DİFERENSİYEL OPERATÖR YARDIMIYLA TANIMLANAN ANALİTİK YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI

YELİZ KARA

T.C

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL OPERATÖR YARDIMIYLA TANIMLANAN ANALİTİK YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI

Yeliz KARA

Prof. Dr. Sibel YALÇIN

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2012

TEZ ONAYI

Yeliz KARA tarafından hazırlanan ''Diferensiyel Operatör Yardımıyla Tanımlanan Analitik Yalınkat Fonksiyon Sınıfları'' adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Prof. Dr. Sibel YALÇIN

Üye: Prof. Dr. Sibel YALÇIN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. İlhan TAPAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Enstitü Müdürü

17/02/2012

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünün kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17.02.2012

Yeliz KARA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYEL OPERATÖR YARDIMIYLA TANIMLANAN ANALİTİK YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI

Yeliz KARA

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; $E = \{z: |z| < 1\}$ olmak üzere E de analitik ve yalınkat (ünivalent), $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalize edilmiş fonksiyonların oluşturduğu $\boldsymbol{S}$ sınıfı ve onun alt sınıfları olan yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının temel özellikleri verildi. Ayrıca $E^* = \{z: |z| > 1\}$ da analitik, ünivalent fonksiyonlar için alan teoremi ve bu teorem yardımıyla $\boldsymbol{S}$ deki fonksiyonların ikinci katsayısı için kesin bir üst sınır elde edildi.

Çalışmanın esas kısmını oluşturan son bölümde de Salagean diferensiyel operatörü yardımıyla tanımlanan analitik, ünivalent fonksiyon sınıfları tanıtıldı. Ayrıca katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri, ekstrem noktaları verildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyon, Ünivalent Fonksiyon, Salagean Operatörü, Negatif Katsayı, Hadamard Çarpımı, Distorsiyon Teoremleri, Katsayı Eşitsizliği

2012, vi+83 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CLASSES OF ANALYTIC UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY DIFFERANTIAL OPERATOR

Yeliz KARA

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN

This work consist of three chapters.

In the first chapter, some of concepts which will be used later are introduced.

In the second chapter, basic properties of the class $\boldsymbol{S}$ of normalized functions by $f(0) = f^{'}(0) - 1 = 0$ on E and of convex and starlike function classes which are the subclasses of $\boldsymbol{S}$ are, where $E = \{z: |z| < 1\}$ is the unit disc. Furthermore area theorem for analytic, univalent functions on $E^{*} = \{z: |z| > 1\}$ and a sharp upper bound for the second coefficient on $\boldsymbol{S}$ is obtained.

In the last chapter, which consist of the main part of our study, on class of analytic, univalent functions defined by Salagean operator are introduced. In addition coefficient estimates, distortion theorems, extreme points are given.

Key Words: Analytic Functions, Univalent Functions, Salagean Operator, Negative Coefficients, Hadamard Product, Distortion Theorems, Coefficient Inequalities

2012, vi+83 pages.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde her türlü desteğini ve fedakârlığını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN'a en içten dileklerimle şükranlarımı sunarım. Ayrıca gerekli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Araş. Gör. Dr Elif YAŞAR'a da teşekkürlerimi iletiyorum. Matematik öğrenimimde katkısı olan tüm hocalarıma ve yüksek lisans eğitimi sürecinde desteklerinden faydalandığım TÜBİTAK'a teşekkürü borç bilirim. Yaşamım boyunca benden esirgemedikleri sevgi, anlayış ve güvenle kendimi gerçekleştirmeme fırsat veren ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili aileme en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Yeliz KARA

17/02/2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
N	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
C_r	Orijin merkezli r yarıçaplı çember
$\boldsymbol{C(\alpha)}$	α-mertebeli negatif katsayılı konveks fonksiyonlar sınıfı
CV	Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı
CV$(\boldsymbol{\alpha})$	α-mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
$D^n f$	f nin Salagean türevi
$\overline{D}$	D nin kapanışı
E	Birim disk
E^*	Birim diskin dışı
$f(D)$	D nin f altındaki görüntüsü
$f \circ g$	f ile g nin bileşkesi
$f * g$	f ile g nin Hadamard çarpımı
Imf	f nin sanal kısmı
K	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfları
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$k(w)$	$k(z)$ nin tersi
P	Pozitif katsayılı ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar
Ref	f nin reel kısmı
S	Normalize edilmiş, E de analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı
ST	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
ST$(\boldsymbol{\alpha})$	α-mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı

T	Negatif katsayılı analitik ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathbf{T}^*(\boldsymbol{\alpha})$	α-mertebeli negatif katsayılı yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathbf{\Sigma}$	E^* da analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı

GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin ilgi çeken konularından birisi yalınkat fonksiyonlar teorisidir. Bu konunun temeli Koebe'nin 1907 de yayınladığı makale ile atılmıştır. Sonrasında, 1914 de Gronwall'ın alan teoreminin ispatı ve 1916 da Bieberbach'ın yalınkat fonksiyonların ikinci katsayıları için vermiş olduğu sonuç ile geliştirilmiştir.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesini birim diske konform olarak resmeden bir dönüşümün varlığı Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinir. (Riemann 1851) Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak kolaylık sağlar. Yalınkat fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $\boldsymbol{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

Bieberbach 1916 da $\boldsymbol{S}$ sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Bu teoremin önemli sonuçlarından birisi de Koebe tarafından verilen distorsiyon teoremleridir.

Yine aynı çalışmada, Bieberbach tarafından yapılan tahmine göre, $z \in E$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ biçiminde bir Taylor seri açılımına sahip $f \in \boldsymbol{S}$ fonksiyonu her $k \geq 2$ için $|a_k| \leq k$ dır. Bu tahminin ispatı matematikçileri uzun süre meşgul etmiştir. 1985 yılında Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach tahminin uzun süre ispatlanamaması, birçok yeni metodun geliştirilmesini ve $\boldsymbol{S}$ nin birçok alt sınıfının tanımlanıp araştırılmasını sağladı. Bu alt sınıfların en önemlileri; yıldızıl, konveks, alfa mertebeli yıldızıl, alfa mertebeli konveks fonksiyon sınıflarıdır.

Bu tezin amacı, analitik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıflarının katsayı koşulları, distorsiyon sınırları ve ekstrem noktalarını incelemektir. Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, $\boldsymbol{S}$ sınıfı ve yıldızıl, konveks, alfa mertebeli yıldızıl, alfa mertebeli konveks fonksiyon sınıfları hakkında genel bilgiler ve teoremler verilmiş, sonuçlar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Salagean diferensiyel operatörü yardımıyla tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları ele alınmıştır. Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Salagean diferensiyel operatörü tanımlanmıştır. İkinci kısımda, (Dernek 1980)' de ele alınan $\boldsymbol{S_{m,n}(\alpha)}$ ve $\boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ sınıfları; üçüncü kısımda (Aouf ve Cho 1998)' de ele alınan $\boldsymbol{S_n(\lambda,\alpha)}$ ve $\boldsymbol{T_n(\lambda,\alpha)}$ sınıfları; dördüncü kısımda (Eker ve Güney 2008)' de ele alınan $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ sınıfı; beşinci kısımda (Darwish 2007)' de ele alınan $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ sınıfı incelenmiştir.

1.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde sıkça kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgiler (Alhfors 1996, Başkan 1996, Nehari 1952, Palka 1991, Hayman 1994, Graham ve Varolin 1996, Graham ve Kohr 2003, Silverman ve Ponnusamy 2006)' da bulunabilir.

1.1. Tanım. $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $S_1 = S \cap A_1 \neq \emptyset$, $S_2 = S \cap A_2 \neq \emptyset$, $S = S_1 \cup S_2$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyorsa S kümesine bağlantılı küme denir. Aksi halde küme bağlantısız olarak adlandırılır.

1.2. Tanım. Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

1.3. Tanım. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (çevre) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

1.4. Tanım. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir eğri olmak üzere $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

1.5. Tanım. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bir eğri ve $t_1, t_2 \in [a, b]$ olsun. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ için $t_1 = t_2$ oluyorsa γ ya basit eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer γ, basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri denir.

1.6. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilir denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f nin z_0 daki türevi denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

veya

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

dır. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirse,

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$$

dır.

1.7. Tanım. Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının uygun bir D(z_0, δ) komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f z_0 da analitiktir denir. Eğer f fonksiyonu bir S kümesinin tüm noktalarında analitik ise f, S üzerinde analitiktir denir. Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam fonksiyon denir.

1.8. Teorem. Eğer f fonksiyonu z_0 merkezli ve R yarıçaplı bir γ çemberinin içinde analitik ise, bu durumda γ eğrisinin içinde bulunan her z noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad (1.1)$$

dır. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki Taylor açılımı adı verilir (Nehari 1952).

1.9. Tanım. $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasının $D^*(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda analitik ancak z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktasına ayrık tekil nokta adı verilir.

1.10. Teorem. Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun ayrık tekil noktası ise f fonksiyonu $D^*(z_0, r)$ delinmiş dairesinde

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (1.2)$$

açılımıyla temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş komşuluğundaki Laurent açılımı denir (Nehari 1952).

1.11. Tanım. $f(z)$ fonksiyonu (1.2) formunda alınsın. Burada eğer sonlu sayıda a_{-n} katsayısı sıfırdan farklı, diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

1.12 Tanım. Bir f fonksiyonunun, bir D bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna D de meromorf bir fonksiyondur denir.

1.13. Teorem(Maksimum Modül Teoremi). *D* sınırlı bir bölge olsun. f, D de analitik, D nin sınırında sürekli ve sabit olmayan bir fonksiyon ise, $|f|$ maksimum değerini *D* bölgesinin sınırında alır (Palka 1991).

Maksimum modül teoremi $1/f$ fonksiyonuna uygulanırsa, minimum modül teoremi elde edilir.

1.14. Teorem(Minimum Modül Teoremi). *D* sınırlı bir bölge olsun. f, D de analitik, D nin sınırında sürekli, her $z \in D$ için $f(z) \neq 0$ özelliğinde sabit olmayan için bir fonksiyon ise, $|f|$ minimum değerini *D* bölgesinin sınırında alır (Palka 1991).

Maksimum modül teoreminin basit fakat önemli bir sonucu $f(z)/z$ fonksiyonuna maksimum modül teoremini uygulamakla elde edilen Schwarz lemmasıdır.

1.15. Teorem(Schwarz Lemması). f fonksiyonu E birim dairesinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. O halde E de $|f(z)| < |z|$ ve $|f'(0)| < 1$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.16. Teorem. *D*, kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve f, *D* de analitik bir fonksiyon olsun. *D* de bulunan her parçalı düzgün kapalı γ eğrisi için

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

dır (Ahlfors 1979).

1.17. Teorem. f, pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı γ çevresinin üzerinde ve içinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer z_0 γ nın içinde bulunan herhangi bir nokta ise, bu durumda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

dır (Silverman ve Ponnusamy 2006).

1.18. Teorem. $f\ (z)$ fonksiyonu bir γ kapalı çevresinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer z_0 γ nın içinde bir nokta ise,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n = (0,1,2,\dots)$$

dır (Silverman ve Ponnusamy 2006).

1.19. Tanım. γ, $\mathbb{C}$ de basit kapalı bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$, γ üzerinde bulunmayan nokta olmak üzere; γ nın z_0 a göre indeksi(sayma sayısı), $\mathrm{I}(\gamma, z_0)$ simgesiyle gösterilir ve indeks

$$\mathrm{I}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z - z_0}$$

şeklinde tanımlanır. İndekse bazen γ nın z_0 etrafında dönme sayısı da denir.

1.20. Teorem. f, bir D bölgesinde meromorf fonksiyon, γ ise D de bulunan ve f nin hiçbir sıfır yeri ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. f nin γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı z_f, kutup yerlerinin sayısı p_f ise;

$$\Delta_{\gamma} arg\, f(z) = 2\pi\left(z_f - p_f\right) = 2\pi\, \mathrm{I}(f \circ \gamma, 0)$$

dır (Başkan 1996).

1.21. Teorem. Kompleks düzlemde bulunan her z değeri için f sınırlı bir tam fonksiyon ise, bu durumda düzlemin tamamında f (z) sabittir.

1.22. Tanım. *f*: S→ $\mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in$ S noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $\omega_0 = f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür, denir. Eğer her $z_0 \in$ S noktasında f konform ise f, S de konformdur denir.

1.23. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, en az iki farklı sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu durumda D yi konform olarak birim daire üzerine resmeden bir tek analitik f fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

1.24. Tanım. D, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $u: D \to \mathbb{C}$, D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D de reel harmonik fonksiyon denir.

1.25. Teorem(Green Teoremi). C pozitif yönde yönlendirilmiş parçalı düzgün basit kapalı bir eğri olmak üzere B, C nin sınırladığı bölge olsun. Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları B yi bulunduran bir açık bölgede sürekli birinci kısmi türevlere sahip ise

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dxdy$$

dir.

2. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biri analitik ve yalınkat fonksiyonlar teorisidir. Bu bölümde E birim dairesi üzerinde tanımlı analitik yalınkat fonksiyonların oluşturduğu $\boldsymbol{S}$ sınıfı ile $\boldsymbol{S}$ sınıfının alt sınıflarının tanımları ve bu sınıflara ait fonksiyonların genel özellikleri verilecektir.

Bu bölümde belirtilen kavramlar ve tanıtılan sınıflarla ilgili ayrıntılı bilgilere (Pommerenke 1975, Schober 1975, Duren 1983, Goodman 1983)' dan ulaşılabilir.

2.1. Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri

2.1.1. Tanım. D⊂ $\mathbb{C}$ bir bölge ve z_1 ve $z_2 \in$ D olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ ise f ye D de yalınkat(ünivalent)tır, denir.

Tanımdan da görüleceği gibi bir f fonksiyonunun yalınkat olması analitik olmasını gerektirmez. Örneğin; $f(z) = z + z^{-1}$ fonksiyonu orijini bulunduran herhangi bir bölgede yalınkattır ancak bu fonksiyon $z = 0$ da basit kutba sahip olduğu için bu bölgede analitik değildir.

D, karmaşık düzlemde en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı herhangi bir bölge ve E açık birim daire olsun. Riemann dönüşüm teoremine göre D bölgesi analitik ve yalınkat olarak E üzerine dönüştürülebilir. Yani D yi E ye resmeden bir tek φ analitik yalınkat fonksiyonu mevcuttur. Böylece herhangi $g: D \to \mathbb{C}$ analitik ve yalınkat fonksiyonu için $f: E \to \mathbb{C}, f = g \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu da analitik ve yalınkat olur. Bu nedenle tezin geri kalan kısmında genel olarak D bölgesi yerine E birim diski alınacaktır.

h, E de analitik ve yalınkat bir fonksiyon olsun. $h'(0) \neq 0$ olduğundan

$$f(z) = \frac{h(z) - h(0)}{h'(0)}$$

fonksiyonu E de $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ bağıntılarını sağlayan analitik ve yalınkat bir fonksiyondur. E de analitik ve yalınkat , $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş bir f fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. (2.1) de verilen seri açılımına sahip yalınkat fonksiyonların sınıfı ***S*** ile gösterilir. Buna göre;

$$\boldsymbol{S} = \{ f \mid f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}, \text{analitik ve yalınkat}, f(0) = f'(0) - 1 = 0 \}$$

dir.

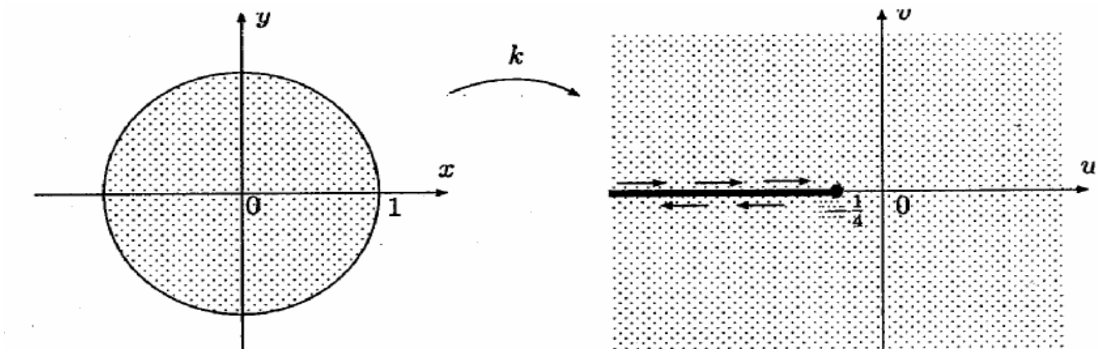
Aşağıda ***S*** sınıfına ait, çok kullanılan bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir.

i. $f(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu E yi kendi üzerine resmeder.

ii. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır. $w(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ alındığında $wz^2 - (2w+1)z + w = 0$ dır. z ye göre ikinci dereceden bu ifadenin kökleri

$$\Delta = 1 + 4w > 0, \quad (w \in \mathbb{R})$$

iken mevcut olacağından $w < -1/4$ olamaz. O halde $k(z)$ dönüşümü E yi $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış karmaşık düzlem üzerine konform olarak resmeder.



Şekil 2.1. E birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

iii. $w = f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu E yi $\mathrm{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemine birebir olarak resmeder.

iv. $f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu E yi $-\frac{\pi}{4} < Im(w) < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridi üzerine birebir resmeder.

v. $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu E yi bir kardiyoidin içi üzerine birebir olarak resmeder.

Sıradaki teorem ***S*** sınıfının elemanlarının temel dönüşümler altında korunduğu üzerinedir.

2.1.2. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlar da ***S*** sınıfına aittir.

i. $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$,
ii. $g(z) = e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right)$,
iii. $0 < r < 1$ için $g(z) = r^{-1} f(rz)$,
iv. $\Psi(0) = 0\,, \Psi'(0) = 1$ iken Ψ fonksiyonu $f(E)$ bölgesi üzerinde analitik ve yalınkat olmak üzere $g = \Psi \circ f$,
v. $f(\mathrm{z}) \neq \mathrm{w}$ olmak üzere $g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$,
vi. $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$,

vii. $f \in \boldsymbol{S}$ olmak üzere ve $|\alpha| < 1$ için $g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}$

İspat. İspat, (2.1) bağıntısı ve yalınkatlık tanımı kullanılarak elde edilir. □

2.1.3. Tanım. $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\boldsymbol{T}$ sınıfı olarak adlandırılır. $\boldsymbol{T}$ sınıfı, negatif katsayılı fonksiyonların oluşturduğu sınıf olup $\boldsymbol{S}$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

2.2. Birim Diskin Dışında Analitik Yalınkat Olan Fonksiyonların Sınıfı

2.2.1. Tanım. $\mathrm{E}^* = \{\zeta : 1 < |\zeta| < \infty\}$ bölgesinde analitik ve yalınkat olan

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n} \tag{2.2}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $\boldsymbol{\Sigma}$ ile, sıfır değerini alamayan $g \in \boldsymbol{\Sigma}$ fonksiyonlarının sınıfı $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ile gösterilir.

2.2.2. Teorem. f fonksiyonu (2.1) formunda olsun. Bu takdirde,

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \zeta - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots \tag{2.3}$$

fonksiyonu $\boldsymbol{\Sigma}_0$ sınıfına aittir. Tersine $g(\zeta)$, (2.3) ile verilmiş ise bu takdirde;

$$f(z) = \frac{1}{g(1/z)} = z - b_0 z^2 + \left({b_0}^2 - b_1\right)z^3 + \left(2b_0 b_1 - b_2 - {b_0}^3\right)z^4 + \cdots$$

fonksiyonu da $\boldsymbol{S}$ sınıfına aittir. (Goodman 1983)

İspat. $|\zeta| > 1$ olduğundan $1/\,\zeta \in E$ olup f, $1/\,\zeta$ da analitiktir. O halde

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \frac{1}{\frac{1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \cdots} = \zeta - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots$$

dır. Yani $g(\zeta) \in \boldsymbol{\Sigma}$ dır. $g(\zeta) = 0$ olsun. Bu durumda $f(1/\zeta) = \infty$ olur. Yani $f, 1/\zeta$ da bir kutba sahiptir. $1/\zeta \in E$ ve f, E de analitik olduğundan bu mümkün değildir.O halde $g(\zeta) \neq 0$, dolasıyla $g(\zeta) \in \boldsymbol{\Sigma}_0$ dır.

Tersine, $z \in E$ için $\zeta = z^{-1} \in \mathrm{E}^*$ dir. Böylece $g(\zeta) = 1/f(z)$ ve $f(z) = 1/g(\zeta)$ olur. $g(\zeta)$, E*da analitik, yalınkat ve $g\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$ olduğundan $f(z)$, E de analitik ve yalınkattır. Üstelik bölme işlemi sonunda

$$f(z) = \frac{1}{g(\zeta)} = z - b_0 z^2 + \left({b_0}^2 - b_1\right) z^3 + \left(2b_0 b_1 - b_2 - {b_0}^3\right) z^4 + \cdots$$

elde edilir. Yani $f(z) \in \boldsymbol{S}$ dir. □

2.3. Alan Teoremi

2.3.1. Teorem. $f \in \boldsymbol{S}$ ve $\overline{D}_r = \{z \colon |z| \leq r \leq 1\}$ olsun. Bu durumda $f(\overline{D}_r)$ sınırlı bölgesinin alanı

$$A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2 r^{2n}$$

dir. (Goodman 1983)

İspat. $z = x + iy \in \overline{D}_r$ ve $w = f(z) = u + iv$ olsun.

$$A_r = \iint_{f(\overline{D}_r)} du\, dv = \iint_{\overline{D}_r} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx\, dy$$

dir. Burada f nin analitikliği göz önüne alınırsa,

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = {u_x}^2 + {v_x}^2 = |f'(z)|^2$$

ve

$$A_r = \iint\limits_{\overline{D}_r} |f'(z)|^2 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r \left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \qquad (2.4)$$

olur.

$$f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = a_1 + 2a_2\rho e^{i\theta} + \cdots + na_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots$$

olduğundan

$$\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 = f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\overline{f'(\rho e^{i\theta})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2\rho^{2n-2} + \sum_{k\neq 0}^{\infty} c_k \, e^{ik\theta}$$

elde edilir. Buradaki c_k lar a_n ve ρ ya bağlıdır. Böylece,

$$\rho\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 \, \rho^{2n-1} + \sum_{k\neq 0}^{\infty} \rho c_k \, e^{ik\theta}$$

ifadesi (2.4) de yerine yazılıp terim terime integrallenebilir olduğu ve $k \neq 0$ için $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$ göz önüne alınırsa,

$$A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$$

bulunur. □

2.3.2 Örnek. $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $D=\{z: r\leq |z|\leq R, 0<r<R<1\}$ de analitik olsun. $f(D)$ nin alanı,

$$A=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n})$$

dir.

Çözüm.

$$A=\iint_{f(D)} du\,dv=\iint_D \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dx\,dy=\int_r^R\int_0^{2\pi}\left|f'(\zeta e^{i\theta})\right|^2\zeta d\theta\,d\zeta$$

ve

$$\int_0^{2\pi}\left|f'(\zeta e^{i\theta})\right|^2\zeta d\theta\;=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2\zeta^{2n-2}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$A=\int_r^R 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2\,\zeta^{2n-1}d\zeta=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2\frac{R^{2n}-r^{2n}}{2n}$$

$$=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2\,(R^{2n}-r^{2n})$$

elde edilir. □

2.3.3. Teorem (Alan Teoremi). $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ fonksiyonu $E^*=\{z:|z|>1\}$ de analitik ve yalınkat ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\leq 1$$

dir.

İspat. f nin almadığı değerlerin kümesi D olsun. $|z| = r > 1$ çemberinin f altındaki görüntüsü γ_r olsun. f yalınkat olduğundan γ_r, $D_r \supset D$ bölgesini saran basit kapalı bir eğridir. Green Teoreminden D_r nin alanı

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{f(z)}\, f'(z)dz$$

dir. Buradan

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\left(\bar{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\,(\bar{z})^{-n}\right)\left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} mb_m z^{-m-1}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\, r^{-n}e^{-in\theta}\right)\left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} mb_m r^{-m-1}e^{-i(m+1)\theta}\right)re^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(r^2 - \sum_{m=1}^{\infty} b_m r^{-m+1}e^{-i(m+1)\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\, r^{-n+1}e^{-i(n-1)\theta}\right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\,\overline{b_n}\, b_m r^{-n-m}e^{-i(n+m)\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} r^2 d\theta - \sum_{m=1}^{\infty} mb_m r^{-m+1}\int_0^{2\pi} e^{-i(m+1)\theta}d\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\ r^{-n+1}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}d\theta\right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\,\overline{b_n}\, b_m r^{-n-m} - \int_0^{2\pi} e^{-i(n+m)\theta}d\theta\right)$$

elde edilir. $\{e^{in\theta}\}$ ortogonal yani

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

olduğundan

$$A_r = \frac{1}{2}\left(2\pi r^2 - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right) = \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right)$$

olur. $r \to 1^+$ için

$$A_r = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right)$$

bulunur. $A_r \geq 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

elde edilir. □

2.3.4. Teorem. $f \in \boldsymbol{S}$ ise $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir (Bieberbach 1916).

İspat. $f \in \boldsymbol{S}$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.1.2 (vi) den dolayı $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ de $\boldsymbol{S}$ sınıfına aittir. Üstelik

$$g(z) = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \left(\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{8}{a_2}^2\right)z^5 + \cdots$$

dır. Teorem 2.2.2 gereği

$$h(\xi) = \frac{1}{g(1/\xi)} = \xi - (1/2)a_2\xi^{-1} + b_3\xi^{-3} + b_5\xi^{-5} + \cdots \tag{2.5}$$

fonksiyonu $\boldsymbol{\Sigma}$ sınıfında bulunur. Teorem 2.3.3 den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 = |-a_2/2|^2 + 3|b_3|^2 + 5|b_5|^2 + \cdots \leq 1 \tag{2.6}$$

olur. Buradan $|-a_2/2|^2 \leq 1$ ve $|a_2| \leq 2$ elde edilir. Eğer $|a_2| = 2$ yani $a_2 = 2e^{i\alpha}$ ise (2.6) bağıntısında her n≥ 2 için $b_n = 0$ olur. Bu takdirde (2.5) bağıntısı

$$h(\xi) = \xi - (1/2)\, a_2 \xi^{-1} = \xi - e^{i\alpha}\xi^{-1}$$

olup

$$g(z) = \frac{1}{h(1/z)} = \frac{1}{z^{-1} - e^{i\alpha}z} = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}z^2}$$

dir.

$$f(z^2) = g(z)^2 = \frac{z^2}{(1 - e^{i\alpha}z^2)^2}$$

olduğundan $f(z) = z\left(1 - e^{i\alpha}z\right)^{-2}$ dir. O halde eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = e^{i\alpha}k\left(e^{-i\alpha}z\right) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2}$$

olması durumunda geçerlidir. Bu ise Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur. □

2.3.5.Bieberbach Tahmini. Eğer $f \in \boldsymbol{S}$ ise $|a_n| \leq n$, $(n \geq 2)$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir (Bieberbach 1916).

1916 dan beri meşhur olan Bieberbach tahmininin ispatlanması uzun yıllar matematikçileri meşgul etmiştir. 1985 yılında Louis de Branges bu eşitsizliğin doğruluğunu kesin olarak göstermiştir

2.3.6. Teorem. $\boldsymbol{S}$ sınıfının her fonksiyonunun değer kümesi $\{\omega : |\omega| \leq 1/4\}$ dairesini kapsar. Bu eşitsizlik kesin olup eşitlik ancak ve ancak $f(z)$ nin Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları olması durumunda geçerlidir (Koebe 1907).

İspat. Eğer bir $f \in \boldsymbol{S}$ fonksiyonu $\omega \in \mathbb{C}$ değerini almıyorsa

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right) z^2 + \cdots$$

fonksiyonu Teorem 2.1.2 (v) gereği $\boldsymbol{S}$ sınıfına aittir. $f \in \boldsymbol{S}$ ve Teorem 2.3.4 gereği $\left|\left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right)\right| \leq 2$ olduğundan $\frac{1}{|\omega|} \leq 2 + |a_2|$ olur. Dolayısıyla buradan $|\omega| \geq 1/4$ elde edilir. Böylece f nin almadığı her değer $|\omega| < 1/4$ diskinin dışında kalmak zorundadır. Eğer $|\omega| \leq 1/4$ ise $|a_2| = 2$ olmak zorundadır. Bu ise $f(z)$ nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir. □

2.4. Distorsiyon Teoremleri

Bir f analitik dönüşümün kendisinin ve türevlerinin mutlak değerleri için alt ve üst sınırlar elde edilmesine distorsiyon teoremleri denir.

Aşağıda Koebe distorsiyon teoremleri olarak bilinen, S sınıfına ait bir f fonksiyonunun $z \in \overline{D_r} = \{z: |z| \leq r < 1\}$ olması durumunda $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ için alt ve üst sınırlar verilecektir.

2.4.1. Teorem. $f \in S$ ise her $z \in \overline{D_r}$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{2.7}$$

ve

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{2.8}$$

dır (Goodman 1983).

İspat. $0 < |\alpha| < 1$ için

$$\omega(z) = f\left(\frac{z+\alpha}{1+z\bar{\alpha}}\right)$$

fonksiyonu E de yalınkattir. Böylece

$$g(z)=\frac{\omega(z)-f(\alpha)}{f'(\alpha)(1-|\alpha|^2)}$$

fonksiyonu da E de yalınkattir ve $g(0)=0,\ g'(0)=1$ bağıntıları sağlanır. Dolayısıyla $g\in\boldsymbol{S}$ dir. Eğer a_2, $g(z)$ nin orijin civarında Taylor açılımının ikinci katsayısı ise,

$$a_2=\frac{g''(0)}{2!}=\frac{1}{2}\left[\frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)}-2\bar{\alpha}\right]$$

dir. $|a_2|\leq 2$ olduğundan

$$\left|\frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)}-2\bar{\alpha}\right|\leq 4$$

dir. α ile z yer değiştirirse,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|}{1-|z|^2}\right|\leq\frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{2.9}$$

olur. $|z|=r<1$ alınırsa,

$$\left|Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r}{1-r^2}\right|\leq\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}$$

olur. Böylece

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{2r^2+4r}{1-r^2} \tag{2.10}$$

bulunur. $z=re^{i\theta}$ alınırsa,

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) \text{ ve } f''(z) = e^{-2i\theta}(u_{rr} + iv_{rr})$$

olduğundan

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})}{u_r + iv_r} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})(u_r - iv_r)}{{u_r}^2 + {v_r}^2}$$

olur. Böylece

$$Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})(u_r - iv_r)}{{u_r}^2 + {v_r}^2} = r\frac{\partial}{\partial r}In({u_r}^2 + {v_r}^2)^{1/2} = r\frac{\partial}{\partial r}\,In|f'(z)|$$

elde edilir. Bu son ifade (2.9) da yerine yazılır ve $r \neq 0$ ile bölünürse,

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\,In|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

bulunur. 0 dan r ye integral alındığında

$$In(1-r) - 3In(1+r) \leq In|f'(z)| \leq In(1+r) - 3In(1-r)$$

veya

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.8) bağıntısını elde etmek için (2.7) nin sağ tarafının $\zeta = te^{i\theta}$ için $0 \leq t \leq r$ doğru parçası boyunca $\zeta = 0$ dan $\zeta = z = re^{i\theta}$ ya integrali alınırsa,

$$|f'(z)| = \left|\int_0^r f'(\zeta)d\zeta\right| \leq \int_0^r |f'(\zeta)|\,d\zeta \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (2.11)$$

bulunur.

Şimdi (2.8) in sol tarafındaki eşitsizliğin doğruluğu gösterilecektir. $0 \leq r < 1$ iken $r(1+r)^{-2} < 1/4$ olduğundan $|f(z)| \geq 1/4$ ise eşitsizlik sağlanır. $|f(z)| > 1/4$ olduğu kabul edilsin. Teorem 2.3.6 gereği, orijini $w = f(z)$ noktasına birleştiren γ_1 doğrusu $f(E)$ içinde kalır. Eğer $\gamma = f^{-1}(\gamma_1)$ ise γ_1 boyunca,

$$|w| = \int_0^{|w|} |dw| = L(\gamma_1)$$

ifadesi (2.7) nin sol tarafındaki eşitsizlik ve $|dz| = [(dr)^2 + r^2(d\theta)^2]^{1/2} \geq dr$ olduğu göz önüne alınırsa, *r* boyunca

$$|f(z)| = \int_0^{|z|} |f'(z)||dz| \geq \int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3} dr = \frac{r}{(1+r)^2} \tag{2.12}$$

olur. (2.11) ve (2.12) birleştirilirse (2.8) in sol tarafındaki eşitsizlik elde edilir. (2.8) in sağ tarafındaki eşitsizliğin doğruluğu da benzer şekilde gösterilir. Eşitlik durumu Koebe fonksiyonu ve onun bir rotasyonu durumunda geçerlidir. □

2.4.2. Teorem. Eğer $f \in S$ ve $0 \leq r < 1$ ise bu takdirde $0 \leq |z| < r$ olacak şekildeki her *z* için

$$|Argf'(z)| \leq 2In\frac{1+r}{1-r}$$

dır.

İspat. (2.9) gereği

$$\left|Im\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

$$Im\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{u_r v_{rr} - v_r u_{rr}}{{u_r}^2 + {v_r}^2} = r\frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)$$

olduğundan,

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)\right| \leq \frac{4}{1-r^2}$$

elde edilir. $|Argf'(z)| = \left|\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)dr\right|$ olduğu kullanılırsa;

$$|Argf'(z)| = \left|\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)dr\right| \leq \int_0^r \left|\frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)\right| dr \leq \int_0^r \frac{4dr}{1-r^2} = 2In\frac{1+r}{1-r}$$

elde edilir. Ancak bu sonuç kesin değildir. Kesin sonuç Goluzin (1936) tarafından elde edilmiştir. Buna göre $f \in \boldsymbol{S}$ ise

$$|Argf'(z)| \leq \begin{cases} 4Arcsinr \ , r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi + In\dfrac{r^2}{1-r^2} \ , \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

dir. □

2.5. Reel Kısmı Pozitif Olan Fonksiyonlar

2.5.1. Tanım. $z \in E$ için $Re(f(z)) > 0$ olacak şekilde E de analitik ve

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde bir açılıma sahip olan fonksiyonlara reel kısmı pozitif fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\boldsymbol{P}$ ile gösterilir.

Tanımda da belirtildiği gibi $\boldsymbol{P}$ sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Örneğin; $n \geq 0$ sayısı için $f(z) = 1 + z^n$, $\boldsymbol{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \geq 2$ için yalınkat değildir. Koebe fonksiyonunun $\boldsymbol{S}$ sınıfında oynadığı önemli rolü $\boldsymbol{P}$ sınıfında

$$L(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu oynar. Bu fonksiyon, $\boldsymbol{P}$ de olup aynı zamanda E de analitik ve yalınkattır. L fonksiyonu E yi sağ yarı düzlem içine resmeder. $L(z)$ ile $k(z)$ nin karakterinde bir fark vardır. ***S*** sınıfındaki birçok ekstremal problemde Koebe fonksiyonu tek çözümdür. Buna karşılık $L(z)$ fonksiyonu, $\boldsymbol{P}$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonunun p_n katsayılarını maksimize eder. Fakat $n \geq 2$ için $p_n = 2$ olacak şekilde $\boldsymbol{P}$ de sonsuz çoklukta fonksiyonlar da vardır. Bunların birinden diğerine herhangi bir rotasyonla geçmek mümkün değildir.

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olacak şekilde negatif olmayan iki sayı λ_1, λ_2 ve $f_1(z), f_2(z) \in \boldsymbol{P}$ olmak üzere $f(z) = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$ fonksiyonu da $\boldsymbol{P}$ dedir. Bu nedenle $\boldsymbol{P}$ sınıfı konvekstir. Buradan hareketle her k için $\lambda_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, f_k(z)$$

şeklinde sonsuz toplama geçilebilir.

Eğer $f(z) \in \boldsymbol{P}$ ise her bir $\theta \in \mathbb{R}$ için $f(e^{-i\theta} z)$ de $\boldsymbol{P}$ dedir. λ_k lar yerine $d\lambda(\theta)$ yazılarak yukarıdaki ifade Riemann Stieltjes integraline dönüştürülebilir.

2.5.2. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{P}$ ise o zaman reel değerli, azalmayan bir $\lambda(\theta)$ fonksiyonu

$$\int d\,\lambda(\theta) = 2\pi$$

olacak şekilde vardır ve her $z \in E$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} d\lambda(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\left(e^{-i\theta} z\right) d\lambda(\theta)$$

dir. Tersine $f(z)$ teoremdeki şartları sağlayacak şekilde tanımlanır ve $\lambda(\theta)$ azalmayan ise $f(z) \in \boldsymbol{P}$ dir (Goodman 1983).

2.5.3. Teorem. $f(z)$, $f_1(z), f_2(z) \in \boldsymbol{P}$ ise bu takdirde aşağıda verilen eşitliklerdeki fonksiyonlar da $\boldsymbol{P}$ dedir (Goodman 1983) .

i. $g(z) = f(e^{i\alpha}z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. $g(z) = (f(z))^t$ veya $g(z) = f(tz), -1 \leq t \leq 1$

iii. $g(z) = 1/f(z)$

iv. $g(z) = \frac{1}{a}\left[f\left(\frac{z+\gamma}{1+z\overline{\gamma}}\right) - bi\right]$, $f(\gamma) = a + bi$, $\gamma \in E$

v. $g(z) = (f_1(z))^{t_1}(f_2(z))^{t_2}$, $0 \leq t_1, t_2, t_1 + t_2 \leq 1$

vi. $g(z) = \frac{f(z)+ib}{1+ibf(z)}$, $b \in \mathbb{R}$

İspat. $\boldsymbol{P}$ nin tanımından ispat kolayca elde edilir. □

2.5.4. Caratheodory Lemma. $f(z) \in \boldsymbol{P}$ ve $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ olsun. Bu takdirde, $n = 1,2,\ldots$ için $|p_n| \leq 2$ dir. Bu eşitsizlik her bir n için kesindir (Caratheodory 1911).

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{P}$ olduğundan Teorem 2.5.2 gereği

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\lambda(\theta)$$

dir. Buradan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\theta} z^n\right) d\,\lambda(\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\,\lambda(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\lambda(\theta)\right) z^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$p_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\,\lambda(\theta)$$

dır. Böylece

$$|p_n| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\,\lambda(\theta) = 2$$

bulunur. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu için geçerlidir. □

2.6. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda ***S*** sınıfının alt sınıfları olan yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıfları tanıtılacak ve bazı temel özellikleri verilecektir.

2.6.1. Tanım. Düzlemde bir D kümesi ve bir $\omega_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Eğer ω_0 noktasını diğer her bir $\omega \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine ω_0 noktasına göre yıldızıldır, denir.

Özel olarak $\omega_0 = 0$ için D bölgesi orijine göre yıldızıldır, ya da, sadece D bölgesi yıldızıldır diye tanımlanabilir.

2.6.2. Tanım. f fonksiyonu E de yalınkat olmak üzere her $z \in E$ için $f(z)$, E bölgesini ω_0=$f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl olan bir başka bölgeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonu ω_0 noktasına göre yıldızıldır, denir.

$\omega_0 = 0$ alınırsa $f(z)$ fonksiyonu yıldızıl fonksiyon olarak adlandırılır. Yıldızıl fonksiyonların kümesi $\boldsymbol{ST}$ ile gösterilir.

Koebe fonksiyonu , $\omega_0 > -1/4$ olmak üzere ω_0 noktasına göre yıldızıl bir fonksiyondur.

2.6.3. Tanım. Γ_z : $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ şeklinde parametrelendirilmiş bir eğri ve $x(t)$ ile $y(t)$ reel değerli fonksiyon olmak üzere;

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + i\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0 \quad t \in [a, b]$$

olsun. Γ_z eğrisinin $f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki görüntüsü Γ_w ve $\omega_0 \notin \Gamma_w$ olsun. Eğer $\arg(\omega - \omega_0)$,$t \in [a, b]$ için azalmayan bir fonksiyon yani

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg(\omega - \omega_0) \geq 0\,, t \in [a, b]$$

ise Γ_w eğrisine ω_0 noktasına göre yıldızıl eğridir, denir.

2.6.4. Lemma. Γ_z: z= $z(t)$ eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüsü ω_0 noktasına göre yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right]\geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Goodman 1983).

İspat. Tanım 2.6.3 deki $\frac{\partial}{\partial t}\arg(\omega-\omega_0)\geq 0\,,t\in[a,b]$ eşitsizliği ele alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg(\omega-\omega_0)=\frac{\partial}{\partial t}[Im\ln(\omega-\omega_0)]=Im\left[\frac{\partial}{\partial t}\;In(\omega-\omega_0)\right]$$

$$=Im\left[\frac{\partial}{\partial z}[\ln(\omega-\omega_0)]\frac{\partial z}{\partial t}\right]=Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right]$$

elde edilir. Dolayısıyla $Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right]\geq 0$ olur. □

C_R : $|z|=R$ eğrisi için z= $Re^{it}\,,0\leq t\leq 2\pi$ olmak üzere $z'(t)=iRe^{it}=iz$ olup

$$Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right]=\;Im\left[\frac{izf'(z)}{f(z)-\omega_0}\right]=Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-\omega_0}\right]\geq 0 \qquad (2.13)$$

elde edilir.

Sonuç. f fonksiyonu ω_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon ise

$$\frac{zf'(z)}{f(z)-\omega_0} \in \boldsymbol{P}$$

dir.

2.6.5. Teorem. $f(z)$, $E_R : |z| \leq R$ kapalı diskinde analitik ve univalent bir fonksiyon olsun. $\mathbf{C}_R : |z| = R$ ve her $z \in \mathbf{C}_R$ için $f(z)$ nin E_R yi $\omega = 0$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmetmesi için gerek ve yeter şart

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$$

olmasıdır.

İspat. (2.13) ifadesinde $\omega_0 = 0$ alınarak istenilen sonuca ulaşılır. □

2.6.6. Teorem. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \boldsymbol{ST}$ ise her pozitif n tamsayısı için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik hali f nin Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları olması durumunda sağlanır.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ olduğundan $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \boldsymbol{P}$ dir. Bu nedenle

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, z_k \;= g(z)\,, k = 1,2,\ldots$$

biçiminde yazılabilir.

$$zf'(z) = f(z)g(z)$$

olup

$$z + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^k = \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)$$

eşitliğinden z^n teriminin katsayıları eşitlenirse;

$$na_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k}\, b_k + b_{n-1} \quad , n = 3,4,5,\ldots \tag{2.14}$$

elde edilir. $n = 2$ için $2a_2 = a_2 + b_1$ ise $a_2 = b_1$ olur. $g(z) \in \boldsymbol{P}$ olduğundan her k için $|b_k| \leq 2$ dir. Dolayısıyla $|a_2| = |b_1| \leq 2$ yazılabilir.

$|a_k| \leq k$ olsun. (2.14) eşitliğinden,

$$|(n-1)a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n-1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-2} |a_{n-k}||b_k| + |b_{n-1}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-2} 2|a_{n-k}| + 2 = 2\left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} |a_{n-k}|\right)$$

$$\leq 2\left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} (n-k)\right) = 2\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} k\right) = n(n-1)$$

$$|(n-1)a_n| \leq n(n-1)$$

olup $|a_n| \leq n$ elde edilir. □

2.6.7. Teorem. $f(z)$, (2.1) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde, $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ise $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ dir.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ olduğunu göstermek için $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \boldsymbol{P}$ olduğunu göstermek gerekir. $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ olduğundan,

$$|zf'(z) - f(z)| = \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n - z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^n = \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^n - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^n$$

$$\leq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^n \right| = |f(z)|$$

bulunur ve böylece

$$|zf'(z) - f(z)| \leq |f(z)|$$

olur. Buradan, $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq 1$ elde edilir. Böylece $Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq 0$ olup $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ dir. □

2.6.8. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ olsun. Bu takdirde,

$$\frac{r}{(r+1)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

ve

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

dir (Goodman 1983).

İspat. $\boldsymbol{ST} \subset \boldsymbol{S}$ olduğundan $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ ise $f(z)$ aynı zamanda $\boldsymbol{S}$ sınıfındadır. O halde Teorem 2.4.1. deki eşitsizlikleri kullanılarak yukarıdaki eşitsizlikler elde edilmiş olur.

Koebe fonksiyonu aynı zamanda yıldızıl olduğundan buradaki eşitsizlikler alt sınıflar için de geçerlidir. □

2.6.9. Tanım. D karmaşık düzlemde bir bölge olsun. Farklı herhangi $z, w \in D$ noktaları ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası D de kalıyorsa D ye konveks bölge denir.

$f(E)$ konveks bir bölge ise E deki analitik f fonksiyonuna konvekstir denir. $\boldsymbol{S}$ sınıfına ait konveks fonksiyonların kümesi $\boldsymbol{CV}$ ile gösterilir.

$L(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu E birim diskini sağ yarı düzleme resmettiğinden konvekstir.

Herhangi bir konveks bölge her noktasına göre yıldızıl olduğundan bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir yıldızıl fonksiyondur. Ancak tersi doğru değildir. Ayrıca, $\boldsymbol{CV} \subset \boldsymbol{ST} \subset \boldsymbol{S}$ kapsaması yazılabilir.

2.6.10. Tanım. $\Gamma_z : z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$ şeklinde parametrelendirilmiş bir eğri ve $x(t)$ ile $y(t)$ reel değerli fonksiyon olmak üzere;

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + i\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0 \;\; t \in [a,b]$$

olsun. Γ_z eğrisinin $f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki görüntüsü Γ_w ve $\omega_0 \notin \Gamma_w$ olsun. Eğer $arg(z'(t)f'(t))$, $t \in [a,b]$ için azalmayan bir fonksiyon yani

$$\frac{\partial}{\partial t}[\arg(z'(t)f'(t))] \geq 0 \, , t \in [a,b]$$

ise Γ_w eğrisine ω_0 noktasına göre konveks eğridir, denir.

2.6.11. Teorem. $f \in S$ olmak üzere f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$Re\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

olmasıdır (Goodman 1983).

İspat. **C**$_R$: $|z| = R$ eğrisi $0 \leq t \leq 2\pi$ için z= Re^{it}olmak üzere $z'(t) = iRe^{it} = iz$ ve $z''(t) = -Re^{it} = -z$ ve $\frac{\partial}{\partial t}[\arg(z'(t)f'(t))] \geq 0$ $, t \in [a, b]$ eşitsizliği göz önüne alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial t}[\arg(z'(t)f'(t))] = \frac{\partial}{\partial t}Im[In(z'(t)f'(t))] = \frac{\partial}{\partial t}Im[In\, z'(t) + In\, f'(z)]$$

$$= Im\left[\frac{\partial}{\partial t}In\, z'(t) + \frac{\partial}{\partial t}In\, f'(t)\right] = Im\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(t)}{f'(t)}\, z'(t)\right]$$

$$= Im\left[i + iz\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] = Re\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

elde edilir. □

2.6.12. Teorem(Alexander Teoremi). E_r de $f(z) \neq 0$ olmak üzere $f(z)$ nin E_r de konveks olması için gerek ve yeter şart $F(z) = zf'(z)$ fonksiyonunun E_r de yıldızıl olmasıdır (Alexander 1915).

İspat. $F(z) = zf'(z)$ için;

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

dir. $f(z)$ nin E_r de konveks olması için gerek ve yeter şart Teorem 2.6.11 gereği $Re\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} \geq 0$ dır. Böylece, Teorem 2.6.5 gereği $F(z) \in \boldsymbol{ST}$ olur. □

2.6.13. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \boldsymbol{CV}$ ise her bir pozitif n tamsayısı için $|a_n| \leq 1$ dir (Goodman 1983).

İspat. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \boldsymbol{CV}$ fonksiyonu için

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$$

olup Teorem 2.6.12 gereği $zf'(z)$ yıldızıldır. Teorem 2.6.6 gereği;

$$n|a_n| \leq n \text{ veya } |a_n| \leq 1$$

bulunur. Eşitlik, E yi $Rew > -1/2$ yarı düzlemine resmeden $w = z/(1-z)$ fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir. □

2.6.14. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \; z^n$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$ ise f fonksiyonu konvekstir (Goodman 1983).

İspat. *f* nin konveks olduğunu göstermek için $Re\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0$ ifadesine denk olan $\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir. Buradan,

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| = \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} na_n \quad z^{n-1}}\right|$$

$$\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}}$$

$$< \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|}$$

$$\leq \frac{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} = 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

2.7. α −Mertebeli Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda birim diskte yıldızıl ve konveks fonksiyonların alt sınıflarına ait genel kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.7.1. Tanım. $f: E \to \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon ve $f(0)=0, f'(0) \neq 0$ için $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq \alpha, \qquad z \in E$$

ise *f* ye α −mertebeli yıldızıl fonksiyon denir**.** Bu özelliğe sahip fonksiyonların sınıfı $\boldsymbol{ST(\alpha)}$ ile gösterilir.

2.7.2. Tanım. $f: E \to \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon ve $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ için $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \alpha, \qquad z \in E$$

ise *f* ye $\alpha -$ mertebeli konveks fonksiyon denir Bu özelliğe sahip fonksiyonların sınıfı da **CV**$(\boldsymbol{\alpha})$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{ST}(\boldsymbol{\alpha})$ ile **CV**$(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfları arasında Alexander Teoremine benzer bir ilişki mevcuttur.

2.7.3. Teorem. f nin α mertebeli konveks bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $g(z) = zf'(z)$ nin α mertebeli yıldızıl olmasıdır (Goodman 1983).

2.7.4. Teorem. $f \in$ **CV**$(\boldsymbol{\alpha})$ olsun. Bu takdirde $|z| = r < 1$ olmak üzere

i. $\alpha \in [0,1)$ ise

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

ii. $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1} - 1}{2\alpha - 1} \leq |f(z)| \leq \frac{1 - (1-\alpha)^{2\alpha-1}}{2\alpha - 1}$$

iii. $\alpha = \frac{1}{2}$ ise

$$\log(1+r) \leq |f(z)| \leq -\log(1-r)$$

dir. Tüm bu eşitsizlikler kesin olup eşitlik

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & , \alpha \neq 1/2 \\ -\log(1-z) & , \alpha = 1/2 \end{cases}$$

için sağlanır.

İspat. $Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \alpha$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan

$$g(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha\right\} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

fonksiyonu ***P*** sınıfına aittir. ***P*** deki fonksiyonlar için bilinen sonuçlar g fonksiyonuna uygulanırsa istenilen eşitsizlikler elde edilir. □

3.SALAGEAN DİFERENSİYEL OPERATÖRÜYLE TANIMLANAN ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARI

Bu bölümde 1983 yılında Salagean tarafından tanımlanan Salagean diferensiyel operatörü tanıtıldı. Bu operatör yardımıyla tanımlanan analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları ele alındı. Bu sınıflara ait katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri, ekstrem noktaları, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları gibi çeşitli özellikleri verildi.

3.1. Salagean Diferensiyel Operatörü

3.1.1. Tanım. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ biçimde verilmiş olsun. $f(z)$ için Salagean diferensiyel operatörü;

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z)$$

$$D^2 f(z) = D\big(Df(z)\big) = D\big(zf'(z)\big) = zf'(z) + z^2 f''(z)$$

$$\vdots$$

$$D^n f(z) = D\big(D^{n-1} f(z)\big)\ , n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

olmak üzere

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k\ ,\ \ n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2. $S_{m,n}(\alpha)$ ve $T_{m,n}(\alpha)$ Sınıfları ve Temel Özellikleri

Bu kısımda Salagean operatörü yardımıyla tanımlanan $\boldsymbol{S_{m,n}(\alpha)}$ ve $\boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ sınıfları yer almaktadır.

Bu bölümde verilen bilgiler (Dernek 1980, Salagean 1983, Kadioğlu 2003, Silverman 1975) adlı çalışmalardan alınmıştır.

3.2.1. Tanım. Birim diskte analitik $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu, $m > n$ olmak üzere $0 \leq \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \alpha$$

şartını sağlıyorsa $f(z) \in \boldsymbol{S_{m,n}(\alpha)}$ dır denir.

m ve n değişkenlerinin özel durumları için daha önce çalışılan sınıflara ait aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

i. $\boldsymbol{S_{1,0}(\alpha)} = \boldsymbol{S^*(\alpha)}$, α mertebeli yıldızıl fonksiyon sınıfı, (Robertson 1936),

ii. $\boldsymbol{S_{2,1}(\alpha)} = \boldsymbol{K(\alpha)}$, α mertebeli konveks fonksiyon sınıfı, (Robertson 1936),

iii. $\boldsymbol{S_{n+1,n}(\alpha)} = \boldsymbol{S_n(\alpha)}$ (Kadıoğlu 2003).

3.2.2. Tanım. $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k \in \boldsymbol{T}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{S_{m,n}(\alpha)} = \boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$$

dır.

Değişkenlerin bazı özel halleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Şöyle ki:

i. $\boldsymbol{T_{1,0}(\alpha)} = \boldsymbol{T^*(\alpha)}$, α mertebeli negatif katsayılı yıldızıl fonksiyon sınıfı, (Silverman 1975)

ii. $\boldsymbol{T_{2,1}(\alpha)} = \boldsymbol{C(\alpha)}$, α mertebeli negatif katsayılı konveks fonksiyon sınıfı, (Silverman 1975)

iii. $\boldsymbol{T_{n+1,n}(\alpha)} = \boldsymbol{T_n(\alpha)}$ (Kadıoğlu 2003).

3.2.3. Teorem. f, (2.1) ile verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - \alpha k^n)|a_k| \leq 1-\alpha \tag{3.1}$$

ise $f(z) \in \boldsymbol{S_{m,n}(\alpha)}$ dır.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{S_{m,n}(\alpha)}$ olduğunu göstermek için $\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1\right| \leq 1-\alpha$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir. O halde (3.1) kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - \alpha k^n)|a_k| = \sum_{k=2}^{\infty}(k^m - k^n + k^n - \alpha k^n)|a_k|$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}(k^m - k^n)|a_k| + (1-\alpha)\sum_{k=2}^{\infty} k^n|a_k|$$

$$\leq 1-\alpha$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1\right| = \left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - k^n)a_k z^k}{z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k}\right| \leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - k^n)|a_k||z|^k}{|z| - \sum_{k=2}^{\infty} k^n |a_k||z|^k}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - k^n)|a_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty} k^n|a_k|} \leq 1-\alpha$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

3.2.4. Teorem. $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k \in \boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - \alpha k^n)|a_k| \leq 1-\alpha \tag{3.2}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 3.2.3 de yeter şart ispat edilmiştir. Dolayısıyla gerek şartın sağlandığını göstermek yeterlidir.

O halde $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ olsun. Bu durumda

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} = Re\left\{\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty} k^m|a_k|z^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty} k^n|a_k|z^{k-1}}\right\} > \alpha$$

eşitsizliği her $z \in E$ için sağlanır. Özel olarak z, reel eksen üzerinde seçildiğinde

$$\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty} k^m|a_k|r^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty} k^n|a_k|r^{k-1}} > \alpha$$

elde edilir. Burada $r \to 1^-$olarak alınırsa

$$\frac{1-\alpha-\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - \alpha k^n)|a_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty} k^n\,|a_k|} \geq 0$$

olur. (3.2) eşitsizliği sağlanmıyor ise yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafındaki kesri negatif yapan $(0,1)$ aralığında bir $z_0 = r_0$ değeri vardır. Bu durum $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ olmasıyla çelişeceğinden ispat tamamlanır. □

3.2.5. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ olmak üzere $|z| = r < 1$ için

$$r - \frac{2^i(1-\alpha)}{2^m - \alpha 2^n} r^2 \leq \left|D^i f(z)\right| \leq r + \frac{2^i(1-\alpha)}{2^m - \alpha 2^n} r^2$$

dir.

İspat. $D^i f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} k^i |a_k| z^k$ olup

$$|D^i f(z)| = \left| z - \sum_{k=2}^{\infty} k^i |a_k| z^k \right| \leq |z| + \sum_{k=2}^{\infty} k^i |a_k| |z|^k \leq r + r^2 \sum_{k=2}^{\infty} k^i |a_k|$$

olur. (3.2) kullanıldığında,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^i |a_k| = \frac{2^{-i}(2^m - \alpha 2^n)}{2^{-i}(2^m - \alpha 2^n)} \sum_{k=2}^{\infty} k^i |a_k| \leq \frac{1}{2^{-i}(2^m - \alpha 2^n)} \sum_{k=2}^{\infty} k^{-i}(k^m - \alpha k^n) k^i |a_k|$$

$$= \frac{2^i}{(2^m - \alpha 2^n)} \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)|a_k|$$

$$\leq \frac{2^i(1-\alpha)}{(2^m - \alpha 2^n)}$$

bulunur. O halde

$$|D^i f(z)| \leq r + r^2 \frac{2^i(1-\alpha)}{(2^m - \alpha 2^n)}$$

olur. Benzer şekilde

$$|D^i f(z)| \geq r - r^2 \frac{2^i(1-\alpha)}{(2^m - \alpha 2^n)}$$

olduğu gösterilebilir. □

3.2.6. Sonuç. $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}(\alpha)}$ olmak üzere $|z| = r < 1$ için

i. $r - \frac{1-\alpha}{2^m - \alpha 2^n} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2^m - \alpha 2^n} r^2$

ii. $1 - \frac{1-\alpha}{2^{m-1} - \alpha 2^{n-1}} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{2^{m-1} - \alpha 2^{n-1}} r$

dir. Eşitlik $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^m - \alpha 2^n} z^2$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat. Teorem 3.2.5 de $i = 0$ alınarak ilk bağıntı; $i = 1$ alınarak ikinci bağıntı elde edilir. □

3.2.7. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z)$$

dir. Burada,

$$f_1(z) = z$$

$$f_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{k^m - \alpha k^n} z^k \quad (k \geq 2),$$

$\mu_k \geq 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ dır.

İspat.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \quad = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{k^m - \alpha k^n} \mu_k z^k$$

olsun. Katsayı bağıntısının sağlandığı gösterilirse teoremin yeter şartı gösterilmiş olur. O halde,

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k^m - \alpha k^n)\frac{1-\alpha}{k^m - \alpha k^n}\mu_k = \sum_{k=2}^{\infty}(1-\alpha)\mu_k = (1-\alpha)(1-\mu_1) \leq 1-\alpha$$

olduğundan $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}}(\alpha)$ dır.

Tersine, $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}}(\alpha)$ olsun. Katsayı bağıntısından

$$|a_k| \leq \frac{1-\alpha}{k^m - \alpha k^n}$$

yazılabilir.

$$\mu_k = \frac{k^m - \alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|$$

ve

$$\mu_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\mu_k$$

olarak alınırsa .f fonksiyonu, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z)$ biçimde ifade edilir. □

3.2.8. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_{m,n}}(\alpha)$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$,$k \geq 2$ için

$$\rho(\alpha, m, n) = inf\left\{\frac{k^m - \alpha k^n}{k^2(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu $|z| \leq \rho(\alpha, m, n)$ de konvekstir.

İspat. $\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1$ olduğunu gösterilmelidir. Bu şart ancak ve ancak

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2 a_k |z|^{k-1} \leq 1$$

iken geçerlidir. Bu ise

$$k^2 a_k |z|^{k-1} \leq \frac{k^m - \alpha k^n}{1-\alpha}$$

eşitsizliği sağlandığında geçerli olur. O halde

$$|z| \leq \rho(\alpha, m, n) = inf \left[\frac{k^m - \alpha k^n}{k^2(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

elde edilir. □

3.2.9. Teorem. $s > t > n,\ s - t \geq 1,\ n \in \mathbb{N}_0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\beta = \frac{2^s - \alpha 2^n - (1-\alpha)2^t}{2^s - 2^n}$$

olmak üzere $\boldsymbol{T_{s,n}(\alpha)} \subset \boldsymbol{T_{t,n}(\beta)}$ olur.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{T_{s,n}(\alpha)}$ ise $\sum_{k=2}^{\infty}(k^s - \alpha k^n)|a_k| \leq 1 - \alpha$ dır. Gösterilmek istenen $k \geq 2$ için

$$\frac{k^t - \beta k^n}{1-\beta} \leq \frac{k^s - \alpha k^n}{1-\alpha}$$

veya

$$\beta \geq \frac{(1-\alpha)k^t - k^s + \alpha k^n}{k^n - k^s}$$

dır.

$$A(k) = \frac{(1-\alpha)k^t - k^s + \alpha k^n}{k^n - k^s}$$

olduğu dikkate alınırsa $k \geq 2$ için $A(k)$ fonksiyonu azalan olup maksimum değerini $k = 2$ de alır. O halde

$$\beta \geq A(2) = \frac{(1-\alpha)2^t - 2^s + \alpha 2^n}{2^n - 2^s}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

3.3. $\boldsymbol{S_n(\lambda, \alpha)}$ ve $\boldsymbol{T_n(\lambda, \alpha)}$ Sınıfları

Bu kısımda $\boldsymbol{S_n(\lambda, \alpha)}$ ve $\boldsymbol{T_n(\lambda, \alpha)}$ sınıflarına ait fonksiyonların özellikleri verilecektir. Ayrıca değişkenlerin bazı özel halleri için elde edilen alt sınıflar incelenecektir.

Bu bölüm (Aouf ve Cho 1998, Altıntaş ve Owa 1988, Hur ve Oh 1989) çalışmalarından alınmıştır.

3.3.1. Tanım. $\boldsymbol{S_n}(\lambda, \alpha)$; (2.1) ile verilen f fonksiyonlarından oluşan ve

$$Re\left\{\frac{\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}}{\lambda\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} + (1-\lambda)}\right\} > \alpha \quad (n \in \mathbb{N}_0\,, 0 \leq \alpha < 1\,, 0 \leq \lambda < 1)$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı gösterilsin.

3.3.2. Teorem. f, (2.1) ile verilsin. Bu takdirde,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}|a_k| \leq 1 - \alpha \tag{3.3}$$

ise $f(z) \in \boldsymbol{S_n}(\lambda, \alpha)$ dır.

İspat. (3.3) bağıntısının sağlandığı kabul edilsin. O halde

$$\left| \frac{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}}{\lambda \frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} + (1-\lambda)} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n (1-\lambda)(k-1) a_k z^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k^n [1 + \lambda(k-1)] a_k z^{k-1}} \right|$$

$$\leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n (1-\lambda)(k-1) |a_k| |z|^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k^n [1 + \lambda(k-1)] |a_k| |z|^{k-1}}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n (1-\lambda)(k-1) |a_k|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k^n [1 + \lambda(k-1)] |a_k|} \leq 1 - \alpha$$

olur. Böylece

$$Re\left\{ \frac{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}}{\lambda \frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} + (1-\lambda)} \right\} > \alpha$$

olduğundan $f(z) \in \boldsymbol{S_n}(\lambda, \alpha)$ elde edilir. □

3.3.3. Tanım. $f \in \boldsymbol{T}$ olmak üzere $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfı

$$\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha) = \boldsymbol{S_n}(\lambda, \alpha) \cap \boldsymbol{T}$$

şeklinde tanımlanır.

Değişkenlerin özel halleri incelenirse, daha önce çalışılan sınıflar elde edilir:

i. $\boldsymbol{T_0}(0, \alpha) = \boldsymbol{T}^*(\alpha)$ ve $\boldsymbol{T_1}(0, \alpha) = \boldsymbol{C}(\alpha)$ (Silverman 1975)

ii. $\boldsymbol{T_n}(0,\alpha) = \boldsymbol{T}(n,\alpha) = \boldsymbol{T_n}(\alpha)$ (Hur ve Oh 1989, Kadıoğlu 2003)

iii. $\boldsymbol{T_0}(\lambda,\alpha) = \boldsymbol{T}(\lambda,\alpha)$ ve $\boldsymbol{T_1}(\lambda,\alpha) = \boldsymbol{C}(\lambda,\alpha)$ (Altıntaş ve Owa 1988)

3.3.4. Teorem. $f \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}a_k \leq 1-\alpha \tag{3.4}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}} z^k$, $k \geq 2$ için kesindir.

İspat. (3.4) bağıntısı sağlandığında fonksiyonun sınıfa ait olduğu Teorem 3.3.2 de gösterilmiştir. Dolayısıyla gerek şartın gösterilmesi yeterlidir.

O halde $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$Re\left\{\frac{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}}{\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}+(1-\lambda)}\right\} = Re\left\{\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty}k^{n+1}\,a_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}k^n\,[1+\lambda(k-1)]a_kz^{k-1}}\right\} > \alpha$$

dır. $z \to 1^-$ alınırsa,

$$1-\sum_{k=2}^{\infty}k^{n+1}\,a_k \geq \alpha\left\{1-\sum_{k=2}^{\infty}k^n\,[1+\lambda(k-1)]a_k\right\}$$

olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}a_k \leq 1-\alpha$$

elde edilir. □

3.3.5. Teorem. $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\boldsymbol{T_n}(\lambda_1, \alpha) \subseteq \boldsymbol{T_n}(\lambda_2, \alpha)$$

dır.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda_1, \alpha)$ olsun. Teorem 3.3.4 gereği

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k - \alpha[1 + \lambda_1(k-1)]\}a_k \leq 1 - \alpha$$

dır.

$$k^n\{k - \alpha[1 + \lambda_2(k-1)]\} \leq k^n\{k - \alpha[1 + \lambda_1(k-1)]\}$$

olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k - \alpha[1 + \lambda_2(k-1)]\}a_k \leq \sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k - \alpha[1 + \lambda_1(k-1)]\}a_k \leq 1 - \alpha$$

olup $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda_2, \alpha)$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

3.3.6. Teorem. $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \lambda < 1\,, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\boldsymbol{T_{n+1}}(\lambda, \alpha) \subseteq \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$$

dir.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{T_{n+1}}(\lambda, \alpha)$ olsun. Teorem 3.3.4 gereği

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{n+1}\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}a_k \leq 1 - \alpha$$

dır.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}a_k \leq \sum_{k=2}^{\infty} k^{n+1}\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}a_k \leq 1-\alpha$$

olup $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olur. □

3.3.7. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olmak üzere ve $0 \leq i \leq n$ $|z| = r < 1$ için

$$\left|D^i f(z)\right| \geq r - \frac{1-\alpha}{2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]} r^2$$

$$\left|D^i f(z)\right| \leq r + \frac{1-\alpha}{2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]} r^2$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Eşitlik hali

$$D^i f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]} z^2$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $D^i f(z) \in \boldsymbol{T_{n-i}}(\lambda,\alpha)$ dır. $D^i f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k z^k$ olmak üzere Teorem 3.3.4 gereği $D^i f(z) \in \boldsymbol{T_{n-i}}(\lambda,\alpha)$ olması için,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{n-i}\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}k^i a_k \leq 1-\alpha$$

yazılır. (3.4) kullanılarak

$$2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]\sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k \leq \sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}a_k \leq 1-\alpha$$

olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k \leq \frac{1-\alpha}{2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]}$$

elde edilir.

$$|D^i f(z)| \leq |z| + \sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k |z|^k \leq r + r^2 \sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k \leq r + \frac{1-\alpha}{2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]} r^2$$

ve

$$|D^i f(z)| \geq |z| - \sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k |z|^k \leq r - r^2 \sum_{k=2}^{\infty} k^i a_k \leq r - \frac{1-\alpha}{2^{n-i}[2-\alpha(1+\lambda)]} r^2$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

3.3.8. Sonuç. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$r - \frac{1-\alpha}{2^n[2-\alpha(1+\lambda)]} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2^n[2-\alpha(1+\lambda)]} r^2$$

ve

$$1 - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)]} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)]} r$$

dir. Eşitlik hali $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^n[2-\alpha(1+\lambda)]} z^2$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. Teorem 3.3.7 de $i = 0$ alınırsa ilk bağıntı; $i = 1$ alınırsa son bağıntı kolayca elde edilir. □

3.3.9. Teorem. Her $j = 1,2, \dots, m$ için $f_j(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,j} z^k$, $\left(a_{k,j} \geq 0\right)$ fonksiyonları $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfına ait ise $\sum_{j=1}^{m} c_j = 1$ olmak üzere $h(z) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(z)$, $(c_j \geq 0)$ biçiminde tanımlanan $h(z)$ fonksiyonları da $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfındadır.

İspat. $h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j a_{k,j}\right) z^k$ olur. Her $j = 1,2, \dots, m$ için $f_j(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ olduğundan Teorem 3.3.4 gereği

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\} a_{k,j} \leq 1 - \alpha$$

yazılabilir. O halde

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j a_{k,j}\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\} \, a_{k,j}\right)$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)(1 - \alpha) = 1 - \alpha$$

olur. Böylece $h(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ elde edilir. □

3.3.10. Sonuç. $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfı konveks lineer kombinasyon işlemi altında kapalıdır.

İspat. $j = 1,2$ için $f_j(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,j} z^k$, $\left(a_{k,j} \geq 0\right)$ fonksiyonları $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfında olmak üzere

$$h(z) = \mu f_1(z) + (1 - \mu) f_2(z) \,, \ (0 \leq \mu \leq 1)$$

biçimde tanımlanan fonksiyonun $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ ya ait olduğunu göstermek gerekir. Bunun için Teorem 3.3.9 un ispatında $m = 2$, $c_1 = \mu$ ve $c_2 = 1 - \mu$ alınırsa istenilen sonuca ulaşılır. □

3.3.11. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z)$$

dır. Burada,

$$f_1(z) = z$$

$$f_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}} z^k \; ; \; k \geq 2$$

$\mu_k \geq 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1$ $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ dır.

İspat.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \quad = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}} \mu_k z^k$$

olsun. Teorem 3.3.4 gereği,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\alpha} \frac{1-\alpha}{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}} \mu_k = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k = 1 - \mu_1 \leq 1$$

olup $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ elde edilir.

Tersine $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ olsun. O halde

$$a_k \leq \frac{(1-\alpha)\mu_k}{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}} \quad (k \geq 2)$$

olur.

$$\mu_k = \frac{k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{1-\alpha} a_k \quad (k \geq 2)$$

ve

$$\mu_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k$$

olduğundan $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k f_k(z)$ biçiminde ifade edilir. □

3.3.12. Sonuç. $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları Teorem 3.3.11 deki $f_k(z)$ fonksiyonlarıdır.

3.3.13. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$, $c > -1$ özelliğinde bir reel sayı ve

$$F(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$$

olsun. Bu takdirde, $F(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ dır.

İspat. $F(z)$ fonksiyonunun (3.4) ü sağladığını göstermek yeterlidir. O halde

$$F(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} \left(t - \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k \right) dt = z - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c+1}{c+k} \right) a_k z^k$$

için,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\} \left(\frac{c+1}{c+k} \right) a_k \leq \sum_{k=2}^{\infty} k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\} a_k \leq 1-\alpha$$

olduğundan $F(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ dır. □

3.3.14. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olsun. $0 \leq \delta < 1$ ve $k \geq 2$ için,

$$r_1(n,\lambda,\alpha,\delta) = inf\left[\frac{(1-\delta)k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{(k-\delta)(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere f fonksiyonu, $|z| < r_1(n,\lambda,\alpha,\delta)$ de δ- mertebeli yıldızıldır.

İspat. $|z| < r_1(n,\lambda,\alpha,\delta)$ için $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq 1 - \delta$ olduğunu göstermek gerekir. Bu şart ancak

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-\delta)a_k|z|^{k-1}}{1-\delta} \leq 1$$

olduğunda geçerlidir. Bu ise

$$\frac{(k-\delta)|z|^{k-1}}{1-\delta} \leq \frac{k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{1-\alpha}$$

eşitsizliği sağlandığında geçerli olur. O halde

$$|z| \leq \left[\frac{(1-\delta)k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{(k-\delta)(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

elde edilir. □

3.3.15. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ olsun. $0 \leq \delta < 1$ ve $k \geq 2$ için

$$r_2(n,\lambda,\alpha,\delta) = inf\left[\frac{(1-\delta)k^{n-1}\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{(k-\delta)(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu, $|z| < r_2(n,\lambda,\alpha,\delta)$ de δ- mertebeli konvekstir.

İspat. $|z| < r_2(n,\lambda,\alpha,\delta)$ için $\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1-\ \delta$ olduğunu göstermek gerekir. Bu şart ancak

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-\delta)a_k|z|^{k-1}}{1-\delta} \leq 1$$

olduğunda geçerlidir. Bu ise

$$\frac{k(k-\delta)|z|^{k-1}}{1-\delta} \leq \frac{k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{1-\alpha}$$

eşitsizliği sağlandığında geçerli olur. O halde

$$|z| \leq \left[\frac{(1-\delta)k^{n-1}\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}{(k-\delta)(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

elde edilir. □

3.3.16. Tanım. $f_j(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,j}z^k$, $\left(a_{k,j} \geq 0\right)$ olmak üzere $j = 1,2$ için $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ nin modifiye Hadamard çarpımı

$$f_1(z) * f_2(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k.1}a_{k,2}z^k$$

şeklinde tanımlanır (Owa 1985).

3.3.17. Teorem: $j = 1,2$ olmak üzere $f_1(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ ve $f_2(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda,\gamma)$ olsun. Bu takdirde, $(f_1 * f_2)(z)$ fonksiyonu $\boldsymbol{T_n}(\lambda,\eta(n,\lambda,\alpha,\gamma))$ sınıfındadır. Burada,

$$\eta(n,\lambda,\alpha,\gamma) = 1 - \frac{(1-\lambda)(1-\alpha)(1-\gamma)}{2^n\{2-\alpha(1+\lambda)\}\{2-\gamma(1+\gamma)\}-(1+\lambda)(1-\alpha)(1-\gamma)}$$

dır. $f_1(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^n\{2-\alpha(1+\lambda)\}} z^2$ ve $f_2(z) = z - \frac{1-\gamma}{2^n\{2-\alpha(1+\lambda)\}} z^2$ fonksiyonları bu sonucu sağlar.

İspat. f_1 ve f_2 fonksiyonunun $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \eta(n, \lambda, \alpha, \gamma))$ sınıfına ait olduğunu göstermek için,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n\{k - \eta[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\eta} a_{k,1} a_{k,2} \leq 1$$

olacak şekilde $\eta = \eta(n, \lambda, \alpha, \gamma)$ bulunmalıdır.

$f_1(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ ve $f_2(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \gamma)$ olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\alpha} a_{k,1} \leq 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n\{k - \gamma[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\gamma} a_{k,2} \leq 1$$

bağıntıları geçerlidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\frac{k^n\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\alpha}} \sqrt{\frac{k^n\{k - \gamma[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\gamma}} \sqrt{a_{k,1} a_{k,2}} \leq 1 \qquad (3.5)$$

bağıntısı elde edilir. O halde istenilen eşitsizliğin gösterilmesi için;

$$\frac{k^n\{k - \eta[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\eta} \sqrt{a_{k,1} a_{k,2}} \leq k^n \sqrt{\frac{\{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\alpha}} \sqrt{\frac{\{k - \gamma[1 + \lambda(k-1)]\}}{1-\gamma}}$$

veya

$$\sqrt{a_{k,1}a_{k,2}} \leq \frac{(1-\eta)\sqrt{\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}\sqrt{\{k-\gamma[1+\lambda(k-1)]\}}}{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1-\gamma}\{k-\eta[1+\lambda(k-1)]\}} \tag{3.6}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.5) bağıntısından

$$\sqrt{a_{k,1}a_{k,2}} \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1-\gamma}}{k^n\sqrt{\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}}\sqrt{\{k-\gamma[1+\lambda(k-1)]\}}} \tag{3.7}$$

yazılabilir. Bu durumda gösterilmek istenen (3.7) ifadesinin (3.6) dan küçük ya da eşit olduğudur. Bu ise ancak ve ancak

$$\eta \leq 1-\frac{(k-1)(1-\lambda)(1-\alpha)(1-\gamma)}{k^n\{k-\alpha(1+\lambda)\}\{k-\gamma(1+\gamma)\}-[1+\lambda(k-1)](1-\alpha)(1-\gamma)} \quad ; \quad k \geq 2$$

olduğunda gerçekleşir.

$$A(k) = 1-\frac{(k-1)(1-\lambda)(1-\alpha)(1-\gamma)}{k^n\{k-\alpha(1+\lambda)\}\{k-\gamma(1+\gamma)\}-[1+\lambda(k-1)](1-\alpha)(1-\gamma)}$$

fonksiyonu $k \geq 2$ için azalan olduğundan maksimum değerini $k=2$ noktasında alır. Bu nedenle

$$\eta \leq A(2) = 1-\frac{(1-\lambda)(1-\alpha)(1-\gamma)}{2^n\{2-\alpha(1+\lambda)\}\{2-\gamma(1+\gamma)\}-(\lambda+1)(1-\alpha)(1-\gamma)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

3.3.18. Sonuç. $f_1(z), f_2(z)$ $\boldsymbol{T_n}(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde, $(f_1 * f_2)$ fonksiyonu $\boldsymbol{T_n}(\lambda,\beta(n,\lambda,\alpha))$ sınıfına aittir. Burada,

$$\beta = \beta(n,\lambda,\alpha) = 1-\frac{(1-\lambda)(1-\alpha)^2}{2^n\{2-\alpha(1+\lambda)\}^2-(1+\lambda)(1-\alpha)^2}$$

dır.

İspat. Teorem 3.3.17 de $\alpha = \gamma$ seçilirse istenilen sonuca ulaşılır. □

3.3.19. Teorem. $f_1(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,1} z^k$ $(a_{k,1} \geq 0)$ fonksiyonu $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfında olsun. $|a_{k,2}| \leq 1$ olmak üzere $f_2(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_{k,2}| z^k$ için $(f_1 * f_2)(z)$ fonksiyonu da $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfındadır.

İspat. $(f_1 * f_2)(z)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ sınıfında olduğunu göstermek için (3.4) bağıntısının sağlandığı gösterilmelidir. $f_1 \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ ve $|a_{k,2}| \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\} a_{k,1} |a_{k,2}| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k^n \{k - \alpha[1 + \lambda(k-1)]\} a_{k,1} \\ &\leq 1 - \alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(f_1 * f_2)(z) \in \boldsymbol{T_n}(\lambda, \alpha)$ dır. □

3.4. $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ Sınıfı ve Temel Özellikleri

Burada (Eker ve Güney 2008) tarafından tanımlanan $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ sınıfının genel özellikleri ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları ve ekstrem noktaları elde edilecektir.

3.4.1. Tanım. $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ fonksiyonu E birim diskinde analitik olmak üzere Al-Oboudi diferensiyel operatörü (genelleştirilmiş Salagean diferensiyel operatörü),

$$D^0 f(z) = f(z) \tag{3.8}$$

$$D^1 f(z) = (1-\delta) f(z) + \delta z f'(z) = D_\delta f(z), \qquad \delta \geq 0 \tag{3.9}$$

$$D^n f(z) = D_\delta\big(D^{n-1} f(z)\big), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

ile tanımlanır (Al Oboudi 2004).

Diğer bir ifadeyle, (3.9) ve (3.10) bağıntıları kullanılarak

$$D_\delta{}^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty}[1 + (j-1)\delta]^n a_j z^j\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlanır.

Al Oboudi diferensiyel operatörünün tanımında $\delta = 1$ alınırsa Salagean diferensiyel operatörü elde edilir.

3.4.2. Tanım. $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$; (2.1) bağıntısıyla verilen f fonksiyonlarından oluşan ve

$$Re\left\{\frac{D_\delta{}^m f(z)}{D_\delta{}^n f(z)}\right\} > \alpha \quad (0 \le \alpha < 1, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0)$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı gösterilsin.

m ve n değişkenlerinin bazı özel halleri için aşağıdaki sınıflar elde edilir:

i. $\boldsymbol{S_{1,0,\delta}(\alpha)} = \boldsymbol{S^*(\alpha)}$ (Robertson 1936)

ii. $\boldsymbol{S_{2,1,\delta}(\alpha)} = \boldsymbol{K(\alpha)}$ (Robertson 1936)

3.4.3. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ ve $0 \le \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0,\ \delta \ge 0$ için $f(z)$ fonksiyonu

$$\sum_{j=2}^{\infty} \Psi(m,n,j,\delta,\alpha)\left|a_j\right| \le 2(1-\alpha) \tag{3.11}$$

şartını sağlıyorsa $f(z) \in \boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ dır. Burada,

$$\Psi(m,n,j,\delta,\alpha) = |[1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n|$$

$$+[1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n$$

dır.

İspat. (3.11) eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin. $0 \leq \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0,\ \delta \geq 0$ olmak üzere

$$F(z) = \frac{{D_\delta}^m f(z)}{{D_\delta}^n f(z)} - \alpha$$

tanımlansın. $f(z) \in \boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ olduğunu göstermek için her $z \in E$ için,

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right| < 1$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Buradan,

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right| = \left|\frac{\frac{{D_\delta}^m f(z)}{{D_\delta}^n f(z)} - \alpha - 1}{\frac{{D_\delta}^m f(z)}{{D_\delta}^n f(z)} - \alpha + 1}\right| = \left|\frac{{D_\delta}^m f(z) - (1+\alpha){D_\delta}^n f(z)}{{D_\delta}^m f(z) - (1-\alpha){D_\delta}^n f(z)}\right|$$

$$= \left|\frac{\alpha z - \sum_{j=2}^{\infty}([1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n)a_j z^j}{(2-\alpha)z + \sum_{j=2}^{\infty}([1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n)a_j z^j}\right|$$

$$\leq \frac{\alpha + \sum_{j=2}^{\infty}|[1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n||a_j||z|^{j-1}}{(2-\alpha) - \sum_{j=2}^{\infty}([1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n)|a_j||z|^{j-1}}$$

$$< \frac{\alpha + \sum_{j=2}^{\infty}|[1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n||a_j|}{(2-\alpha) - \sum_{j=2}^{\infty}([1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n)|a_j|}$$

elde edilir. (3.11) bağıntısı sağlandığı için son ifade

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right| < \frac{\alpha + \sum_{j=2}^{\infty}\left|[1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right|\left|a_j\right|}{(2-\alpha) - \sum_{j=2}^{\infty}\left([1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right)\left|a_j\right|} < 1$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

3.4.4. Örnek.

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2(2+\gamma)(1-\alpha)\varepsilon_j}{(j+\gamma)(j+1+\gamma)\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)} z^j$$

fonksiyonu $\gamma > -2,\ 0 \leq \alpha < 1,\ \varepsilon_j \in \mathbb{C}$ ve $|\varepsilon_j| = 1$ için $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ sınıfına aittir.

Çözüm.

$$a_j = \frac{2(2+\gamma)(1-\alpha)\varepsilon_j}{(j+\gamma)(j+1+\gamma)\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}$$

olmak üzere

$$\sum_{j=2}^{\infty} \Psi(m,n,j,\delta,\alpha)\left|a_j\right| = \sum_{j=2}^{\infty} \Psi(m,n,j,\delta,\alpha)\left|\frac{2(2+\gamma)(1-\alpha)\varepsilon_j}{(j+\gamma)(j+1+\gamma)\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}\right|$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2(2+\gamma)(1-\alpha)}{(j+\gamma)(j+1+\gamma)}$$

$$= 2(2+\gamma)(1-\alpha)\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j+\gamma} - \frac{1}{j+1+\gamma}\right)$$

$$= 2(1-\alpha)$$

olup Teorem 3.4.3 gereği $f(z) \in \boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ dır. □

3.4.5. Teorem. $f(z)$ fonksiyonu $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ sınıfına ait olsun. O halde $\beta = 2(1-\alpha)$ ve $k \geq 2$ için $v_k = [1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n$ olmak üzere;

$$|a_k| \leq \frac{\beta}{|v_k|}\left\{1 + \beta \sum_{j=2}^{k-1} \frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|} + \beta^2 \sum_{j_2>j_1}^{k-1} \sum_{j_1=2}^{k-2} \frac{([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta])^n}{|v_{j_1} v_{j_2}|}\right.$$

$$+\beta^3 \sum_{j_3>j_2}^{k-1} \sum_{j_2>j_1}^{k-2} \sum_{j_1=2}^{k-3} \frac{([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta][1+(j_3-1)\delta])^n}{|v_{j_1} v_{j_2} v_{j_3}|} + \cdots$$

$$\left. +\beta^{k-2} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|}\right\}$$

dır.

İspat.

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{D_\delta{}^m f(z)}{D_\delta{}^n f(z)} - \alpha\right) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j$$

fonksiyonu tanımlansın. $p(z)$ fonksiyonu için, Caratheodory Lemma 2.5.4 gereği, $|c_j| \leq 2$ $(j = 1,2,3,\dots)$dir. $p(z)$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{1-\alpha}(D_\delta{}^m f(z) - \alpha D_\delta{}^n f(z)) = D_\delta{}^n f(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right)$$

olur.

$$D_\delta{}^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} [1+(j-1)\delta]^n a_j z^j\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

olduğu kullanılarak

$$\frac{D_\delta{}^m f(z) - \alpha D_\delta{}^n f(z)}{1-\alpha} = z + \frac{(1+\delta)^m - \alpha(1+\delta)^n}{1-\alpha} a_2 z^2 + \cdots$$

$$+ \frac{[1+(k-1)\delta]^m - \alpha[1+(k-1)\delta]^n}{1-\alpha} a_k z^k + \cdots$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$D_\delta{}^n f(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right) = \left(z + \sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\delta]^n a_j z^j\right)(1 + c_1 z + \cdots + c_k z^k + \cdots)$$

olduğundan,

$$z + \frac{(1+\delta)^m - \alpha(1+\delta)^n}{1-\alpha} a_2 z^2 + \cdots + \frac{[1+(k-1)\delta]^m - \alpha[1+(k-1)\delta]^n}{1-\alpha} a_k z^k + ..$$

$$= \left(z + \sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\delta]^n a_j z^j\right)(1 + c_1 z + \cdots + c_k z^k + \cdots)$$

elde edilir. Buradan z^k teriminin katsayıları eşitlenirse,

$$\left(\frac{[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n}{1-\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n a_{k-j} c_j$$

olur. Böylece

$$|a_k| = \frac{1-\alpha}{|[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n|}\left|\sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n a_{k-j} c_j\right|$$

$$\leq \frac{1-\alpha}{|[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n |a_{k-j}||c_j|\right)$$

$$\leq \frac{2(1-\alpha)}{|[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n |a_{k-j}|\right)$$

bulunur. $\beta = 2(1-\alpha)$ ve $v_k = [1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n$ olduğu kullanılarak

$$|a_k| \leq \beta \frac{1}{|v_k|}\left\{1 + (1+\delta)^n \frac{\beta}{|v_2|} + (1+2\delta)^n \frac{\beta}{|v_3|} + \cdots + (1+(k-2)\delta)^n \frac{\beta}{|v_{k-1}|}\right.$$

$$+(1+\delta)^n(1+2\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_2 v_3|} + (1+\delta)^n(1+3\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_2 v_4|}$$

$$+(1+\delta)^n(1+4\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_2 v_5|} + \cdots + (1+\delta)^n(1+(k-2)\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_2 v_{k-1}|}$$

$$+(1+2\delta)^n(1+3\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_3 v_4|} + (1+2\delta)^n(1+4\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_3 v_5|} +$$

$$+(1+2\delta)^n(1+(k-2)\delta)^n \frac{\beta^2}{|v_3 v_{k-1}|} + \cdots$$

$$+(1+\delta)^n(1+2\delta)^n(1+3\delta)^n \frac{\beta^3}{|v_2 v_3 v_4|} + \cdots$$

$$+(1+\delta)^n(1+(k-2)\delta)^n(1+(k-3)\delta)^n \frac{\beta^3}{|v_2 v_{k-2} v_{k-1}|}$$

$$+\beta^{k-2}\prod_{j=2}^{k-1}\frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|}\Bigg\}$$

$$=\frac{\beta}{|v_k|}\Bigg\{1+\beta\sum_{j=2}^{k-1}\frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|}+\beta^2\sum_{j_2>j_1}^{k-1}\sum_{j_1=2}^{k-2}\frac{\big([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta]\big)^n}{\left|v_{j_1}v_{j_2}\right|}$$

$$+\beta^3\sum_{j_3>j_2}^{k-1}\sum_{j_2>j_1}^{k-2}\sum_{j_1=2}^{k-3}\frac{([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta][1+(j_3-1)\delta])^n}{\left|v_{j_1}v_{j_2}v_{j_3}\right|}+\cdots$$

$$+\beta^{k-2}\prod_{j=2}^{k-1}\frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|}\Bigg\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

3.4.6. Tanım. (3.11) eşitsizliğini sağlayan ve (2.1) formunda verilen f fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf, $\boldsymbol{S_{m,n,\delta}(\alpha)}$ nın bir alt sınıfı olup $\boldsymbol{\tilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)}$ ile gösterilir.

3.4.7. Teorem. $f(z)\in\boldsymbol{\tilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)}$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j f_j(z)$$

dir. Burada,

$$f_1(z)=z$$

$$f_j(z)=z+\frac{2(1-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}z^j;\, j\geq 2$$

$\eta_j>0$ için $\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j=1$ ve $0\leq\alpha<1,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}_0,\ \delta\geq 0$ dır.

İspat.

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j f_j(z)=z+\sum_{j=2}^{\infty}\eta_j \frac{2(1-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}z^j$$

olsun. Böylece

$$\sum_{j=2}^{\infty}\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)\frac{2(1-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}\eta_j=2(1-\alpha)\sum_{j=2}^{\infty}\eta_j$$

$$=2(1-\alpha)(1-\eta_1)$$

$$<2(1-\alpha)$$

olur. Dolayısıyla (3.11) gereği $f(z)\in\tilde{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{\alpha})$ dir.

Diğer yandan $f(z)\in\tilde{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{\alpha})$ olsun. O halde

$$a_j\leq\frac{2(1-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}\quad (j=2,3,\ldots)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\eta_j=\frac{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}{2(1-\alpha)}a_j$$

ve

$$\eta_1=1-\sum_{j=2}^{\infty}\eta_j$$

olacak şekilde alınırsa

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j f_j(z)$$

biçimde ifade edilebilir. Böylece ispat tamamlanır. □

3.4.8. Sonuç. $\tilde{S}_{m,n,\delta}(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfının ekstrem noktaları $f_1(z) = z$ ve

$$f_j(z) = z + \frac{2(1-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)} z^j \; ; j \geq 2$$

fonksiyonlarıdır.

3.5. $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ Sınıfı ve Özellikleri

Bu bölümde, (Darwish 2007)' de ele alınan ve Al Oboudi diferensiyel operatörü yardımıyla tanımlanan $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ sınıfı incelenecektir. Bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri, yıldızıl ve konvekslik yarıçapları verilecektir.

3.5.1. Tanım. $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$; $f \in \boldsymbol{T}$ fonksiyonlarından oluşan ve $\alpha, \gamma \in [0,1)$, $\lambda \geq 0, n, m \in \mathbb{N}_0$ için

$$Re\left\{\frac{\dfrac{D^{n+m}{}_{\lambda}f(z)}{D^{n}{}_{\lambda}f(z)}}{\gamma\left(\dfrac{D^{n+m}{}_{\lambda}f(z)}{D^{n}{}_{\lambda}f(z)}\right)+1-\gamma}\right\} > \alpha$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı olsun. Burada, $D^{n}{}_{\lambda}f$, Tanım 3.4.1 de verilen Al Oboudi diferensiyel operatörüdür.

Değişkenlerin bazı özel halleri için aşağıdaki sınıflar elde edilir:

i. $\boldsymbol{T(0,1,0,\alpha,1)} = \boldsymbol{T^*(\alpha)},\ \boldsymbol{T(1,1,0,\alpha,1)} = \boldsymbol{C(\alpha)}$ (Silverman 1975)

ii. $\boldsymbol{T(n,1,0,\alpha,1)} = \boldsymbol{T_n(\alpha)}$ (Hur ve Oh 1989, Kadıoğlu 2003)

iii. $\boldsymbol{T(0,1,\gamma,\alpha,1)} = \boldsymbol{T(\gamma,\alpha)},\ \boldsymbol{T(1,1,\gamma,\alpha,1)} = \boldsymbol{C(\gamma,\alpha)}$ (Altıntaş ve Owa 1988)

iv. $\boldsymbol{T(n,1,\gamma,\alpha,1)} = \boldsymbol{T_n(\gamma,\alpha)}$ (Aouf ve Cho 1998)

3.5.2. Teorem. $f \in \boldsymbol{T}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}\,a_k \leq 1-\alpha \tag{3.12}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. (3.12) nin sağlandığı kabul edilsin. $f \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ olduğunu göstermek için

$$\left|\frac{\dfrac{{D_\lambda}^{n+m}f(z)}{{D_\lambda}^{n}f(z)}}{\gamma\dfrac{{D_\lambda}^{n+m}f(z)}{{D_\lambda}^{n}f(z)}+1-\gamma}-1\right| \leq 1-\alpha$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Buradan,

$$\left|\frac{(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}a_k z^k-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k z^k}{z-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}\,a_k z^k-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k z^k}\right|$$

$$\leq\frac{(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}a_k|z|^{k-1}-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k|z|^{k-1}}{1-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}\,a_k|z|^{k-1}-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k|z|^{k-1}}$$

$$\leq\frac{(1-\gamma)\{\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}a_k-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k\}}{1-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}\,a_k-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k}$$

elde edilir. (3.12) gereği,

$$\left|\frac{\dfrac{{D_\lambda}^{n+m}f(z)}{{D_\lambda}^{n}f(z)}}{\gamma\dfrac{{D_\lambda}^{n+m}f(z)}{{D_\lambda}^{n}f(z)}+1-\gamma}-1\right|\leq 1-\alpha$$

bulunur.

Diğer taraftan $f(z)\in\ \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ olsun. Bu durumda Tanım 3.5.1 gereği

$$Re\left\{\frac{z-\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}a_k z^k}{z-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}\,a_k z^k-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k z^k}\right\}>\alpha$$

elde edilir. $z\to 1^-$ alınırsa,

$$\left\{\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}a_k}{1-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n+m}\,a_k-(1-\gamma)\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}a_k}\right\}>\alpha$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}\{[1+(k-1)\lambda]^{m}(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}\,a_k \leq 1-\alpha$$

istenilen katsayı bağıntısı elde edilmiş olur. □

3.5.3. Teorem. $0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < 1,\ \lambda \geq 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\boldsymbol{T(n,m,\gamma_1,\alpha,\lambda) \subset T(n,m,\gamma_2,\alpha,\lambda)}$$

dir.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma_1,\alpha,\lambda)}$ olsun. $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < 1$ eşitsizliği ve Teorem 3.5.2 dikkate alınırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}\{[1+(k-1)\lambda]^{m}(1-\alpha\gamma_2)-\alpha(1-\gamma_2)\}\,a_k$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^{n}\{[1+(k-1)\lambda]^{m}(1-\alpha\gamma_1)-\alpha(1-\gamma_1)\}\,a_k$$

$$\leq 1-\alpha$$

olup $f(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma_2,\alpha,\lambda)}$ elde edilir. □

3.5.4. Sonuç. $0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \gamma < 1,\ \lambda \geq 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

i. $\boldsymbol{T(n+1, m, \gamma, \alpha, \lambda) \subset T(n, m, \gamma, \alpha, \lambda)}$

ii. $\boldsymbol{T(n, m+1, \gamma, \alpha, \lambda) \subset T(n, m, \gamma, \alpha, \lambda)}$

iii. $\boldsymbol{T(n+1, m+1, \gamma, \alpha, \lambda) \subset T(n, m, \gamma, \alpha, \lambda)}$

3.5.5. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T}$ fonksiyonu $\boldsymbol{T(n, m, \gamma, \alpha, \lambda)}$ sınıfına ait olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için,

$$\left|D^i f(z)\right| \leq r + \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma) - \alpha(1-\gamma)]} r^2$$

ve

$$\left|D^i f(z)\right| \geq r - \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma) - \alpha(1-\gamma)]} r^2$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $D^i f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^i a_k z^k$ olmak üzere

$$|D^i f(z)| = \left|z - \sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^i a_k z^k\right| \leq r + r^2 \sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^i a_k$$

dir. Ayrıca (3.12) gereği,

$$\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^i a_k = \frac{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^i a_k$$

$$= \frac{\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^i[1+(k-1)\lambda]^{n-i}\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}a_k}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}$$

$$< \frac{\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}a_k}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}$$

$$\leq \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}$$

olur. Böylece

$$|D^i f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}r^2$$

olur. Benzer şekilde,

$$|D^i f(z)| \geq r - \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^{n-i}[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}r^2$$

eşitsizliği de elde edilir. □

3.5.6. Sonuç. $f(z) \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$|f(z)| \geq r - \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^n[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}r^2$$

$$|f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^n[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}r^2$$

ve

$$|f'(z)| \geq 1 - \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^n[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}r$$

$$|f'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{(1+\lambda)^n[(1+\lambda)^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)]}r$$

dır.

İspat. Teorem 3.5.5 te $i = 0$ alınarak $|f(z)|$ için alt ve üst sınırlar; $i = 1$ alınarak $|f'(z)|$ için alt ve üst sınırlar elde edilir. □

3.5.7.Teorem. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ sınıfı konvekstir.

İspat. Her $\nu = 1,2$ için,

$$f_\nu(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{\nu,k} z^k \quad (a_{\nu,k} \geq 0)$$

fonksiyonları $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ sınıfına ait olsun. Gösterilmek istenen $0 \le t \le 1$ için

$$h(z) = tf_1(z) + (1-t)f_2(z)$$

fonksiyonunun $\boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ sınıfında olduğudur. Buradan

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}[ta_{1,k} + (1-t)a_{2,k}]z^k$$

dır ve $\nu = 1,2$ için $f_\nu(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ olduğundan (3.12) gereği,

$$\sum_{k=2}^{\infty}[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma) - \alpha(1-\gamma)\}\,[ta_{1,k} + (1-t)a_{2,k}]$$

$$\le 1-\alpha$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır. □

3.5.8. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z)$$

dır. Burada,

$$f_1(z) = z$$

$$f_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}} z^k, k \geq 2$$

$\mu_k \geq 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1$ ve $0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \gamma < 1,\ \lambda \geq 0, m, n \in \mathbb{N}_0$ dır.

İspat.

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}} \mu_k z^k$$

olsun. Buradan,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}\,(1-\alpha)\mu_k}{(1-\alpha)[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}} = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k \leq 1$$

olduğundan, (3.12) gereği $f(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ dır.

Tersine $f(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ olsun. Bu durumda (3.12) gereği,

$$|a_k| \leq \frac{1-\alpha}{[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}}$$

yazılabilir.

$$\mu_k = \frac{[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}}{1-\alpha}a_k$$

olacak şekilde seçilirse $\mu_1 = 1-\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k$ olduğundan $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z)$ olarak yazılabilir. □

3.5.9. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{T(n,m,\gamma,\alpha,\lambda)}$ olsun. $0 \le \rho < 1$ ve $k \ge 2$ için,

$$r = inf\left\{\frac{(1-\rho)[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}}{(k-\rho)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere, f fonksiyonu $|z| < r$ de ρ mertebeli yıldızıldır.

İspat. $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \le 1-\rho$ olduğu gösterilmelidir. Bu durumda

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \le \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k|z|^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k|z|^{k-1}}$$

olup bu eşitsizliğin geçerli olması için

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-\rho)a_k|z|^{k-1}}{(1-\rho)} \le 1$$

olması gerekir. Bu ise ancak ve ancak

$$\frac{(k-\rho)a_k|z|^{k-1}}{(1-\rho)} \leq \frac{[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}}{1-\alpha}$$

olduğunda geçerli olup, buradan

$$|z| \leq \left\{\frac{(1-\rho)[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}}{(k-\rho)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}}$$

elde edilir. □

3.5.10. Sonuç. $f(z) \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ olsun. $0 \leq \rho < 1$ ve $k \geq 2$ için,

$$\eta = inf\left\{\frac{(1-\rho)[1+(k-1)\lambda]^n\{[1+(k-1)\lambda]^m(1-\alpha\gamma)-\alpha(1-\gamma)\}}{k(k-\rho)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere, f fonksiyonu $|z| < \eta$ de ρ mertebeli konvekstir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. 1996. Complex analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Tokyo, 317 pp.

Alexander, J. W. 1915. Functions which map the interior of unit circle upon simple regions. *Ann. Of Math.*, 17: 12-22.

Al-Oboudi, F. M. 2004. On univalent functions defined by a generalized Salagean operatör. *Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* 27: 1429-1436.

Altintas, O., Owa, S. 1988. On subclasses of univalent functions with negative coefficients. *Pusan Kyougnam Math. J.* 4: 41-56.

Aouf, M. K., Cho, N. E. 1998. On a certain subclass of analytic functions with negative coefficients. *Tr. J. Of Mathematics,* 22: 15-32.

Başkan, T. 1996. Kompleks fonksiyonlar teorisi. Uludağ Üniversitesi basımevi, No:17, Bursa, 359 s.

Bieberbach, L. 1916. Über die koeffizienten derjengien potenzreihen. *Welcheeine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteh, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math. Kl.* 940-955.

Caratheodory, C. 1911. Über den variabilitatsbereich der fourier'schen konstanten von positiven harmonischen funktionen. *Rend. Circ. Math. Palermo*, 32: 193-217.

Darwish, H. E. 2007. Certain subclasses of analytic functions with negative coefficients defined by generalized salagean operator. *General Mathematics Vol,* 15: 69-82.

Dernek, A. 1980. Univalent functions with negative coefficients. *AMS*, 30C 45.

Duren, P. N. 1983. Univalent functions. Springer-Verlag, New York, 384 pp.

Eker, S. S., Güney, H. Ö. 2008. A new subclass of analytic functions involving Al-Oboudi diferential operator. *Journal of Inequalities and Applications,*10 pp.

Goluzin, G. M. 1936. On distortion theorems in the theory of conformal mappings. *Mat. Sb.*43: 127-135.

Golızin, G. M. 1969. Geometric theory of functions of a complex variable. Amer. Math. Soc., 676 pp.

Goodman, A. W. 1983. Univalent functions I and II. Mariner Publishing Company, Inc, 557 pp.

Graham, I., Varolin, D. 1996. Bloch constants in one and several variables, Pacif. J. Math., 174, 347-357 pp.

Graham, I., Kohr, G. 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc., New York, 526 pp.

Gronwall, T. H. E. 1914. Some remarks on conformal representation. *Ann. of Math*. 16: 72–76.

Hayman, W. K. 1994. Multivalent functions. Cambridge University Press, pp: 230-248.

Hur, M.D., Oh, G.H. 1989 On certain class of analytic functions with negative coefficients. *Pusan Kyongnam Math. J*, 5: 69-80.

Kadıoğlu, E. 2003. On subclass of univalent functions with negative coefficients. *Applied Mathematics and Computation,* 146: 351-358.

Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebeger analytischer kurven. *Nach. Ges. Wiss. Gottingen,* 191-210.

Nehari, Z. 1952. Conformal mapping. Mc Graw-Hill, New York, 396 pp.

Owa, S. 1985. On a certain classes of p valent functions with negative coefficients. *Simon Stevin,* 59: 385-402.

Owa, S., Obradovic, S.,Lee, K. 1986. Notes on a certain subclass of analytic functions introduced by Salagean. *Bull. Korean Math. Soc.,* 23: 133-140.

Palka, B. P. 1991. An introduction to complex function theory. Springer- Verlag, New York, 560 pp.

Pommerenke, C. 1975. Univalent functions. Vandenhoesk-Ruprecht, Göttingen,376 pp.

Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis,* University of Göttingen, Germany.

Robertson, M. S. 1936. On the theory of univalent functions. *Ann. Of Math.* 37: 374-408.

Salagean, G. S. 1983. Subclasses of univalent functions. *Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag),* 1013: 362-372.

Schober, G. 1975. Univalent functions-selected topics. Springer-Verlag,Berlin, 200 pp.

Silverman, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1): 109-116.

Silverman, H., Ponnusamy, S. 2006. Complex variables with applications. Birkhauser, USA, 520 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Yeliz KARA
Doğum Yeri ve Tarihi	: İzmir, 08.11.1988
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)

Lise	: Çeşme Süleyman Sami Sarı Anadolu Lisesi,2006
Lisans	: Uludağ Üniversitesi,2010

Çalıştığı Kurum ve Yılı	: Uludağ Üniversitesi 2011-…
İletişim (e-posta)	: yelizkara@uludag.edu.tr