IE^n DEKİ WİNTGEN İDEAL YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

ERTUĞRUL AKÇAY

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

IE^n DEKİ WİNTGEN İDEAL YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Ertuğrul AKÇAY

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2013

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Ertuğrul AKÇAY tarafından hazırlanan "IE^n deki Wintgen İdeal Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSAN TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Üye: Prof. Dr. Kadri ARSLAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ İmza
Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Ertuğrul AKÇAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

IE^n DEKİ WİNTGEN IDEAL YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Ertuğrul AKÇAY

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmada E^4 deki yüzeylerin 1. ve 2. temel form katsayıları yardımıyla bazı sınıflandırmaları verilmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde E^3 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği ile ilgili eşitlikler incelenmiştir. Dördüncü bölümde E^4 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeyleri Gauss eğriliği K, ortalama eğriliği H ve normal eğriliği K_N ile ilgili eşitlikler incelenmiştir. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda K ve H ile ilgili eşitlikler, ikinci kısımda K ve K_N ile ilgili eşitlikler, üçüncü kısımda ise K, K_N ve H ile ilgili eşitlikler incelenmiştir. Son bölümde ise Chen yüzeylerinin süperkonformal oldukları ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Normal eğrilik, Süper konformal yüzey, Wintgen ideal yüzey
2013, V + 39 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF WINTGEN IDEAL SURFACES IN IE^n

Ertuğrul AKÇAY

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

In this thesis, a characterizations of surfaces in E^4 with the help of coefficients of the first and second fundamental form are given. This thesis consist of five chapters. First chapter is introduction. In the second chapter it is given some basic definitions and theorems which will be use in the other chapters. In the third chapter Euler equation of a surfaces in E^3 are considered. In the fourth chapter surfaces in the 4-dimensional Euclidean space E^4 are considered. Some curvature equations of K, K_N ve H are obtained. In the final chapter Chen surfaces in the 4-dimensional Euclidean space E^4 are considered. It has been proved that every Chen surfaces are Wintgen ideal surface of E^4.

Key words: Gaussian curvature, Mean curvature, Normal curvature, Superconformal surface, Wintgen Ideal surface.
2013, V + 39 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca sağlam bir bilgi birikimine sahip olmamı sağlayan, yüksek lisans eğitimin süresince matematiksel ufkumu genişlemesine ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi desteğiyle yanımda olduğunu hep gösteren hocam Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Bu alanda her anlamda doğru, kendinden emin ve bilgili olmamda en büyük pay saygıdeğer hocama aittir. Ayrıca bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, her zaman fikirlerine başvurduğum Araştırma görevlisi Betül Bulca'ya teşekkür ederim. Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama ayrıca teşekkür ederim.

Ertuğrul AKÇAY
.. / .. / ….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
E^n	n-boyutlu Öklit uzayı
γ	Eğri
κ_i	Frenet eğrilikleri
$\\| \, , \\|$	Norm
S^3	3-küre
X	Regüler yama
M	Yüzey
C^∞	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^\perp(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
$C^\infty(M,R)$	M den R ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
∇	M üzerinde indirgenmiş Riemann koneksiyonu
$\widetilde{\nabla}$	$\widetilde{M}$ üzerinde Riemann koneksiyon
$\nabla^\perp$	Normal koneksiyon
$\overline{\nabla}$	Van-der Waerden –Bortolotti koneksiyonu
$[\, ,]$	Lie parantez operatörü
$\langle \, , \rangle$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
A_ξ	Şekil operatörü
T_pM	p noktasında teğet uzay
$T_p^\perp M$	p noktasında normal uzay
$\vec{H}$	Ortalama eğrilik vektörü
$\\|H\\|$	Ortalama eğrilik
c_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
Γ_{ij}^k	M nin Christoffel sembolleri
h_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
N_i	Normal vektörleri
K	Gauss eğriliği
K_N	Normal eğrilik
R	M nin eğrilik tensörü
$\widetilde{R}$	$\widetilde{M}$ nin eğrilik tensörü
$R^\perp$	NM üzerindeki eğrilik tensörü

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı E^4 deki bazı yüzeylerin 1. ve 2. temel form katsayıları yardımıyla bazı sınıflandırmalarını vermektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlardan oluşmaktadır. İkinci kısımda E^4 deki yüzeylerin ikinci temel formu, ortalama eğrilik fonksiyonu, Gauss ve normal eğrilikleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı temel özelikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde E^3 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeyleri Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği $\vec{H}$ ile ilgili eşitlikler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde E^4 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeyleri Gauss eğriliği K, ortalama eğriliği $\vec{H}$ ve normal eğriliği K_N ile ilgili eşitlikler incelenmiştir. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda K ve $\left\|\vec{H}\right\|$ ile ilgili eşitlikler, ikinci kısımda K ve K_N ile ilgili eşitlikler, üçüncü kısımda ise K, K_N ve $\left\|\vec{H}\right\|$ ile ilgili eşitlikler incelenmiştir.

Son bölümde ise Chen yüzeylerinin süperkonformal oldukları ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. E^n de regüler bir yama ile verilen yüzeylerin ikinci temel formları, Gauss, ortalama ve normal eğrilikleri ile ilgili temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.2. E^n de Yüzeyler

M yüzeyi $X : U \subset E^2 \to E^n$ yaması ile verilsin. M nin $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.2.1}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

olup $\langle \, , \rangle$ bir Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.2.3}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u,v)$ yaması *regüler*dir denir.

Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $X(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.2.4}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. E^n de Riemann koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi^{\perp}(M)\ \ ;h(X,Y)=\widetilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y, \tag{2.2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.5) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.2.2: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $\forall X\in\chi(M)$ ve $\xi\in\chi^{\perp}(M)$ için M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A:\chi^{\perp}(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M);\ A_{\xi}X=-\widetilde{\nabla}_X\xi+\nabla^{\perp}_X\xi \tag{2.2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_{\xi}X$, ξ ya karşılık gelen şekil operatörü ve $\nabla^{\perp}$ ise $\chi^{\perp}(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi $X,Y\in T_p(M)$ için

$$\left\langle A_{\xi}X,Y\right\rangle=\left\langle h(X,Y),\xi\right\rangle \tag{2.2.7}$$

dir. Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.6) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Ayrıca $\forall X,Y,Z\in T_p(M)$ için M yüzeyinin ikinci temel formu h nın kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z)=\nabla^{\perp}_X h(Y,Z)-h(\nabla_X Y,Z)-h(Y,\nabla_X Z)$$

dir. Böylece *Codazzi denklemi*

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z)=(\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{2.2.8}$$

dir (Chen 1973).

Tanım 2.2.3: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u,v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu},X_{uv},X_{vv} ve normal vektör alanları $N_1,N_2,\ldots,N_{n-2}$ olmak üzere M nin *ikinci temel form katsayıları*

$$\begin{aligned} c^k_{11}&=\left\langle X_{uu},N_k\right\rangle,\\ c^k_{12}&=\left\langle X_{uv},N_k\right\rangle,\quad 1\le k\le n-2\\ c^k_{22}&=\left\langle X_{vv},N_k\right\rangle \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

Tanım 2.2.4: M yüzeyi $X:U\subset R^2\rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu durumda M nin *Christoffel sembolleri* Γ^k_{ij} ($1\le i,j,k\le 2$)

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)} \quad \Gamma_{11}^{2}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}$$
$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)} \quad \Gamma_{12}^{2}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)} \tag{2.2.10}$$
$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)} \quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma_{21}^{1}=\Gamma_{12}^{1}$ ve $\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}$ dir (Gray 1993).

Önerme 2.2.5: *M* yüzeyi $X:U\subset R^2\to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde $\forall X_u,X_v\in T_p(M)$ ve $\{N_1,N_2,...,N_{n-2}\}\in T_p^{\perp}(M)$ için

$$X_{uu}=\widetilde{\nabla}_{X_u}X_u=\Gamma_{11}^{1}X_u+\Gamma_{11}^{2}X_v+c_{11}^{1}N_1+c_{11}^{2}N_2+...+c_{11}^{n-2}N_{n-2}$$
$$X_{uv}=\widetilde{\nabla}_{X_u}X_v=\Gamma_{12}^{1}X_u+\Gamma_{12}^{2}X_v+c_{12}^{1}N_1+c_{12}^{2}N_2+...+c_{12}^{n-2}N_{n-2} \tag{2.2.11}$$
$$X_{vv}=\widetilde{\nabla}_{X_v}X_v=\Gamma_{22}^{1}X_u+\Gamma_{22}^{2}X_v+c_{22}^{1}N_1+c_{22}^{2}N_2+...+c_{22}^{n-2}N_{n-2}$$

dir (Gray 1993).

Böylece (2.2.11), (2.2.5) ve (2.2.6) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.2.6: *M* yüzeyi $X:U\subset R^2\to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$h(X_u,X_u)=c_{11}^{1}N_1+c_{11}^{2}N_2+...+c_{11}^{n-2}N_{n-2}$$
$$h(X_u,X_v)=c_{12}^{1}N_1+c_{12}^{2}N_2+...+c_{12}^{n-2}N_{n-2} \tag{2.2.12}$$
$$h(X_v,X_v)=c_{22}^{1}N_1+c_{22}^{2}N_2+...+c_{22}^{n-2}N_{n-2}$$

dir.

Sonuç 2.2.7: *M* yüzeyi $X:D\subset R^2\to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$h(X_u,X_u)=X_{uu}-\Gamma_{11}^{1}X_u-\Gamma_{11}^{2}X_v$$
$$h(X_u,X_v)=X_{uv}-\Gamma_{12}^{1}X_u-\Gamma_{12}^{2}X_v \tag{2.2.13}$$
$$h(X_v,X_v)=X_{vv}-\Gamma_{22}^{1}X_u-\Gamma_{22}^{2}X_v$$

dir.

Tanım 2.2.8: $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M\subset E^n$ yüzeyinin *Gauss eğriliği*

$$K=\frac{1}{W^2}\sum_{i=1}^{n-2}(c_{11}^i c_{22}^i-(c_{12}^i)^2) \tag{2.2.14}$$

dir (Mello 2009).

Tanım 2.2.9: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1,X_2\}\in T_p(M)$ ve $\{N_1,N_2,...,N_{n-2}\}\in T_p^{\perp}(M)$ ortonormal bazları için M nin *ortalama eğrilik vektörü*

$$\overrightarrow{H}=\sum_{i=1}^{n-2}H_i N_i \tag{2.2.15}$$

dir. Burada

$$H_i=\frac{1}{2W^2}\sum_{i=1}^{n-2}\left(Gc_{11}^i-2Fc_{12}^i+Ec_{22}^i\right) \tag{2.2.16}$$

M nin *i.nci ortalama eğriliği*dir. Bununla birlikte M nin *ortalama eğriliği* $H=\left\|\overrightarrow{H}\right\|$ dir (Mello 2003).

Önerme 2.2.10: M yüzeyi $X:U\subset R^2\to E^n$ regüler yaması ile verilsin. Böylece X_1,X_2 vektörleri $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere

$$\begin{aligned}X_1&=\frac{X_u}{\|X_u\|},\\ X_2&=\frac{\sqrt{E}}{W}\left(X_v-\langle X_v,X_u\rangle\frac{X_u}{\|X_u\|^2}\right),\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

dir. Burada $W=\sqrt{EG-F^2}$ olarak daha önce tanımlanmıştır (Bulca 2012).

Önerme 2.2.11: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_1,X_2\}$ ortonormal bazı için

$$h(X_1,X_1)=\frac{1}{E}h(X_u,X_u)$$
$$h(X_1,X_2)=\frac{1}{W}h(X_u,X_v)-\frac{F}{WE}h(X_u,X_u) \qquad (2.2.18)$$
$$h(X_2,X_2)=\frac{E}{W^2}h(X_v,X_v)-\frac{2F}{W^2}h(X_u,X_v)+\frac{F^2}{W^2E}h(X_u,X_u)$$

dir (Bulca 2012).

Tanım 2.2.12: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_1,X_2\}$ olmak üzere M nin *ikinci temel form katsayıları*

$$h_{ij}^k=\langle h(X_i,X_j),N_k\rangle, \qquad (2.2.19)$$

ile tanımlanır (Chen 1973).

Önerme 2.2.13: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1,X_2\}\in T_p(M)$ ve $\{N_1,N_2,\ldots,N_{n-2}\}\in T_p^{\perp}(M)$ ortonormal bazları olmak üzere A_{N_α} şekil operatörü matrisi

$$A_{N_\alpha}=\begin{pmatrix} h_{11}^\alpha & h_{12}^\alpha \\ h_{21}^\alpha & h_{22}^\alpha \end{pmatrix},(1\le\alpha\le n-2) \qquad (2.2.20)$$

biçimindedir. Burada h_{ij}^α ler ikinci temel form katsayıları olup

$$h_{11}^\alpha=\langle h(X_1,X_1),N_\alpha\rangle=\frac{c_{11}^\alpha}{E},$$
$$h_{12}^\alpha=\langle h(X_1,X_2),N_\alpha\rangle=\frac{1}{W}\left(c_{12}^\alpha-\frac{F}{E}c_{11}^\alpha\right), \qquad (2.2.21)$$
$$h_{22}^\alpha=\langle h(X_2,X_2),N_\alpha\rangle=\frac{1}{W^2}\left(Ec_{22}^\alpha-2Fc_{12}^\alpha+\frac{F^2}{E}c_{11}^\alpha\right)$$

dir.

İspat. (Bulca 2012).

Önerme 2.2.14: $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M\subset E^n$ yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K=\det\left(A_{N_1}+A_{N_2}+\ldots+A_{N_{n-2}}\right) \qquad (2.2.22)$$

dir.

Önerme 2.2.15: $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M\subset E^n$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H}=\frac{1}{2}\left\{İz\left(A_{N_1}\right)N_1+İz\left(A_{N_2}\right)N_2+\ldots+İz\left(A_{N_{n-2}}\right)N_{n-2}\right\} \tag{2.2.23}$$

dir.

Tanım 2.2.16: $M\subset E^n$ yüzeyi ile normal demeti $T^{\perp}(M)$ nin *eğrilik tensörleri* sırasıyla

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.2.24}$$

ve

$$R^{\perp}(X,Y)\xi=h(X,A_\xi Y)-h(Y,A_\xi X),\ \xi\in\chi^{\perp}(M) \tag{2.2.25}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her $X,Y,Z,W\in\chi(M)$ ve $\xi,\eta\in\chi^{\perp}(M)$ için $M\subset E^n$ yüzeyinin *Gauss* ve *Ricci* denklemleri sırasıyla

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle-\langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle, \tag{2.2.26}$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle=\langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle \tag{2.2.27}$$

dir (Chen 1973).

Burada $[\,,]$ *Lie parantez operatörü*

$$\begin{aligned}[\,,]:\chi(M)\times\chi(M)&\rightarrow\chi(M)\\ (X,Y)&\mapsto[X,Y]=XY-YX=\nabla_X Y-\nabla_Y X\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $R^{\perp}=0$ ise M yüzeyi *düz (flat) normal koneksiyonludur* denir.

Tanım 2.2.17: $M\subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ ve $T_p^{\perp}(M)$ uzaylarının $\{X_1,X_2\}$ ve $\{N_\alpha\},1\leq\alpha\leq n-2$ ortonormal bazları için *M* nin *normal eğriliği*

$$K_N=\left\{\sum_{1=\alpha<\beta}^{n-2}\left\langle R^{\perp}(X_1,X_2)N_\alpha,N_\beta\right\rangle^2\right\}^{1/2} \tag{2.2.28}$$

şeklinde tanımlanır (DeSmet ve ark. 1999).

Açıklama 2.2.18: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ ve $T_p^{\perp}(M)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları için M nin *normal eğriliği*

$$K_N = \left\langle R^{\perp}(X_1, X_2)N_2, N_1 \right\rangle \tag{2.2.29}$$

şeklinde tanımlanır (Guadalupe ve Rodriguez 1983).

Önerme 2.2.19: $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğriliği

$$K_N = h_{12}^1\left(h_{11}^2 - h_{22}^2\right) + h_{12}^2\left(h_{22}^1 - h_{11}^1\right) \tag{2.2.30}$$

dir .

İspat. (Bulca 2012).

Sonuç 2.2.20: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $K_N = 0$ olması için gerek ve yeter şart $R^{\perp} = 0$ olmasıdır.

Önerme 2.2.21: $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{E(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1) - F(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{11}^2 c_{22}^1) + G(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1)}{W^3} \tag{2.2.31}$$

dir.

İspat. (Bulca 2012).

Sonuç 2.2.22: $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{2} \left(c_{1i}^1 c_{2j}^2 - c_{2i}^1 c_{1j}^2\right) g^{ij} \tag{2.2.32}$$

dır. Burada

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \; g^{ij} = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}, g = \det(g_{ij}) = W^2$$

dır (Aminov 2001).

Açıklama 2.2.23: Normal eğrilik fonksiyonu K_N aynı zamanda *Gauss torsiyonu* olarak da bilinir. (Detaylı bilgi için bkz. Aminov 2001) $K_N(p)=0$ olması için gerek ve yeter şart $p \in M$ noktasının yarı-umbilik olmasıdır. Her $p \in M$ noktası yarı-umbilik olan yüzey *yarı-umbilik yüzey* denir (Gutierrez-Nunez ve ark. 2008).

Tanım 2.2.24: $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin Gauss, normal ve ortalama eğrilikleri

$$\|H\|^2 - K - |K_N| = 0 \tag{2.2.33}$$

eşitliğini sağlar ise *M* ye *Wintgen ideal yüzey* adı verilir (Wintgen 1979).

Tanım 2.2.25: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde için

$$\left\langle h(X,Y),\vec{H} \right\rangle = \lambda^2 \left\langle X,Y \right\rangle \; \lambda = \left\|\vec{H}\right\| \tag{2.2.34}$$

şartı sağlanırsa *M* ye *pseudo-umbilik yüzey* denir (Chen 1972).

Tanım 2.2.26: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde *M* nin N_α ya göre şekil operatörü matrisi A_{N_α} birim matrisin bir katı yani $A_{N_\alpha} = \lambda I$ oluyor ise *M* ye total umbilik yüzey adı verilir.

3. E^3 DEKİ YÜZEYLERİN EULER EŞİTLİĞİ

3.0. Giriş

Bu bölümde E^3 de verilen yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili eşitlikler ele alınacaktır.

3.1. E^3 de Verilen Yüzeylerin K ve $\left\|\vec{H}\right\|$ ile İlgili Eşitlikler

$M \subset E^3$ yüzeyi *X(u,v)* yaması ile verilsin. Bu takdirde *M* ye ait asli eğrilikler k_1 ve k_2 olmak üzere *M* nin *Gauss ve ortalama eğrilikleri* sırasıyla

$$K = k_1 k_2 \tag{3.1.1}$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{3.1.2}$$

dir. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri yardımıyla

$$K \leq \left\|\vec{H}\right\|^2 \tag{3.1.3}$$

Euler eşitsizliği elde edilir (O'Neill 1997). Ayrıca eşitlik durumunda

$$K = \left\|\vec{H}\right\|^2 \tag{3.1.4}$$

Euler eşitliği olarak bilinir.

Sabit Gauss ve ortalama eğrilikler ile ilgili sınıflandırma H. Liebmann, tarafından 1900 tarihinde aşağıdaki şekilde verilmiştir;

Teorem 3.1.1:

1) $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $K > 0$ ve Gauss eğrilikli sabit olsun. Bu takdirde *M* yüzeyi $S^2(\frac{1}{\sqrt{K}})$ küresidir.

2) $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $K > 0$ ve H sabit olsun. Bu takdirde *M* yüzeyi $S^2(\frac{1}{|H|})$ küresidir (Liebmann 1900).

Önerme 3.1.2: $M \subset E^3$ yüzeyi *X(u,v)* yamasıyla verilsin. Bu takdirde M yüzeyinin $K = \left\|\vec{H}\right\|^2$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart M yüzeyinin total umbilik olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$**:** M yüzeyi $\forall p \in M$ noktasında $K = \left\|\vec{H}\right\|^2$ eşitliğini sağlasın. Böylece (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri yardımıyla

$$k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 = (k_1 - k_2)^2 = 0 \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Buradan $k_1 = k_2$ olduğu görülür. Böylece $M \subset E^3$ yüzeyi total umbiliktir.

$(\Leftarrow)$**:** İspat aşikardır. □

Önerme 3.1.3: $M \subset E^3$ yüzeyi

$$X(u,v) = (g(u), h(u)\cos(v), h(u)\sin(v)) \tag{3.1.6}$$

yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. Bu taktirde $K = \left\|\vec{H}\right\|^2$ olması için gerek ve yeter şart *M* nin lokal olarak S^2 küresinin bir parçası olmasıdır.

İspat. *X(u,v)* regüler yamasının kısmi türevleri ;

$$\begin{aligned}
X_u &= (g'(u), h'(u)\cos(v), h'(u)\sin(v)) \\
X_v &= (0, -h(u)\sin(v), h(u)\cos(v)) \\
X_{uu} &= (g''(u), h''(u)\cos(v), h''(u)\sin(v)) \\
X_{uv} &= (0, -h'(u)\sin(v), h'(u)\cos(v)) \\
X_{vv} &= (0, -h(u)\cos(v), -h(u)\sin(v))
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece *M* nin birim normal vektörü

$$\vec{N} = \frac{X_u \times X_v}{\left\|X_u \times X_v\right\|} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}}(h'(u), -g'(u)\cos(v), -g'(u)\sin(v))$$

dır. Ayrıca *M* nin 1'inci ve 2'nci temel form katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = g'(u)^2 + h'(u)^2 \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = h(u)^2 \\
e &= \langle X_{uu}, \vec{N} \rangle = (g''(u)h'(u) - g'(u)h''(u))\frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \\
f &= \langle X_{uv}, \vec{N} \rangle = 0 \\
g &= \langle X_{vv} \vec{N} \rangle = \frac{g'(u)h(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $F = f = 0$ olduğundan M dönel yüzeyi için

$$A_N(X_u) = \frac{e}{E} X_u$$
$$A_N(X_v) = \frac{g}{G} X_v \qquad (3.1.7)$$

dır. Buradan M nin asli eğrilikleri

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{g''(u)h'(u) - g'(u)h''(u)}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}}$$

$$k_2 = \frac{g}{G} = \frac{g'(u)}{h(u)(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{1/2}}$$

elde edilir (O'Neill 1997). Ayrıca $k_1 = k_2$ olduğundan

$$g'(u)h'(u)^2 + g'(u)^3 + h(u)g'(u)h''(u) - h(u)h'(u)g''(u) = 0 \qquad (3.1.8)$$

bulunur. Farzedelimki $\alpha(u) = (g(u), h(u))$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde $g'(u)^2 + h'(u)^2 = 1$ dir. Bu iki denklemin ortak çözümünden

$$g(u) = \cos(u),\, h(u) = \sin(u) \quad ya\ da \quad g(u) = \sin(u),\, h(u) = \cos(u)$$

elde edilir. Bu da bize dönel yüzeyin lokal olarak bir küre olduğunu gösterir. □

Tanım 3.1.4: $M \subset E^3$ yüzeyi $X(u,v): D \subset R^2 \to E^3$ regüler yaması ile verilsin. $\vec{N} = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ yüzeyin normali olmak üzere

$$X_c(u,v) = X(u,v) + c\overrightarrow{N}(u,v)\,,\ c \in R \qquad (3.1.9)$$

yaması ile tanımlanan yüzeye M nin *paralel yüzeyi* denir. Bu çalışmada M nin paralel yüzeyini M_c ile gösterilecektir (Görgülü 1989, Gray 1993).

Teorem 3.1.5: $M \subset E^3$ regüler yüzeyinin paralel yüzeyi M_c olsun. M nin şekil operatörü A ve k_1, k_2, ile k_1^*, k_2^* sırasıyla M ve M_c nin asli eğrilikleri olmak üzere $\det(I - cA) > 0$ ise

$$k_i^* = \frac{k_i}{1 - ck_i} \qquad i = 1, 2$$

dir (Gray 1993).

Teorem 3.1.6: M_c yüzeyi M nin (3.1.9) eşitliği ile tanımlanan paralel yüzeyi olsun. K, H ve K^*, H^* sırasıyla M ve M_c yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri olmak üzere

$$K^* = \frac{\kappa}{1 - \frac{c}{2}H + c^2\kappa} \tag{3.1.10}$$

$$H^* = \frac{H - c\kappa}{1 - \frac{c}{2}H + c^2\kappa} \tag{3.1.11}$$

dır (Carmo 1983).

Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.6 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.7: M_c yüzeyi M nin paralel yüzeyi olsun. K, H ve K^*, H^* sırasıyla M ve M_c yüzeylerinin *Gauss ve ortalama eğrilikleri* olmak üzere

$$K^*(H - cK) - KH^* = 0 \tag{3.1.12}$$

dir (Özdemir 2008).

Örnek 3.1.8: (Helikoid ve paralel yüzeyi) M yüzeyi,

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv); \quad \forall u, v \in R$$

yaması ile verilen helikoid yüzeyi olmak üzere M nin paralel yüzeyi

$$Y(u,v) = X(u,v) + c\,\vec{N}(u,v)$$

yaması ile verilir. Burada

$$\vec{N}(u,v) = \frac{1}{1+u^2}(\sin v, \cos v, u)$$

dir. Böylece M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırası ile

$$K = -\frac{b^2}{\left(b^2+u^2\right)^2}, \; H = 0$$

dir. (3.1.10) ve (3.1.11) eşitlikleri yardımıyla

$$K^* = \frac{-b^2}{\left(b^2+u^2\right)^2 - c^2b^2}, \quad H^* = \frac{cb^2}{\left(b^2+u^2\right)^2 - c^2b^2}$$

dir (Özdemir 2008).

Örnek 3.1.9: (Küre ve paralel yüzeyi) M yüzeyi,

$$X(u,v) = (r\cos u\cos v, r\cos u\sin v, r\sin u); \quad \forall u,v \in R$$

regüler yaması ile verilen küre yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{N}(u,v) = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

dır. Böylece M ve M_c nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{1}{r^2}, \quad H = \frac{1}{r}$$

$$K^* = \frac{1}{(r-c)^2}, \quad H^* = \frac{r+c}{(r-c)^2}$$

dir (Özdemir 2008).

Örnek 3.1.10: (Ketanoid ve paralel yüzeyi)

$$X(u,v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u); \quad \forall u,v \in R$$

yaması ile verilen Ketanoid yüzeyi M ise paralel yüzeyi M_c

$$Y(u,v) = (\rho(u)\cos v, \rho(u)\sin v, \psi(u))$$

parametrelendirilmesine sahiptir. Burada

$$\rho(u) = \cosh u - \frac{c}{\cosh u},$$

ve

$$\psi(u) = u + c\tanh u$$

dır (Malkowsky ve ark. 2001). Ayrıca $\forall u \in R$ ve $c < 1$ için $\cosh^2 u > c$ dır. Bununla beraber M ve M_c nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = -\frac{1}{\cosh^2 u}, \quad H = 0$$

ve

$$K^* = -\frac{1}{\cosh^4 u - c^2}, \quad H^* = \frac{c}{\cosh^4 u - c^2}$$

dır. Böylece son eşitliklerden (3.1.12) denkleminin sağlandığı görülür (Özdemir 2008).

Sonuç 3.1.11: $M \subset E^3$ yüzeyi (3.1.6) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. Bu takdirde

i) $K = H = 0$ ise *M* bir düzlemin bir parçasıdır.

ii) $H \neq 0$, $K \neq 0$ ve $H + \lambda K = 0$ ise *M* yüzeyi kürenin bir parçasıdır.

Sonuç 3.1.12: M_c yüzeyi *M* dönel yüzeyinin bir paralel yüzeyi olsun. Eğer *M* yüzeyi flat olmayan bir minimal yüzey (yani, ketonoid yüzeyi) ise M_c yüzeyinin eğrilikleri oranı sabittir, yani;

$$c = -\frac{H^*}{K^*} \tag{3.1.13}$$

dır.

İspat. Eğer *M* minimal ise $H = 0$ dır. Böylece (3.1.12) denklemi yardımıyla $K(cK^* + H^*) = 0$ elde edilir. *M* yüzeyi flat olmadığından $cK^* + H^* = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

4. E^4 DE WİNTGEN İDEAL YÜZEYLER

4.0. Giriş

Bu bölümde E^4 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerin Gauss eğriliği K, ortalama eğriliği H ve normal eğriliği K_N ile ilgili eşitlikler incelenmiştir. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda K ve $\|\vec{H}\|$ ile ilgili eşitlikler, ikinci kısımda K ve K_N ile ilgili eşitlikler, üçüncü kısımda ise K, K_N ve $\|\vec{H}\|$ ile ilgili eşitlikler incelenmiştir.

4.1 K ve $\|\vec{H}\|$ ile İlgili Eşitlikler

$M \subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yamasıyla verilsin. $\forall p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayı $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı ve $T_p^{\perp}M$ normal uzayı ise $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazı ile gerilsin. Bu takdirde M nin şekil operatörü matrisleri Önerme (2.1.20) yardımıyla

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} h_{11}^{\ 1} & h_{12}^{\ 1} \\ h_{21}^{\ 1} & h_{22}^{\ 1} \end{pmatrix} \qquad A_{N_2} = \begin{pmatrix} h_{11}^{\ 2} & h_{12}^{\ 2} \\ h_{21}^{\ 2} & h_{22}^{\ 2} \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $h_{ij}^{\ k}$, M nin ikinci temel form katsayıları olup

$$h_{ij}^{\ k} = \langle h(X_i, X_j), N_k \rangle = \langle A_{N_k} X_i, X_j \rangle, \ 1 \le i, j \le 2 \tag{4.1.2}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan M nin *Gauss eğriliği*

$$\begin{aligned} K &= \det A_{N_1} + \det A_{N_2} \\ &= h_{11}^{\ 1} h_{22}^{\ 1} - (h_{12}^{\ 1})^2 + h_{11}^{\ 2} h_{22}^{\ 2} - (h_{12}^{\ 2})^2 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

dir. Ayrıca M nin *Ortalama eğrilik* vektörü

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2} iz A_{N_1} N_1 + iz A_{N_2} N_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (h_{11}^{\ 1} + h_{22}^{\ 1}) N_1 + (h_{11}^{\ 2} + h_{22}^{\ 2}) N_2 \right\} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

dir.

Yardımcı Teorem 4.1.1: $M \subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yaması ile verilsin. M yüzeyinin $K = \|\vec{H}\|^2$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şart

$$h_{11}^{\ 1} = h_{22}^{\ 1},\ h_{11}^{\ 2} = h_{22}^{\ 2},\ h_{12}^{\ 1} = h_{12}^{\ 2} = 0 \tag{4.1.5}$$

olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $M \subset E^4$ yüzeyi $K = \left\|\vec{H}\right\|^2$ eşitliğini sağlasın. Bu takdirde (4.1.3) ve (4.1.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 4\left\|\vec{H}\right\|^2 &= (h_{11}^{\ 1} + h_{22}^{\ 1})^2 + (h_{11}^{\ 2} + h_{22}^{\ 2})^2 \\ K &= h_{11}^{\ 1} h_{22}^{\ 1} - (h_{12}^{\ 1})^2 + h_{11}^{\ 2} h_{22}^{\ 2} - (h_{12}^{\ 2})^2 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. Böylece (4.1.6) eşitliği düzenlenirse

$$4(\left\|\vec{H}\right\|^2 - K) = (h_{11}^{\ 1} - h_{22}^{\ 1})^2 + (h_{11}^{\ 2} - h_{22}^{\ 2})^2 + 4(h_{12}^{\ 1})^2 + 4(h_{12}^{\ 2})^2 \tag{4.1.7}$$

bulunur. Ayrıca $\left\|\vec{H}\right\|^2 - K = 0$ şartı sağlandığında (4.1.7) yardımıyla (4.1.5) eşitliği elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır. □

Teorem 4.1.2: $M \subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yaması ile verilsin. *M* yüzeyinin $K = \left\|\vec{H}\right\|^2$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart *M* nin total umbilik olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $M \subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} A_{N_\alpha}(X_k) &= \left\langle A_{N_\alpha}(X_k), X_1 \right\rangle X_1 + \left\langle A_{N_\alpha}(X_k), X_2 \right\rangle X_2 \\ &= \left\langle h(X_k, X_1), N_\alpha \right\rangle X_1 + \left\langle h(X_k, X_2), N_\alpha \right\rangle X_2 \\ &= h_{1k}^{\alpha} X_1 + h_{2k}^{\alpha} X_2\ ;\ 1 \le \alpha \le 2. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

dır. Ayrıca $K = \left\|\vec{H}\right\|^2$ eşitliği sağlandığından (4.1.5) ve (4.1.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A_{N_1}(X_1) &= h_{11}^{\ 1} X_1 \\ A_{N_1}(X_2) &= h_{11}^{\ 1} X_2 \\ A_{N_2}(X_1) &= h_{11}^{\ 2} X_1 \\ A_{N_2}(X_2) &= h_{11}^{\ 2} X_2 \end{aligned}$$

dır. Buradan $A_{N_\alpha} = \lambda_\alpha I$ olduğu görülür. Böylece tanım gereği *M* yüzeyi total umbiliktir.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır. □

Örnek 4.1.3: (E^4 deki $S^2(a)$ standart küresi)

$$X(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), a\sin(u)\sin(v), a\cos(u), 0) \qquad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi \tag{4.1.9}$$

yamasıyla verilsin. Böylece birim teğet ve normal vektörleri

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X_1} &= (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u), 0) \\
\overrightarrow{X_2} &= (\sin(v), \cos(v), 0, 0) \\
\overrightarrow{N_1} &= (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u), 0) \\
\overrightarrow{N_2} &= (0,0,0,1)
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olmak üzere

$$h_{11}^{\ 1} = h_{22}^{\ 1} = -\frac{1}{a}$$
$$h_{11}^{\ 2} = h_{22}^{\ 2} = 0$$
$$h_{12}^{\ 1} = h_{12}^{\ 2} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$K = \left\|\overrightarrow{H}\right\|^2 = \frac{1}{a^2} \tag{4.1.11}$$

dir (Bures 1975).

Tanım 4.1.4: (G-M rotasyon yüzeyi**)** Birim hızlı uzay eğrisi $\alpha(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ ve $\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ birim çember olmak üzere α ve β eğrilerinin küresel çarpımı

$$X(u,v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u)\cos v, x_3(u)\sin v), \quad x_3 > 0 \tag{4.1.12}$$

yüzey yaması ile ifade edilir. Burada $u \in R,\ 0 \le v \le 2\pi$ ve α, birim hızlı yani $((x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2) = 1)$ dır (Ganchev ve Milousheva 2008b). (4.1.12) yamasıyla verilen yüzeyler *Ganchev ve Milousheva rotasyon yüzeyleri* olarak adlandırılır. Burada $\alpha(u)$ eğrisi yüzeyin döngü eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğrini Oe_1e_2 düzlemine izdüşümü $\widetilde{\alpha}(u) = (x_1(u), x_2(u))$ ve $\alpha(u)$ ile $\widetilde{\alpha}(u)$ nun eğriliklerini sırasıyla

$$k = \sqrt{(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + (x_3'')^2}$$
$$\widetilde{\kappa} = x_1'x_2'' - x_2'x_1''$$

biçimindedir.

Önerme 4.1.5: $M \subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* yamasıyla verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. M yüzeyinin $K = \left\|\overrightarrow{H}\right\|^2$ şartını için gerek ve yeter şart

$$\widetilde{\kappa} = 0, K = \kappa^2$$

olmasıdır.

İspat. *X(u,v)* regüler yamasının kısmi türevleri;

$$
\begin{aligned}
X_u &= (x_1', x_2', x_3' \cos v, x_3' \sin v) \\
X_v &= (0,0,-x_3 \sin v, x_3 \cos v) \\
X_{uu} &= (x_1'', x_2'', x_3'' \cos v, x_3'' \sin v) \\
X_{uv} &= (0,0,-x_3' \sin v, x_3' \cos v) \\
X_{vv} &= (0,0,-x_3 \cos v, -x_3 \sin v)
\end{aligned}
$$

dir. *X(u,v)* nin birinci form katsayıları;

$$
\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = (x_3)^2
\end{aligned}
$$

dir. Bu yüzeyin normalleri

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{k}(x_1'', x_2'', x_3'' \cos v, x_3'' \sin v) \\
N_2 &= \frac{1}{k}(x_2' x_3'' - x_2'' x_3', x_3' x_1'' - x_3'' x_1', (x_1' x_2'' - x_1'' x_2') \cos v, (x_1' x_2'' - x_1'' x_2') \sin v)
\end{aligned}
$$

dir. Burada

$$
k = \sqrt{(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + (x_3'')^2}
$$

türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece *X(u,v)* nin ikinci temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
c_{11}{}^1 &= \langle X_{uu}, N_1 \rangle = k \\
c_{12}{}^1 &= \langle X_{uv}, N_1 \rangle = 0 \\
c_{22}{}^1 &= \langle X_{vv}, N_1 \rangle = -\frac{x_3 x_3''}{k} \\
c_{11}{}^2 &= \langle X_{uu}, N_2 \rangle = 0 \\
c_{12}{}^2 &= \langle X_{uv}, N_2 \rangle = 0 \\
c_{22}{}^2 &= \langle X_{vv}, N_2 \rangle = -\frac{x_3 (x_1' x_2'' - x_1'' x_2')}{k}
\end{aligned}
$$

dır. Ayrıca (2.2.21) eşitliğinden

$$h_{11}^{1}=\frac{c_{11}^{1}}{E}=\frac{k}{(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2}$$

$$h_{12}^{1}=\frac{1}{w}c_{12}^{1}=0$$

$$h_{22}^{1}=-\frac{x_3''}{kx_3}$$

$$h_{11}^{2}=\frac{c_{11}^{2}}{E}=0 \tag{4.1.13}$$

$$h_{12}^{2}=0$$

$$h_{22}^{2}=\frac{1}{w^2}(Ec_{22}^{2})=-\frac{x_1'x_2''-x_1''x_2'}{kx_3}$$

elde edilir (Bulca 2012). Burada $W^2=EG-F^2$ dir.

$(\Rightarrow)$: M yüzeyi $K=\left\|\vec{H}\right\|^2$ şartını sağlasın. Bu taktirde (4.1.5) ve (4.1.13) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır. □

Örnek 4.1.6: $\alpha(u)=(0,x_2(u),x_3(u))$ birim hızlı uzay eğrisi ile $\beta(v)=(\cos v,\sin v)$ çemberinin çarpımını

$X(u,v)=\alpha(u)\otimes\beta(v)=(0,x_2(u),x_3(u)\cos v,x_3(u)\sin v),\quad x_3>0$

küresel çarpım yüzeyi olarak bilinir. Burada $u\in R,\ 0\le v\le 2\pi$ ve α birim hızlı bir eğri olup

$$\tilde{\kappa}=0$$

$$k^2=-\frac{x_3''}{x_3}=K$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 4.1.7: $M\subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yamasıyla verilsin. Bu takdirde *M* yüzeyi total umbilik ise *M* nin ortalama eğriliği sabittir (Chen 1973 sayfa 50).

İspat. $\{N_\alpha\},\ (1\le\alpha\le n-2)$ $T^{\perp}M$ nin ortonormal bazı olsun. Bu takdirde herhangi $X,Y\in\chi(M)$ için

$$\left\langle A_{N_\alpha} X, Y \right\rangle = \left\langle h(X,Y), N_\alpha \right\rangle \tag{4.1.14}$$

dir. M yüzeyi total umbilik olsun. Bu takdirde bazı reel değerli λ_α fonksiyonları için

$$A_{N_\alpha} = \lambda_\alpha I \tag{4.1.15}$$

dir. Böylece (4.1.14) ve (4.1.15) den

$$\left\langle h(X,Y), N_\alpha \right\rangle = \lambda_\alpha \left\langle X, Y \right\rangle \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Buradan

$$izA_{N_\alpha} = 2\lambda_\alpha \tag{4.1.17}$$

$$h(X,Y) = \sum_{\alpha=1}^{n-2} \lambda_\alpha \left\langle X, Y \right\rangle N_\alpha \tag{4.1.18}$$

yardımı ile

$$h(X,Y) = \left\langle X, Y \right\rangle \vec{H} \tag{4.1.19}$$

dır. E^n nin eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ sıfır olduğundan

$$\left\langle \widetilde{R}(X,Y)Z, W \right\rangle = \left\langle R(X,Y)Z, W \right\rangle + \left\langle h(X,Z), h(Y,W) \right\rangle - \left\langle h(X,W), h(Y,Z) \right\rangle \tag{4.1.20}$$

yardımıyla

$$\left\langle R(X,Y)Z, W \right\rangle = \left\langle h(X,W), h(Y,Z) \right\rangle - \left\langle h(X,Z), h(Y,W) \right\rangle \tag{4.1.21}$$

elde edilir. Buradan (4.1.19) ve (4.1.21) eşitliklerinden

$$\left\langle R(X,Y)Z, W \right\rangle = \left\| \vec{H} \right\|^2 (\left\langle X, W \right\rangle \left\langle Y, Z \right\rangle - \left\langle X, Z \right\rangle \left\langle Y, W \right\rangle)$$

bulunur. Böylece *Codazzi* denklemlerinden $\left\| \vec{H} \right\|^2 = c \quad c \in R$ dir. □

Tanım 4.1.8: $M \subset E^n$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yaması ile verilsin. $\xi \in \chi^{\perp} M$ birim normal vektör alanı olmak üzere

$$S(\xi) = \left\langle X, \xi \right\rangle \tag{4.1.22}$$

çarpımına M nin ξ ya göre *destek fonksiyonu* denir (Chen 1793 sayfa 59-60).

Önerme 4.1.9: $M \subset E^n$ yüzeyinin birim vektör alanı ξ dejenere olmayan ve normal demet içinde paralel ayrıca M nin ξ ya göre destek fonksiyonu $S(\xi)$ sabit ise M yüzeyi E^n nin küçük küresinde yatan bir yüzeydir (Chen 1973).

İspat. $M \subset E^n$ yüzeyinin birim vektör alanı ξ nın asli vektörleri $E_1,..., E_n$ ve de asli eğrilikleri $k_1,..., k_n$ olsun. Eğer ξ vektör alanı non-dejenere ve normal demet içinde paralel ve M nin ξ ya göre destek fonksiyonu $S(\xi)$ sabit olsun. Bu takdirde

$$A_\xi E_i = k_i E_i \tag{4.1.23}$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_{E_i} \xi = -A_\xi E_i$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} E_i\langle X,\xi\rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_{E_i} X,\xi\rangle + \langle X,\widetilde{\nabla}_{E_i}\xi\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i} X,\xi\rangle + \langle h(E_i,X),\xi\rangle - \langle A_\xi E_i, X\rangle + \langle X,\nabla_{E_i}{}^{\perp}\xi\rangle \\ &= \langle h(E_i,X),\xi\rangle - \langle A_\xi E_i, X\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{\nabla}_{E_i} X$ normal bileşene sahip değildir. Böylece

$$\begin{gathered} \langle X,E_1\rangle = 0,..., \quad \langle X,E_n\rangle = 0 \\ \widetilde{\nabla}_{E_i}\langle X,X\rangle = 2\langle \widetilde{\nabla}_{E_i} X,X\rangle = 0 \end{gathered}$$

elde edilir. Son eşitlikten M yüzeyi E^n nin küçük küresinde yatan bir yüzey olduğu sonucuna varılır. □

Önerme 4.1.10: $M \subset E^n$ yüzeyi *X(u,v)* yaması ile verilen total umbilik yüzey olsun. Bu takdirde M yüzeyi lokal olarak düzlemin bir parçası ya da $M = S^2 \subset E^3 \subset E^n$ dir.

İspat. (B.Y Chen 1973 sayfa 50). □

4.2 E^4 de K ve K_N ile İlgili Eşitlikler

Yardımcı Teorem 4.2.1: $M \subset E^4$ yüzeyi *X(u,v)* regüler yaması ile verilsin. M yüzeyinin $K = K_N$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şart

$$(h_{12}^{\ 1} + h_{22}^{\ 2})(h_{11}^{\ 2} - h_{22}^{\ 1}) - (h_{12}^{\ 2} - h_{22}^{\ 1})(h_{11}^{\ 1} + h_{12}^{\ 2}) = 0 \tag{4.2.1}$$

olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $M \subset E^4$ yüzeyi $K = K_N$ eşitliğini sağlasın. Bu takdirde M nin *Gauss ve normal eğrilikleri* sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= h_{11}^{\ 1} h_{22}^{\ 1} - (h_{12}^{\ 1})^2 + h_{11}^{\ 2} h_{22}^{\ 2} - (h_{12}^{\ 2})^2 \\ K_N &= h_{12}^{\ 1}(h_{22}^{\ 2} - h_{11}^{\ 2}) + h_{12}^{\ 2}(h_{11}^{\ 1} - h_{22}^{\ 1}) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dir. Böylece (4.2.2) eşitliği düzenlenirse

$$h_{11}^{\ 1} h_{22}^{\ 1} - (h_{12}^{\ 1})^2 + h_{11}^{\ 2} h_{22}^{\ 2} - (h_{12}^{\ 2})^2 - h_{12}^{\ 1}(h_{22}^{\ 2} - h_{11}^{\ 2}) - h_{12}^{\ 2}(h_{11}^{\ 1} - h_{22}^{\ 1}) = 0$$

bulunur. Böylece son eşitlik yeniden düzenlenirse (4.2.1) elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır. □

Örnek 4.2.2: (Tor Yüzeyi) $M \subset E^4$ yüzeyi

$$X(u,v) = (a_1 \cos u, a_1 \sin u, a_2 \cos v, a_2 \sin v) \ ; a_i \in R \tag{4.2.3}$$

regüler yamasıyla verilsin. Tor yüzeyi için $K = K_N = 0$ olmak üzere (4.2.1) eşitliği sağlanır.

Önerme 4.2.3: (4.1.12) regüler yaması ile verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin $K = K_N$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart x_3=au+b olmasıdır. Yani M yüzeyinin düz olmasıdır.

İspat. (4.1.13) deki değerler (4.2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa x_3''=0 elde edilir. □

Örnek 4.2.4: $M \subset E^4$ yüzeyi

$$X(u,v) = (\alpha(v)\cos u, \beta(v)\cos u, \alpha(v)\sin u, \beta(v)\sin u) \tag{4.2.4}$$

regüler yamasıyla verilsin. Bu yüzey *Tensör Çarpım yüzeyi* olarak bilinip $c_1(u) = (\cos u, \sin u), c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ dir (Mihai ve ark 1995). Bu yüzey için

$$K = K_N = \frac{b(v)\big(c(v) - b(v)\big)}{(\alpha')^2 + (\beta')^2} \tag{4.2.5}$$

dir. Burada

$$b(v) = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$
$$c(v) = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, \tag{4.2.6}$$

reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır (Bulca 2012 sayfa 42).

Örnek 4.2.6: $M \subset E^4$ yüzeyi

$$X(u,v) = (r(v)\cos v\cos u, r(v)\cos v\sin u, r(v)\sin v\cos u, r(v)\sin v\sin u) \tag{4.2.7}$$

regüler yamasıyla verilen yüzey *Vranceanu yüzeyi* olarak bilinir (Vranceanu 1977). Bu yüzey için

$$K = K_N = \frac{(r'(u))^2 - r(u)r''(u)}{((r(u))^2 + (r'(u))^2)^2} \tag{4.2.8}$$

dir.

Çözüm: (Bulca, 2012 sayfa 29).

Örnek 4.2.7: (Aminov Yüzeyi) $M \subset E^4$ yüzeyi

$$X(u,v) = (a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, b\sin v\cos u, b\sin v\sin u) \tag{4.2.9}$$

yamasıyla verilen yüzeye *Aminov yüzeyi* denir.

Bu yüzey için

$$K = K_N = \frac{-16b^2(b^2 - a^2)\cos 2v}{(4a^2b^2 + (b^2 - a^2)^2\sin^2 2v)^2} \tag{4.1.10}$$

dir.

Çözüm: (Bulca, 2012 sayfa 25).

4.3 E^4 de K, K_N ve $\left\|\vec{H}\right\|$ ile İlgili Eşitlikler

4.3.1. E^4 de Süperkonformal Yüzeyler

$M \subset E^4$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_p(M)$ teğet uzayında $\theta \in [0,2\pi]$ parametrizasyonu ile verilen bir çember alınsın. Ayrıca X_1, X_2 vektörleri $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere

$$\vec{t} = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$$

doğrultu vektörü seçilsin. Böylece $T_p^{\perp}(M)$ normal düzlem ile $\vec{t}$ doğrultu vektörünün oluşturduğu doğru L_p nin direk toplamı $p \in M$ noktasındaki hiperdüzlem oluşturur. Bu hiperdüzlem $E(p,\vec{t})$ ile gösterilirse

$$E(p,\vec{t}) = T_p^{\perp}M \oplus L_p$$

dir. Böylece $E(p,\vec{t})$ ile M nin arakesiti bir eğri oluşturur. Bu eğri γ_θ ile gösterilir ve M nin p noktasında ve $\vec{t}$ yönünde *normal kesit eğrisi* denir. Ayrıca γ_θ nın normal eğrilik vektörü $T_p^{\perp}(M)$ de yatan bir n_θ vektörü olup

$$\eta_\theta = \overrightarrow{\gamma''_\theta}(s)^{\perp} \in T_p^{\perp}M \tag{4.3.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. M yüzeyi regüler $X(u,v)$ yaması ile verilsin. Bu taktirde γ_θ eğrisi M nin üzerinde olduğundan

$$\gamma_\theta(s) = X(u(s),v(s))$$
$$\gamma'_\theta(s) = u'(s)X_u + v'(s)X_v$$
$$\gamma''_\theta(s) = u'(s)^2 X_{uu} + u''(s)X_u + v'(s)^2 X_{vv} + v''(s)X_v + 2u'(s)v'(s)X_{uv}$$

dir. Böylece normal bileşen;

$$\gamma''_\theta(s)^{\perp} = u'(s)^2 X_{uu} + v'(s)^2 X_{vv} + 2u'(s)v'(s)X_{uv}$$

biçiminde M yüzeyinin normal eğrilik vektörünü verir. Eğer $\gamma(s(0))$ noktasında $\gamma'_\theta(s) = \vec{t}$ alınırsa, yani normal kesit eğrisi birim hızlı ise $\vec{t} = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ olduğundan s(0) noktasında

$$u'(s(0)) = \cos\theta$$
$$v'(s(o)) = \sin\theta$$

dır. Böylece;

$$\begin{aligned}\gamma_\theta''(s(0))^{\perp} &= \cos^2\theta X_{uu}{}^{\perp} + \sin^2\theta X_{vv}{}^{\perp} + 2\sin\theta\cos\theta X_{uv}{}^{\perp} \\ &= \frac{1}{2}(Xuu^{\perp}(p) + X_{vv}{}^{\perp}(p)) + \frac{1}{2}(X_{uu}{}^{\perp}(p) - X_{vv}{}^{\perp}(p))\cos 2\theta + X_{uv}{}^{\perp}(p)\sin 2\theta \\ &= \vec{H} + \vec{B}\cos 2\theta + \vec{C}\sin 2\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\gamma(s(0)) = p$ böylece olup

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(X_{uu}{}^{\perp}(p) + X_{vv}{}^{\perp}(p))$$
$$\vec{B} = \frac{1}{2}(X_{uu}{}^{\perp}(p) - X_{vv}{}^{\perp}(p))$$
$$\vec{C} = X_{uv}{}^{\perp}(p)$$

yardımıyla

$$\gamma_\theta''(s(0))^{\perp} = \vec{H} + \vec{B}\cos 2\theta + \vec{C}\sin 2\theta \tag{4.3.1.2}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}h(\vec{t},\vec{t}) &= h(\cos\theta X_1 + \sin\theta X_2, \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2) \\ &= \cos^2\theta h(X_1,X_1) + \sin^2\theta h(X_2,X_2) + 2\cos\theta\sin\theta h(X_1,X_2)\end{aligned}$$

$$\vec{H} = \frac{h(X_1,X_1) + h(X_2,X_2)}{2}$$
$$\vec{B} = \frac{h(X_1,X_1) - h(X_2,X_2)}{2}$$
$$\vec{C} = h(X_1,X_2)$$

alınırsa

$$h(\vec{t},\vec{t}) = \vec{H} + \vec{B}\cos 2\theta + \vec{C}\sin 2\theta \tag{4.3.1.3}$$

dır. Böylece θ açısı 0 dan 2π ye değiştiğinde bu vektör $T_p^{\perp}(M)$ de bir elips oluşturur. Bu elipse M nin p noktasındaki *eğrilik elipsi* denir ve

$$E(p) = \left\{ h(\vec{t},\vec{t}) \middle| \vec{t} \in T_pM ; \|\vec{t}\| = 1 \right\} \tag{4.3.1.4}$$

ile gösterilir.(Perdıgao 2011)

Açıklama 4.3.1.1: $E(p)$ eğrilik elipsi bir noktaya ya da bir doğruya dejenere olabilir. M yüzeyinin bir $p \in M$ noktasında yarı umbilik olması için gerek ve yeter şart eğrilik elipsinin bir doğruya dejenere olmasıdır, buna eşdeğer olarak $K_N(p) = 0$ dir. E^4 de M

immersiyon yüzeyi her noktasında yarı umbilik ise *M* yüzeyine yarı umbilik denir. Bu durumda *M* yüzeyinin normal eğriliğinin sıfır olması demektir.

Önerme 4.3.1.2: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) *E(p)* eğrilik elipsi bir doğru ya da bir noktaya dejenere olur.

ii) $\vec{B}$ ile $\vec{C}$ lineer bağımlıdır.

iii) $R^{\perp} = 0$ dır.

iv) Eğer $\{N_i\}$ ortonormal normal çatı ise A_{N_i} matrisleri $(1 \leq i \leq 2)$ köşegenleştirilebilirdir (Guadalupe ve Rodriguez 1983).

Tanım 4.3.1.3: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u,v)$ nin *E(p)* eğrilik elipsi bir çember yani, $\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0$ ve $\|\vec{B}\| = \|\vec{C}\|$ eşitlikleri sağlanırsa *M* ye *süperkonformal yüzey* adı verilir. (Godalupe ve Rodriguez 1983).

Tanım 4.3.1.4: *M* nin *p* noktasındaki eğrilik elipsi E(p) $T_p^{\perp}(M)$ düzleminde yatan bir eğri olduğundan (4.3.1.4) yardımıyla

$$\begin{aligned} x &= \frac{h_{11}^{\ 1} + h_{22}^{\ 1}}{2} + \frac{h_{11}^{\ 1} - h_{22}^{\ 1}}{2} \cos 2\theta + h_{12}^{\ 1} \sin 2\theta \\ y &= \frac{h_{11}^{\ 2} + h_{22}^{\ 2}}{2} + \frac{h_{11}^{\ 2} - h_{22}^{\ 2}}{2} \cos 2\theta + h_{12}^{\ 2} \sin 2\theta \end{aligned} \tag{4.3.1.5}$$

(4.3.1.5) eşitliğine *eğrilik elipsinin parametresi* denir.

1. Çeşit süperkonformal yüzeyleri:

$M \subset E^4$ yüzeyinin (4.3.1.5) parametrelendirmesi ile verilen eğrilik elipsi için

$$\begin{aligned} & h_{11}^{\ 2} = h_{22}^{\ 2} = \lambda \\ & \frac{h_{11}^{\ 1} - h_{22}^{\ 1}}{2} = h_{12}^{\ 2} = \mu \\ & h_{12}^{\ 1} = 0 \end{aligned} \tag{4.3.1.6}$$

seçilirse (4.3.1.5) denkleminin parametrik hali

$$x-\frac{h_{11}{}^{1}+h_{22}{}^{1}}{2}=\mu\cos 2\theta$$
$$y-\lambda=\mu\sin 2\theta \tag{4.3.1.7}$$

bulunur. İşlemlerin kolaylığı adına

$$h_{11}{}^{1}=\delta+\mu\ ,\ \ h_{22}{}^{1}=\delta-\mu \tag{4.3.1.8}$$

olarak alınsın. Dolayısıyla (4.3.1.7) eşitliğindeki parametrizasyon

$$x-\delta=\mu\cos 2\theta$$
$$y-\lambda=\mu\sin 2\theta \tag{4.3.1.9}$$

olacaktır. Burada δ, $\lambda, ve\,\mu$ türevlenebilir fonksiyonlardır.

Önerme 4.3.1.5: $M\subset E^4$ de türevlenebilir bir yüzey olsun. Eğer M birinci çeşit süperkonformal yüzey ise şekil operatörleri A_{N_1} ile A_{N_2} aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A_{N_1}=\begin{bmatrix}\delta+\mu & 0\\ 0 & \delta-\mu\end{bmatrix} \qquad A_{N_2}=\begin{bmatrix}\lambda & \mu\\ \mu & \lambda\end{bmatrix} \tag{4.3.1.10}$$

Sonuç 4.3.1.6: $M\subset E^4$ de türevlenebilir bir yüzey olsun. Eğer M birinci çeşit süperkonformal yüzey ise *Gauss eğrilği* K, *Normal eğriliği* K_N, ve *Ortalama eğriliğin* karesi $\|H\|^2$ olmak üzere

$$K=\lambda^2+\delta^2-2\mu^2$$
$$K_N=2\mu^2$$
$$\|H\|^2=\lambda^2+\delta^2$$

dir. Böylece $\|H\|^2-K-|K_N|=0$ olduğu görülür.

Sonuç 4.3.1.7: $M\subset E^4$ de birinci çeşit süperkonformal yüzey olsun. Eğer ikinci temel form katsayıları

$$\delta=2\mu\ ,\ \lambda=0$$

olarak alınırsa M yüzeyi $K=|K_N|$ sağlayacaktır. M yüzeyinin eğrilik elipsinin parametrizasyonu

$$x-2\mu=\mu\sin 2\theta$$
$$y=\mu\cos 2\theta$$

şekilindedir.

2. Çeşit süperkonformal yüzeyleri:

$M \subset E^4$ yüzeyinin (4.3.1.5) parametrelendirmesi ile verilen eğrilik elipsi için

$$h_{11}^{\ 2} = h_{22}^{\ 2} = \lambda$$
$$\frac{h_{11}^{\ 1} - h_{22}^{\ 1}}{2} = -h_{12}^{\ 2} = \mu \tag{4.3.1.11}$$
$$h_{12}^{\ 1} = 0$$

olarak alınsın. Bu durumda eğrilik elipsin parametrizasyonu (4.3.1.5) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} x - \frac{h_{11}^{\ 1} + h_{22}^{\ 1}}{2} &= \mu \cos 2\theta \\ y - \lambda &= -\mu \sin 2\theta \end{aligned} \tag{4.3.1.12}$$

şeklinde olacaktır. İşlemlerin kolaylığı hatırına

$$h_{11}^{\ 1} = \delta\,,\ h_{22}^{\ 1} = \delta - 2\mu$$

olarak alınsın. (4.3.1.5) eşitliği

$$\begin{aligned} x - (\delta - \mu) &= \mu \cos 2\theta \\ y - \lambda &= -\mu \sin 2\theta \end{aligned} \tag{4.3.1.13}$$

şeklinde olacaktır. (4.3.1.5) eşitliği düzenlenirse eğrilik elipsinin en son hali

$$\begin{aligned} x - (\delta - \mu) &= -\mu \cos(\pi - 2\theta) \\ y - \lambda &= -\mu \sin(\pi - 2\theta) \end{aligned} \tag{4.3.1.14}$$

şeklinde olacaktır.

Önerme 4.3.1.8: *M*, E^4 de türevlenebilir bir yüzey olsun. Eğer M ikinci çeşit süperkonformal yüzey ise şekil operatörleri A_{N_1} ile A_{N_2} aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta - 2\mu \end{bmatrix} \qquad A_{N_2} = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix} \tag{4.3.1.15}$$

Sonuç 4.3.1.9: *M,* E^4 de türevlenebilir bir yüzey olsun. Eğer M ikinci çeşit süperkonformal yüzey ise *Gauss eğrilği* K, *Normal eğriliği* K_N, ve *Ortalama eğriliğin* karesi $\|H\|^2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
K &= \lambda^2 + \delta^2 - \mu^2 - 2\delta\mu \\
K_N &= -2\mu^2 \\
\|H\|^2 &= (\delta - \mu)^2 + \lambda^2
\end{aligned}
$$

dır. Böylece $\|H\|^2 - K - |K_N| = 0$ olduğu görülür.

Sonuç 4.3.1.10: M , E^4 de ikinci çeşit süperkonformal bir yüzey olsun. Eğer ikinci temel form katsayıları

$$\delta = \mu \ , \ \lambda = 0$$

olarak alınırsa M yüzeyi $K = |K_N|$ eşitliğini sağlayacaktır. M yüzeyinin eğrilik elipsinin parametrizasyonu

$$
\begin{aligned}
x &= \mu \cos 2\theta \\
y &= -\mu \sin 2\theta
\end{aligned}
$$

olacaktır.

4.3.2 Wintgen İdeal Yüzeyiler

M , E^4 de $X(u,v):(u,v) \in D \subset E^2$ yamasıyla verilen türevlenebilir yüzey olsun. Eğrilik elipsi $E(p)$ nin yarı eksenleri

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)) \\
\vec{C} &= h(X_1, X_2)
\end{aligned}
$$

olmak üzere p noktasındaki tanjant vektör alanı T_pM nin ortonormal bazları $\{X_1, X_2\}$ olarak şeçilebilir. Burada ortonormal çatısı

$$\widetilde{N}_1 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \quad , \quad \widetilde{N}_2 = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \tag{4.3.2.1}$$

olarak seçilirse M nin normal eğriliği

$$
\begin{aligned}
K_N &= \left\langle R^{\perp}(X_1, X_2)\widetilde{N}_2, \widetilde{N}_1 \right\rangle \\
&= \|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\| \|h(X_1, X_2)\|
\end{aligned} \tag{4.3.2.2}
$$

olacaktır. (2.2.14) , (2.2.16) ve (4.3.2.2) eşitliklerini kullanarak

$$0 \le (\|h(X_1,X_1)-h(X_2,X_2)\| - 2\|h(X_1,X_2)\|)^2$$
$$= \|h(X_1,X_1)-h(X_2,X_2)\|^2 + 4\|h(X_1,X_2)\|^2 - 4K_N \qquad (4.3.2.3)$$
$$= \|h(X_1,X_1)\|^2 + \|h(X_2,X_2)\|^2 + 2\|h(X_1,X_2)\|^2 - 2K - 4K_N$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$4\|\vec{H}\|^2 = \|h(X_1,X_1)\|^2 + \|h(X_2,X_2)\|^2 + 2\langle h(X_1,X_1), h(X_2,X_2)\rangle \qquad (4.3.2.4)$$

(4.3.2.2) ve (4.3.2.3) eşitliklerini kullanarak

$$0 \le K + |K_N| - \|\vec{H}\|^2 \qquad (4.3.2.5)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe *Wintgen eşitsizliği* denir (Wintgen 1979).

Tanım 4.3.2.1: Eğer Wintgen eşitsizliği eşitlik durumunda yani ;

$$K + |K_N| = \|\vec{H}\|^2 \qquad (4.3.2.6)$$

eşitliği sağlanırsa M yüzeyine *Wintgen ideal yüzey* denir.

Teorem 4.3.2.2: M , E^4 de yüzey olsun. M yüzeyi (4.3.2.5) eşitliğinde verilen *Wintgen İdeal eşitsizliğini* her noktasında sağlansın.

a) Eğer $p \in M$ noktasında $K_N \ge 0$ sağlanırsa bu takdirde M, p noktasında (4.3.2.6) eşitliğini sağlar ancak ve ancak p noktasında ortonormal çatıya göre ve şekil operatörü

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} \mu + 2\gamma & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad A_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.3.2.7)$$

b) Eğer $p \in M$ noktasında $K_N < 0$ sağlanırsa bu takdirde M, p noktasında (4.3.2.6) eşitliğini sağlar ancak ve ancak p noktasında ortonormal çatıya göre ve şekil operatörü

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} \mu - 2\gamma & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad A_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.3.2.8)$$

şekilindedir.

Sonuç 4.3.2.3: Şekil operatörleri (4.3.2.7) ve (4.3.2.8) eşitliklerindeki gibi verilen yüzeyler sırasıyla birinci ve ikinci çeşit süperkonformal yüzeylerdir.

Yardımcı Teorem 4.3.2.4: *M*, E^4 de *Wintgen ideal* yüzey olsun. Eğer *M* yüzeyi $p \in M$ noktasında $|K| = |K_N|$ sağlanırsa (4.3.2.7) , (4.3.2.8) eşitliklerindeki şekil operatörleri

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} 3\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad A_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.2.9}$$

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad A_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.2.10}$$

biçimindedir (Chen 1973).

Örnek 4.3.2.5: *M* yüzeyi (4.2.6) parametrelendirmesiyle verilen tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde *M* nin (4.3.2.9) şekil operatörlerine sahip (2. çeşit) Wintgen ideal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)((\alpha')^2 + (\beta')^2) + (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0 \tag{4.3.2.11}$$

olmasıdır.

Örnek 4.3.2.6: Vranceanu yüzeyi (4.3.2.10) şekil operatörlerine sahip (2. çeşit) Wintgen ideal yüzey olması gerek ve yeter şart

$$(r'(v))^2 + 2(r(v))^2 - r(v)r''(v) = 0 \tag{4.3.2.12}$$

olmasıdır.

5. E^4 DE CHEN YÜZEYLERİ

5.0. Giriş

Bu bölümde E^4 deki Chen yüzeylerinin süperkonformal oldukları ispatlanmıştır.

5.1 E^4 CHEN YÜZEYLERİ

M, m-boyutlu Reimann manifoldu olan *N* nin *m* boyutlu türevlenebilir altmanifoldu olsun. ζ , *M* yüzeyinin normal vektörü olmak üzere ζ_x, *M* nin ortogonal birim normal vektörüdür. Burada

$$\zeta = \|\zeta\| \xi_1$$

dir. B.Y.Chen, normal vektörünün komşu vektör uzayını

$$a(v) = \frac{\|\zeta\|}{n} \sum_{x=2}^{m-n} \{tr(A_1, A_2)\} \xi_x$$

ile tanımlanmıştır. Burada $A_x = A_{\xi_x}$ şekil operatörüdür. Özellikle, ortalama eğrilik vektörü $\overrightarrow{H}$ nın komşu ortalama eğrilik vektör uzayı $a(\overrightarrow{H})$, $\overrightarrow{H}$ vektörü ile ortogonal olup iyi tanımlı bir normal vektör uzayıdır. Eğer $a(\overrightarrow{H}) = 0$ ise M altmanifoldu *N* nin bir $A-$*altmanifoldu* denir. Dahası $A-$altmanifoldu da bir *Chen altmanifoldu* olarak tanımlanır.

$$a(\overrightarrow{H}) = \frac{\|\overrightarrow{H}\|}{2} \{tr(A_{N_1}, A_{N_2})\} N_2$$

burada $\{N_1, N_2\}$, *N(M)* nin ortonormal bazlarıdır.

Tanım 5.1.1: Eğer $a(\overrightarrow{H}) = 0$ ise *M* yüzeyine E^4 de bir *Chen yüzeyi* denir (Rouxel 1980).

Önerme 5.1.2: $M \subset E^4$ de her bir birinci çeşit süperkonformal yüzeyler non-trivial Chen yüzeyidir.

İspat. $M \subset E^4$ yüzeyi 1. Çeşit süperkonformal bir yüzey olsun. Bu taktirde (4.3.1.10) eşitliğinden *M* nin şekil operatör matrisleri

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} \delta + \mu & 0 \\ 0 & \delta - \mu \end{bmatrix}, \quad A_{N_2} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

dir. Bu taktirde M nin ortalama eğriliği

$$\overrightarrow{H} = \delta N_1 + \lambda N_2$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere $\overrightarrow{H}$ normal vektörü N_1 e paralel değildir. Dolayısıyla M nin (5.1.1) eşitliğindeki gibi yeni bir ortonormal çatı alanı tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}}(\delta N_1 + \lambda N_2) \\ \widetilde{N}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}}(\lambda N_1 - \delta\lambda N_2) \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

olsun (4.1.2), (4.3.1.10) ve (5.1.1) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{11}^{\,1} &= \left\langle h(X_1,X_1),\widetilde{N}_1\right\rangle = \frac{\delta^2+\lambda^2+\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{12}^{\,1} &= \left\langle h(X_1,X_2),\widetilde{N}_1\right\rangle = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{22}^{\,1} &= \left\langle h(X_2,X_2),\widetilde{N}_1\right\rangle = \frac{\delta^2+\lambda^2-\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{11}^{\,2} &= \left\langle h(X_1,X_1),\widetilde{N}_2\right\rangle = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{12}^{\,2} &= \left\langle h(X_1,X_2),\widetilde{N}_2\right\rangle = \frac{-\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{22}^{\,2} &= \left\langle h(X_2,X_2),\widetilde{N}_2\right\rangle = \frac{-\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

elde edilir. (5.1.2) eşitliğindeki değerleri kullanılarak şekil operatörleri düzenlenirse

$$A_{\widetilde{N}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2+\lambda^2+\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} & \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} & \frac{\delta^2+\lambda^2-\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \end{bmatrix} \qquad A_{N_2} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} & \frac{-\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \\ \frac{-\delta\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} & \frac{-\lambda\mu}{\sqrt{\delta^2+\lambda^2}} \end{bmatrix}$$

olacaktır. Dahası bu iki şekil operatörleri çarpımı

$$A_{\widetilde{N}_1}A_{\widetilde{N}_2} = \begin{bmatrix} \lambda\mu & \mu(\delta+\mu) \\ \mu(\mu-\delta) & -\lambda\mu \end{bmatrix} \tag{5.1.3}$$

olup (5.1.3) eşitliğindeki matrisin izi $tr(A_{\widetilde{N}_1}A_{\widetilde{N}_2}) = 0$ dir. Buda bize M nin Chen yüzeyi olduğunu gösterir. □

Önerme 5.1.3: $M \subset E^4$ de her bir ikinci çeşit süperkonformal yüzeyler non-trivial Chen yüzeyidir.

İspat. $M \subset E^4$ de ikinci çeşit süperkonformal yüzey olsun. Bu taktirde (4.3.1.15) eşitliğinden M nin şekil operatörleri matrisleri

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta - 2\mu \end{bmatrix},\; A_{N_2} = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

dir. Bu taktirde M nin ortalama eğriliği

$$\overrightarrow{H} = (\delta - \mu)N_1 + \lambda N_2$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere $\overrightarrow{H}$ normal vektörü N_1 e paralel değildir. Dolayısıyla M nin (5.1.4) eşitliğindeki gibi yeni bir ortonormal çatı alanı tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_1 &= \frac{1}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}}((\delta-\mu)N_1 + \lambda N_2) \\ \widetilde{N}_2 &= \frac{1}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}}(\lambda N_1 - (\delta-\mu)N_2) \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

olsun (4.1.2), (4.3.1.15) ve (5.1.4) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{11}^{\,1} &= \langle h(X_1, X_1), \widetilde{N}_1 \rangle = \frac{(\delta-2\mu)(\delta-\mu)+\lambda^2}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{12}^{\,1} &= \langle h(X_1, X_2), \widetilde{N}_1 \rangle = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{22}^{\,1} &= \langle h(X_2, X_2), \widetilde{N}_1 \rangle = \frac{\delta(\delta-\mu)+\lambda^2}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{11}^{\,2} &= \langle h(X_1, X_1), \widetilde{N}_2 \rangle = \frac{-\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{12}^{\,2} &= \langle h(X_1, X_2), \widetilde{N}_2 \rangle = \frac{-(\delta-\mu)\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \\ \widetilde{h}_{22}^{\,2} &= \langle h(X_2, X_2), \widetilde{N}_2 \rangle = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \end{aligned}$$

(5.1.5)

elde edilir. (5.1.5) eşitliğindeki değerleri kullanarak şekil operatörlerini düzenlenirse

$$A_{\widetilde{N}_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(\delta-2\mu)(\delta-\mu)+\lambda^2}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} & \dfrac{\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \\ \dfrac{\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} & \dfrac{\delta(\delta-\mu)+\lambda^2}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} \end{bmatrix}$$

$$A_{N_2}=\begin{bmatrix}\dfrac{-\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} & \dfrac{-(\delta-\mu)\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}}\\ \dfrac{-(\delta-\mu)\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}} & \dfrac{\lambda\mu}{\sqrt{(\delta-\mu)^2+\lambda^2}}\end{bmatrix}$$

olacaktır. Dahası bu iki şekil operatörleri çarpımı

$$A_{\tilde{N}_1}A_{\tilde{N}_2}=\begin{bmatrix}-\lambda\mu & -\mu(\delta-2\mu)\\ -\mu\delta & \lambda\mu\end{bmatrix} \tag{5.1.6}$$

olup (5.1.6) eşitliğindeki matrisin $tr(A_{\tilde{N}_1}A_{\tilde{N}_2})=0$ dir. Buda bize M nin Chen yüzeyi olduğunu gösterir. □

KAYNAKLAR

Amınov, Yu. A. 2001. The Geometry of Submanifolds. *Gordon and Breach Science Publishers, Singapore*, 12 pp.

Basto-Gonçalvez, J. 2011. Local geometry of surfaces ın R^4. *Fundaçao para Ciencia e Tecnologia Pestc/MAT*, UI0144/2011: 1-29.

Bulca, B. 2012. IE^4 deki Yüzeylerin bir Karakterizasyonu. Doktora Tezi, UÜ Fen Bilimleri, Bursa.

Bures, J. 1975. Some remarks on surfaces in the 4-dimensional Euclidean space. *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 25(1975): 480-490.

Burstall, F., Ferus, D., Leschke, K., Pedit F. and Pinkall, **U. 2002** Conformal Geometry of Surfaces in the 4-Sphere and Quaternions, Lecture Notes in Mathematics. *Springer- Verlag*, Vol.1772.

Carmo, M. P. DO. 1983. Differantial geometrıce Van Kurvenund Flachen ,Viweg Verlag, Weisbaden, Braunschweig

Chen, B. Y. 1973. Geometry of Submanifols. Marcel Dekker, New York, 298.

Chen, B.-Y. 2010. Classication of Wintgen ideal surfaces in Euclidean 4-space with equal Gauss and normal curvature. *Ann.Global Anal. Geom*., 38 (2010): 145-160.

Chen, B.-Y. 2011. On Wintgen ideal surfaces, Riemannian Geometry and Applications. *Proceedings RIGA.,* 2011: 59-74.

Decu, S., Petrovi´c-Torga.ev, M., Sebekovic, A., Verstraelen, L. 2010. On the intrinsic Deszcz symmetries and the extrinsic Chen character of Wintgen ideal submanifolds. *Tamkang J. Math*. 41(2) (2010): 109-116.

Dajczer, M., Tojeiro, R. 2008. All superconformal surfaces in R^4 in terms of minimal surfaces. *Math.DG*, Z. 261, 869.890 (2008): 1-17.

DeSmet, P.J., Dillen, F., Verstraelen, L., Vrancken, L. 1999. A pointwise inequality in submanifold theory. *Archivum Mathematicum*, Vol. 35(1999), No. 2: 115-128.

Friedrich, T. 1997. On superminimal surfaces. *Arch.Math*., (Brno)33(1997): 41-56.

GANCHEV, G., MILOUSHEVA V. 2008. On the Theory of Surfaces in the Four Dimensional Euclidean Space. *Kodai Math. J.,* 31: 183-198.

Geysens, F., Verheyen, L., and Verstraelen, **L. 1981.** Sur les Surfaces A on les Surfaces de Chen. *C.R. Acad. Sc. Paris*, I 211(1981).

Görgülü, A. 1989. Relatians Between The Mean Curvatures of The Paralel Submanifolds. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A*, Vol.38, Number 1-2: 87-93

Gray, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Pres Inc., USA, 398 pp.

Guadalupe, I.V., Rodriguez, **L. 1983**. Normal curvature of surfaces in space forms. *Paci.c J. Math*. 106 (1983): 95-103.

Gutierrez Nuñez, J.M., Romero Fuster, M.C. and Sanchez-Bringas, F. 2008. Codazzi Fields on Surfaces Immersed in Euclidean 4-space. *Osaka J. Math*., 45 (2008): 877-894.

Iyigün, E., Arslan, K., Öztürk, **G**. **2008**.A characterization of Chen Surfaces in E4. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*. (2) 31(2) (2008): 209-215.

Kim, Y. W., Koh, S. E., Shin, H., Yang S. D. 2007. Generalized surfaces with constant *H/K* in Euclidean three-space. *Manuscripta Math,* 124(2007): 343-361.

Leibmann, H. 1900. Uber die Verbiegung der geschlassenen Flachen positiver Krummung. Math. Ann., 53(1900):81-122.

Malkowsky, E., Velitkovic, V. 2001. Visauglization of Differential Geometry. *Facto Universitatis, Mechanics, Automatic Control and Robotics.,* Vol.3, No 11:127-133.

Mello, L.F. 2003. Mean directionally curved lines on surfaces immersed in R^4. *Publ. Math.,* 47: 415-440.

Mello, L.F. 2009. Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in R^4. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 39(5): 1597-1612.

Mıhaı, A., Rosca R., Verstraelen L.,Vrancken L. 1995. Tensor product surfaces of Euclidean planar curves. *Rend. Sem. Mat. Messina,* 3: 173-184.

Mochida, D.K.H., Fuster, M.D.C.R., Ruas, M.A.S. 1995. The Geometry of Surfaces in 4-Space From a Contact Viewpoint. *Geometriae Dedicata,* 54(1995): 323-332

O'neill, B. 1997. Elementary Differential Geometry. *Academic Pess*, USA,1-475.

Özdemir, B. 2008. " de Focal eğriler ve Focal Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu", Doktora Tezi, UÜ Fen Bilimleri, Bursa.

Perdıgao, **T. R. 2011.** Semiumbilicidade and umbilicidade on surfaces immersed in R^n, n ≥ 4. Brazil, Vıçosa Minas Geraıs, 85pp.

Rouxel, B. 1980. Ruled A-submanifolds in Euclidean Space E^4, *Soochow J. Math*. 6(1980): 117-121.

Vreanceanu, G. 1977. Surfaces de Rotation dans E^4. Rev. *Roum Math. Pures Appl*., 22(1977): 857-862.

Wong, Y. C. 1946. Contributions to the theory of surfaces in 4-space of constant cur-Vature. *Trans. Amer. Math. Soc,* 59 (1946): 467-507.

Wintgen, P. 1979. Sur l.inégalité de Chen-Willmore. *C. R. Acad. Sci*, Paris 288 (1979): 993-995.

Yoon, D. W. 2001. Rotation Surfaces with Finite Type Gauss Map in E4. *Indian J. pura appl.Math.,* 32(2001), no.12: 1803-1808.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ertuğrul AKÇAY
Doğum Yeri ve Tarihi	: Giresun, 05/01/1987
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bulancak Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2001-2005
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2006-2011
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2011-…
Çalıştığı Kurum ve Yıl	: Uludağ Üniversitesi 2011 – …
İletişim (e–posta)	: ertuak@gmail.com.tr
Yayınları:	: