	81,2
8	58	17,6
16	4	1,2
Toplam	330	100

Tablo 3 incelendiğinde eserin ses sürelerinin tanım aralığı [4, 16] ve en çok kullanılan nota ses süre değeri 4 (%81,2) iken, en az kullanılan ses süre değeri ise 16 (%1,2) olduğu görülmüştür. Müziksel ifadeyle eserin sağ el partisinde en çok onaltılık nota değeri kullanılmıştır. Bunu sekizlik ve dörtlük nota süre değerleri takip etmektedir.

Tablo 4

Sol el partisini oluşturan ses süre değerlerinin frekans tablosu

Nota Ses Değerleri	Frekans	Yüzde
4	167	59,8
8	109	39,1
16	2	0,7
32	1	0,4
Toplam	279	100

Tablo 4 incelendiğinde eserin ses sürelerinin tanım aralığı [4, 32] ve en çok kullanılan nota ses süre değerleri 4 (%59,8), 8 (%39,1) iken, en az kullanılan ses süre değerleri ise 32 (%0,4) ve 16 (%0,7) olduğu görülmüştür. Müziksel ifadeyle eserin sol el partisinde en çok onaltılık ve sekizlik nota değerleri kullanılmıştır. Dörtlük ve ikilik süre değerlerine de yer verilmiştir.

3. BULGULAR

Tablo 1, 2, 3 ve 4' de verilen eserin partilerine göre, nota ses yükseklikleri (x) ve nota ses değerleri (y) bağımsız değişkenleri olarak alındığında; bağımlı değişken olan kümülatif zaman değişkenini ilişkilendirmek amacıyla matematikte en çok bilinen ve karşılaşılan cebirsel, üstel, logaritmik, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik fonksiyonlar ile istatistiksel olarak anlamlılığını bulmak için çoklu regresyon analizi yapılmıştır. Eserin ses yükseklikleri ve nota süre değerleri ile ilgili regresyon analiz tabloları aşağıda verilmiştir. Bağımlı değişkendeki toplam değişimin yüzde kaçının bağımsız değişkenler tarafından açıklandığını bulmak için regresyon analizinde R2 değerlerine bakılmıştır. Eserin sağ el partisine göre nota ses yükseklikleri ve süre değerlerinin regresyon modeli Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5

Sağ ele göre regresyon modelleri

Model	R	R ²	Düzeltilmiş R ²	Std. Tahmini Hata
1	0,542	0,294	0,289	393,224
2	0,577	0,332	0,326	382,977
3	0,585	0,342	0,333	380,925

Tablo 5'te regresyon analizi sonucunda 3 model oluşturulmuştur. 3. modelin R2 değeri 0,342 olduğundan tercih edilmiştir. Bu modele göre bağımlı değişkenin %34'ü oranında modele giren bağımsız değişkenler tarafından açıklandığı ifade edilmektedir. Bu verilere göre oluşturulan ANOVA tablosu Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6

Sağ el partisine göre nota ses yükseklikleri ve nota süre değerleri: ANOVA tablosu

Varyansın Kaynağı	s.s	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F	p
Regresyon	4	22821362,0	5705340,5		
Residual	303	43966676,7	145104,5	39,319	0,000
Total	307	66788038,8			

ANOVA tablosu kurulan regresyonun modelinin anlamlı olduğunu göstermektedir [F/1,329)= 39,319, p=0,000<0,05]. Seçilen modelin yordayıp yordamadığını belirlemek amacıyla yapılan çoklu regresyon analizi Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7

Sağ el partisine göre modelin yordanmasına ilişkin çoklu regresyon analizi

Model	B	Std. Hata	Beta	VIF	t	p
Sabit	844,799	91,891			9,194	0,000
sin(2 ^y)	25,543	2,687	0,449	1,025	9,507	0,000
(1/y ³)	19648,420	4139,222	0,224	1,021	4,747	0,000
arctan(x)	-25,849	50,324	-0,206	1,014	-4,389	0,000
tan(10x)	-13,855	6,695	-0,097	1,014	-2,069	0,039
R=0,585, R ² =0,342, F=39,319, p=0,000						

Tablo 7'de modelin yordanmasına ilişkin çoklu regresyon analizi sonuçları incelendiğinde, sin(2^y), (1/y³), arctan(x), tan(10x) fonksiyonlar ile model arasında anlamlı bir ilişkinin olduğu anlaşılmaktadır. Bu fonksiyonlar oluşturulan modelin yaklaşık %34'ünü açıklamaktadır. Standardize edilmiş regresyon katsayısına göre yordayıcı değişkenlerin model üzerindeki görece önem sırası; sin(2^y) (β=0,449), (1/y³) (β=0,224), arctan(x) (β=-0,206), tan(10x) (β=-0,097)'dir. Regresyon kat sayısının anlamlılığına ilişkin t testi sonuçlarına bakıldığında, sin(2^y), (1/y³), arctan(x), tan(10x) fonksiyonlarının model üzerinde önemli bir etkisinin olduğu anlaşılmaktadır. Bağımsız faktörler arasında Varyans Artış Faktörü (VIP)

336eğerleri $\sin(2^y)$ ($1,025 < 3$), $(1/y^3)$ ($1,021 < 3$), $\arctan(x)$ ($1,014 < 3$), $\tan(10x)$ ($1,014 < 3$) oldukları için aralarında çoklu doğrusal bağlantı olmadığı saptanmıştır.

Bu analiz sonucunda sağ el partisinin nota ses yükseklikleri = x ve nota süre değerleri = y bağımsız değişkenlerine karşılık gelen kümülatif zaman $z=f(x,y)$ bağımlı değişkeni;

$$z(x,y) = a_1 + a_2 \sin(2^y) + a_3 \left(1/y^3\right) + a_4 \arctan(x) + a_5 \tan(10x)$$

denklemleri ilişkilendirilmiştir. Bulgulara göre eserin melodik çizgileri, $\sin(2^y)$, $(1/y^3)$, $\arctan(x)$, $\tan(10x)$ eğrileri ile temsil edilmiştir. Bu verilere göre regresyon modeli

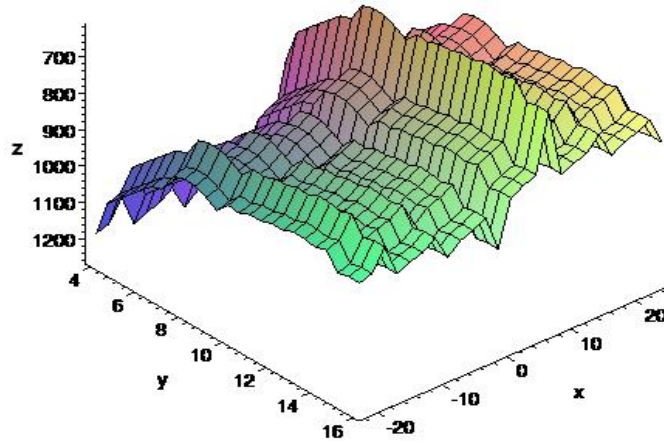
$$z(x,y) = 844,799 + 25,543 \sin(2^y) + 19648,420 \left(1/y^3\right) - 25,849 \arctan(x) - 13,855 \tan(10x)$$

denklemleri ile elde edilmiştir.

Elde edilen regresyon denkleminin 3 boyutlu geometrik modeli, genel amaçlı matematiksel problem çözüm yazılımları içinde matematiksel hesaplama, programlama, modelleme yazılımı olarak dünyaca en güvenilen yazılımlardan biri olan Maple 13 kullanılarak çizdirilmiş ve Grafik 1'deki yüzey oluşturulmuştur.

Grafik 1

Sağ el partisine göre eserin geometrik modeli



Grafik 1'de eserin nota ses yükseklikleri ve ses değerlerine bağlı olarak çizdirilen geometrik model; cebirsel, üstel, trigonometrik ve ters trigonometrik eğrilerin oluşturduğu üç boyutlu yüzeyi meydana getirmiştir. Eserin notasyonu incelendiğinde temanın birinci oktavda başladığı ve B temasından itibaren ikinci oktava ulaşan tiz rejisterlerin kullanımıyla daha geniş

bir hacme ulaşıldığı görülmektedir. Bu durum, işitsel ve görsel boyutta eser ile geometrik modelinin uyumunu göstermektedir.

Eserin sol el partisine göre nota ses yükseklikleri ve süre değerlerinin regresyon modeli Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8

Sol el partisine göre regresyon modelleri

Model	R	R ²	Düzeltilmiş R ²	Std. Tahmini Hata
1	0,326	0,106	0,103	421,356
2	0,353	0,125	0,118	417,761
3	0,474	0,224	0,130	414,955

Tablo 8’de regresyon analizi sonucunda 3 model oluşturulmuştur. 3. modelin R2 değeri 0,224 olduğundan tercih edilmiştir. Buna göre, sol el partisi nota ses yükseklikleri (x) ve nota ses değerleri (y) bağımsız değişkenleri olmak üzere $\tan(3y)$, $\cos(3x)$ ve $\sin(3x)$ fonksiyonların kombinasyonu olan bağımlı değişkenlerinin değişimin % 14 modele giren bağımsız değişkenler tarafından açıklandığını ifade etmektedir. Bu verilere göre oluşturulan ANOVA tablosu Tablo 9’da verilmiştir.

Tablo 9

Sol el partisine göre nota ses yükseklikleri ve nota süre değerleri: ANOVA tablosu

Varyansın Kaynağı	s.s	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F	p
Regresyon	3	7336575,2	2445525,0		
Residual	262	45113261,8	172188,0	14,203	0,000
Total	265	52449837			

ANOVA tablosu oluşturulan regresyonun modelinin anlamlı olduğunu göstermektedir [F/1,278)= 14,203, p=0,000<0,05]. Seçilen modelin yordayıp yordamadığını belirlemek amacıyla yapılan çoklu regresyon analizi Tablo 10’da verilmiştir.

Tablo 10

Sol el partisine göre modelin yordanmasına ilişkin çoklu regresyon analizi

Model	B	Std. Hata	Beta	VIF	t	p
Sabit	565,332	52,308			10,808	0,000
$\tan(3y)$	-16,743	33,183	-0,293	1,060	-4,965	0,000
$\cos(3x)$	87,181	38,492	0,134	1,063	2,265	0,024
$\sin(3x)$	83,032	38,844	0,123	1,003	2,138	0,033
$\tan(10x)$	-15,132	6,247	-0,093	1,015	-2,051	0,041
R=0,374 R ² =0,140 F=14,203 p=0,000						

Tablo 10’da modelin yordanmasına ilişkin çoklu regresyon analizi sonuçları incelendiğinde, $\tan(3y)$, $\cos(3x)$, $\sin(3x)$ ve $\tan(10x)$ fonksiyonlar ile model arasında anlamlı bir ilişkinin olduğu anlaşılmaktadır. Bu fonksiyonlar oluşturulan modelin yaklaşık %23’ünü açıklamaktadır. Standardize edilmiş regresyon katsayısına göre yordayıcı değişkenlerin model üzerindeki göreceli önem sırası; $\tan(3y)$ ($\beta=-0,293$), $\cos(3x)$ ($\beta=0,134$), $\sin(3x)$ ($\beta=0,123$) ve $\tan(10x)$ ($\beta=-0,093$)’dir. Regresyon katsayısının anlamlılığına ilişkin t testi sonuçlarına bakıldığında, $\tan(3y)$, $\cos(3x)$ ve $\sin(3x)$ fonksiyonlarının model üzerinde etkisinin olduğu anlaşılmaktadır. Bağımsız faktörler arasında Varyans Artış Faktörü (VIP) 338 değerleri $\tan(3y)$ ($1,060 < 3$), $\cos(3x)$ ($1,063 < 3$), $\sin(3x)$ ($1,003 < 3$) ve $\tan(10x)$ ($1,015 < 3$) oldukları için çoklu doğrusal bağlantı olmadığı saptanmıştır.

Bu analiz sonucunda sol el partisinin nota ses yükseklikleri = x ve süre değerleri = y bağımsız değişkenlerine karşılık gelen $z=f(x,y)$ bağımlı değişkeni

$$z(x,y) = a_1 + a_2 \tan(3y) + a_3 \cos(3x) + a_4 \sin(3x) + a_5 \tan(10x)$$

denklemleri ilişkilendirilmiştir. Bu bulgulara göre eserin melodik çizgileri $\tan(3y)$, $\cos(3x)$ ve $\sin(3x)$ eğrileri ile temsil edilmiştir. Bu verilere göre regresyon modeli

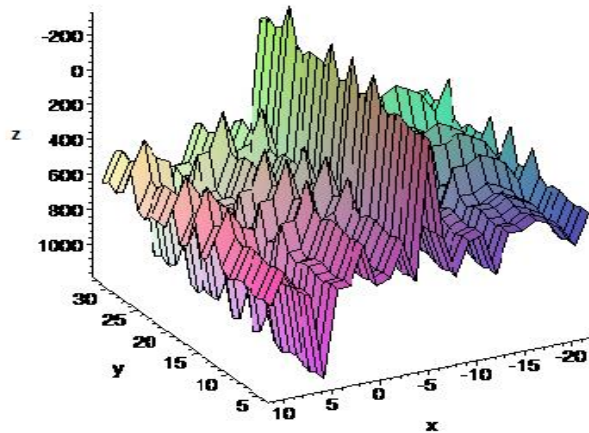
$$z(x,y) = 565,332 - 164,743 \tan(3y) + 87,181 \cos(3x) + 83,032 \sin(3x) - 15,132 \tan(10x)$$

denklemleri ile elde edilmiştir.

Elde edilen regresyon denkleminin 3 boyutlu geometrik modeli, Maple 13 kullanılarak çizdirilmiş ve Grafik 2’deki yüzey oluşturulmuştur.

Grafik 2

Sol el partisine göre eserin geometrik modeli



Grafik 2’de eserin nota ses yükseklikleri ve ses süre değerlerine bağlı olarak çizdirilen geometrik model, sadece trigonometrik eğrilerin oluşturduğu üç boyutlu yüzeyi meydana getirmiştir. Eserin notasyonu incelendiğinde temanın büyük oktav la sesiyle başladığı ve küçük oktav ses sınırında kontrapunktal olarak işlendiği, B temasından itibaren birinci oktav ses sınırına ulaşarak hacmin genişlediği ve daha üst rejisterlerin kullanımıyla geniş bir hacme ulaşıldığı görülmektedir. Bitişte tekrar A temasının gelmesiyle yeniden büyük oktav ses sınırına dönmüş ve burada sonlanmıştır. Bu durum, işitsel ve görsel boyutta eser ile geometrik modelinin uyumunu ortaya koymaktadır.

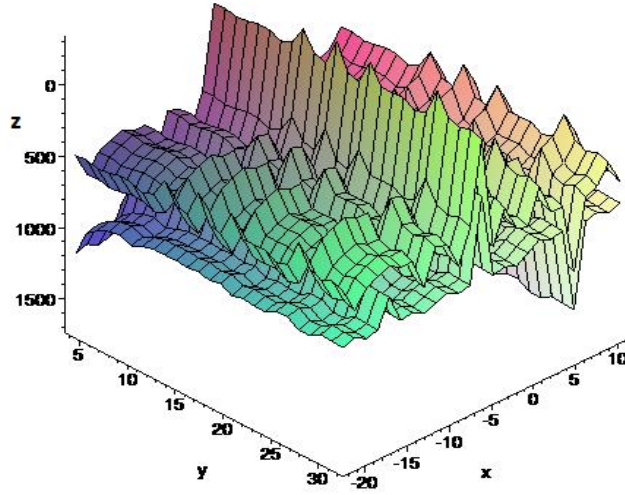
İki partili kontrapunktal eserin regresyon model denklemi

$$z(x,y) = 1401,131 + 25,543 \sin(2^y) + 19648,420 \left(\frac{1}{y^3}\right) - 164,743 \tan(3y) - 25,849 \arctan(x) - 28,987 \tan(10x) + 87,181 \cos(3x) + 83,032 \sin(3x)$$

iken eserin buna göre Maple 13 kullanılarak çizdirilen geometrik modeli Grafik 3’ de verilmiştir.

Grafik 3

İki partili kontrapunktal eserin geometrik modeli



Grafik 3’te eserin nota ses yükseklikleri ve ses süre değerlerine bağlı olarak çizdirilen geometrik model; cebirsel, üstel, trigonometrik ve ters trigonometrik eğrilerin oluşturduğu üç boyutlu yüzeyi meydana getirmiştir. Eserin notasyonu incelendiğinde, temanın sol el partisinin büyük oktav la ile başladığı, sağ el partisinin birinci oktavda ilk temayı duyurduğu, devamında kontrapunktal olarak işlenen temaların birbirinin yansıması olarak devam ettiği, giderek hacmin genişlediği ve B temasından itibaren tiz rejisterlerin kullanımıyla geniş bir sonoriteye ulaşıldığı görülmektedir. Devamında yeniden A teması duyurulmakta ve eser başlangıç

rejisterinden biraz daha pestleşerek sonlanmaktadır. Bu durum kontrapunktal tarzda bestelenen eserin, işitsel ve görsel boyutları ile geometrik modelinin uyumunu ortaya koymaktadır.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, polifonik müziğin eğitime yönelik önemli eserlerinden sayılan J.S. Bach'ın BWV 784 la minör iki sesli envansiyonunun matematiksel kodlama yoluyla geometrik modellemesi oluşturulmuştur. Seçilen eser, ses yükseklik ve süre değerlerine göre kodlanmış, kodlamalar SPSS programında regresyon analizi yapılarak üç boyutlu birçok regresyon modeli elde edilmiştir. Bu regresyon modelleri içerisinde, eserin melodik ve ritmik çizgilerini oluşturan 3 boyutlu geometrik model denklemlerinin, sağ el partisi için $\sin(2y)$, $(1/y^3)$, $\arctan(x)$, $\tan(10x)$ iken, sol el partisi için $\tan(3y)$, $\cos(3x)$ ve $\sin(3x)$ eğrileri ile temsil edildiği görülmüştür. Bu geometrik model, cebirsel, üstel, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonların bir kombinasyonu olarak ortaya çıkmıştır.

Yazarların daha önce yaptığı başka bir çalışmada, A.A. Saygun'un "İnci" adlı piyano eserinin geometrik modellemesi yapılmış, regresyon modelleri içerisinde iki katmanlı olmak üzere sağ ve sol el partileri için, eserin melodik çizgilerini oluşturan üç boyutlu geometrik modelin denklemleri sadece trigonometrik fonksiyona bağlı çıkmıştır. Buna bağlı olarak her eserin melodi, ritim ve formuna özgü biçimde farklı fonksiyonlar ve modellemeler oluşturulabileceği görülmektedir.

Gülsoy vd. (2013)'de Beethoven'ın "Vierte Symphony, Op. 60" eserinin yüzey denklemi Minkowski uzayında bir hiperyüzey olarak ortaya çıkarken, küçük ölçekli "Für Elise" adlı eseri ise bir manifold olarak bulmuştur. Bulunan hiperyüzey denklemi ve manifold ile bu çalışmada elde edilen üç boyutlu yüzey arasında önemli farklılıklar bulunmaktadır. Hiperyüzey ve manifoldların denklemi logaritmik, üstel ve ters trigonometrik fonksiyonların kombinasyonundan oluşurken, bu çalışmada incelenen eserin denklemi cebirsel, üstel, trigonometrik ve ters trigonometrik kombinasyondan oluşmaktadır. Bu çalışmadaki önemli farklardan biri, seçilen eserde ses yükseklik değerlerinin negatif değerleri içermesi nedeniyle logaritmik fonksiyon tanımlı olmamasıdır. Ayrıca eserin kontrapunktal yapısından ötürü elde edilen geometrik modelin diğer eserlere göre daha farklı bir yapı sergilediği görülmektedir.

Müzik eserlerinin farklı yöntemler aracılığıyla daha da geliştirilerek çözümlenmesinin, matematiksel kodlama yoluyla analizinin ve modellemesinin yapılmasının, her iki disiplin açısından alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu tür çalışmalar yoluyla elde edilen

geometrik modellemelerin, matematik bilimi açısından 3 boyutlu yüzeylerin eğrilikleri ve Frenet çatısı açısından incelenmesi önemli görülmektedir. Müzik tarihinin farklı dönem ve stil özelliklerinde eser yazan bestecilerinin eserleri geometrik modelleme yoluyla analiz edilebilir. Bestecilerin besteleme anlayışlarındaki yaklaşımlar bu yolla da incelenebilir. Aynı zamanda bu alanda uygulanabilecek farklı yöntem ve teknikler ile analiz ve geometrik modelleme yöntemleri geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- Atalay, B (2006). *Matematik ve Mona Lisa*. İstanbul: Albatros kitabevi.
- Bakım, S (2014). *Fibonacci dizisi ve altın oranın müzik kullanımının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Bayram, N. (2004). *Sosyal bilimlerde SPSS ile veri analizi*. Bursa: Ezgi Kitabevi.
- Beytekin, S. (2015). *Cazın piyano üzerinden matematiksel analiz ile fraktal geometri ile ilişkisinin analizi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Bigerelle M., & Alain I. (2000). Fractal dimension and classification of music. *Chaos Solitons & Fractals*, 11, 2179-2192.
- Büke, A. (2005). *Bach yaşamı ve eserleri*. İstanbul: Kabalcı Yayınevi.
- Büke, A., & Altınel, İ.M. (2006). *Müziği yaratanlar Barok dönem*. İstanbul: Globous Dünya Basımevi.
- Büyüköztürk, Ş. (2002). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı*. Pegem Akademi Yayıncılık.
- Campbell, P. (1986). The music of digital computers. *Nature*, 324, 523–528.
- Cataldo, C. (2018). Towards a music algebra: fundamental harmonic substitutions in jazz. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*, 5(1) 52-57.
- Demirbatır, R.E. , Fağcı F., & Ezentaş R. (2018). *Matematiksel Kodlama Yoluyla A. Adnan Saygun'un "İnci" Adlı Piyano Parçasının Geometrik Modellemesi*. Uluslararası Necatibey Eğitim ve Sosyal Bilimler Araştırmaları Kongresi, Tam Metin Bildiri Kitabı, 26-28 Ekim 2018, Balıkesir, 483-492.

- Devlin, K. (2000). *The math gene: how mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip*. Great Britain, Basic Books.
- Doğangün, D. (2015). Ahmed Adnan Saygun'un Op.31 'Viyolonsel İçin Solo Partita'sı ve eserin 1955 Türkiye'si sanat hayatındaki yeri. *İnönü University Journal of Culture and Art*, 1(1), 61-69.
- Dönmez, B. M., & Atan, A. (2016). Johann Sebastian Bach'ın Klavsen eserlerinde anlatım üslubu. *İnönü Üniversitesi Sanat ve Tasarım Dergisi*, 211-233.
- Eftekhari, A. (2011). Fractal geometry of texts: an initial application to the works of Shakespear. *Journal of Quantitative Linguistics*, 13(2-3), 177.
- Feridunoğlu, L. (2004). *Müziğe giden yol*. İnkılap Yayınevi.
- Ghezzeo, M. (1993). *Solfege, ear training, rhythm, dictation, and musiz theory: comprehensive course*. University of Alabama Press.
- Gülsoy, F., Güney, İ., & Özdamar, E. (2013). Mathematical and statistical modeling of the musical compositions. *Balkan Journal of Mathematics*, 1, 35-43.
- Hsu, K., & Hsu, A. (1990). Fractal geometry of music. *Proceedings of National Academy of Sciences*, 87, 938-941.
- Kıratlı, S. D. (2016). *Ahmet Adnan Saygun'un 'Viyolonsel İçin Partita' adlı eserinin teknik incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Sivas.
- Knobloch, E. (2008). Euler transgressing limits: the infinite and music theory. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, ix, 9-24.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. Canada: Wiley-Interscience Publication.
- Köhler, R. (1997). Are there fractal structures in language? Units of measurement and dimensions in linguistics. *Journal of Quantitative Linguistics*, 4, 1-3.
- Hacıev, P. (1996). *Temel müzik teorisi*. (Çev. A. Sağlam & B. Koçancı). Pan Yayıncılık.
- Lehmann, I., & Posamentier A. (2007). *The (Fabulous) Fibonacci numbers*. Prometheus Books, 271-291.
- Mann, A., & Newsom, J. (2000). *Music history from primary sources*. Washington: Library of Congress.

- Marcus, D. S. (2004). *The music of the primes: why an unsolved problem in mathematics matters*. Harper Perennial Press.
- Marks, R. (2009). *The handbook of fourier analysis and its applications*. Oxford University Press.
- Mazzola, G. (2002). *The topos of music: geometric logic of concepts, theory, and performance*. Basel, Boston, Berlin. Birkhauser Verlag.
- Orhan, C. (1995). *Matematik ve müzik*. Matematik Dünyası, 6-7.
- Rehding, A. (2003) *Hugo Riemann and the birth of modern musical thought*. Cambridge University Press.
- Riedweg, C. (2005). *Pythagoras: his life, teaching and influence*. Cornell University Press.
- Stolzenburg, F. (2009). A periodicity-based theory for harmony perception and scales. *In Proceedings of the 10th International Society for Music Information Retrieval Conference*, pp:87-92, October 26-30, Kobe, Japan.
- Uçan, A. (1994). *Müzik eğitimi. Temel kavramlar- ilkeler- yaklaşımlar*. Ankara: Müzik Ansiklopedisi Yayınları.
- Voss, R., & Clarke, J. (1975). If Noise in music and speech. *Nature*, 258, 317–318.
- Wright, D. (2009). *Mathematics and music*. Department of Mathematics, Washington University, St. Louis, 6-13.
- https://tr.wikipedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach. Erişim tarihi: 09. 09.2019.
- https://www.turkcebilgi.com/ahmet_adnan_saygun. Erişim tarihi: 11.06.2019.

EXTENDED ABSTRACT

Music, from its most basic to the most complex element, contains various mathematical structures, meaning that music and mathematics are two interdependent disciplines in many respects. Music consists of the selection and processing according to a certain aesthetic understanding of the expression of emotions, thoughts and designs through sounds. Mathematics, on the other hand, in parallel with the research of the competence and accuracy of intellectual knowledge, aesthetically, also investigates the accuracy of sensory knowledge, that is, beauty. It is thought that the first academic studies on these two disciplines started in the 6th century BC with the Greek philosopher and mathematician Pythagoras. The systematic

structure of the relations between the voices of Pythagoras and the discovery of various numerical ratios between the frequencies of sounds is the basis of music theory. Until today, many philosophers, maths and music people have researched the relationship between these two disciplines and tried to understand the mathematical structure of music. Generally, mathematical explanations can be offered for certain musical concepts such as diatonic and chromatic series, intervals, rhythm, measure, form, melody, chords, series, octave equivalence, overtones, timbre, acoustic, equal-spaced sound system and alternative methods of tuning.

German composer Johann Sebastian Bach is one of the greatest composers of classical music in the Baroque period and a mathematical genius. Bach's Two- and Three-Part Inventions are mostly educational in purpose. The phenomenon of "Invention" is hidden in the structural features of each composer's work. These Inventions consist of 30 different parts with the title "Aufrichtige Anleitung". The pieces are composed for the development of technical skills. 15 of these pieces are two-part and 15 are three-part. The tonality pattern is the same in two- and three-part Inventions. When the works are examined, it is seen that each one has a very different structure. The composition of motifs, intermediate music and tonal relations is different in each piece. Inventions are not limited to the technique of playing, but it is as if it is hidden in the structural properties of each part.

Mathematical coding and analysis of musical works, analysis of the works by means of computer-aided software are useful for producing different approaches and providing opportunities for working between the disciplines. In this sense, it is seen as an innovative approach to make abstract sounds concrete by transferring them to a geometric environment. In this way it is possible to perform structural analyses by taking into account the pitch and duration values of the sounds that make up the works in different combinations. The current study aims to create a geometric modeling of J.S. Bach's musical exercise two-part Invention in A Minor, BWV 784.

The sound heights and time values of the selected artwork were mathematically coded and then a regression analysis was performed to find the most fitting model. As a result of this analysis, the geometry modeling of the regression equation was created. This equation consisted of a combination of algebraic, trigonometric, inverse trigonometric and exponential functions. The 3D geometric model of the obtained regression equation was drawn by using Maple 13, a trusted mathematical calculation, programming and modeling software for general purpose mathematical problem-solving.

Examination of the notation of the work revealed that the theme starts with the left-hand part with the large octave, the right-hand party announces the first theme with the first octave. The continuation of the themes is processed contrapuntally as a reflection of each other. The volume increases and the full sonority is reached from theme B. Following this, theme A is reintroduced, and the work concludes at a lower pitch than the start register. In this way, the harmony of the geometrical model of the polyphonic work is revealed with its audio and visual dimensions.