



T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## **PROJEKTİF YAPILARIN KOORDİNATLAMASI ÜZERİNE**

Fatma ÖZEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009



T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## **PROJEKTİF YAPILARIN KOORDİNATLAMASI ÜZERİNE**

Fatma ÖZEN

Prof.Dr. Süleyman ÇİFTÇİ  
(Danışman)

Doç.Dr.Basri ÇELİK  
(II.Danışman)

YÜKSEK LİSANS  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

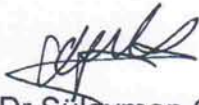
## PROJEKTİF YAPILARIN KOORDİNLAMASI ÜZERİNE

Fatma ÖZEN

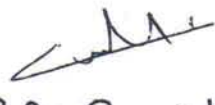
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 17.108.12009  
çokluğu ile kabul edilmiştir.

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy

  
Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ  
Danışman

  
Prof. Dr. Ahmet  
CENGİZ

  
Prof. Dr. Cengizhan  
MURATHAN

## ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde projektif düzlemler ve projektif Klingenberg düzlemleri esas olmak üzere bazı geometrik yapıların koordinatlamaları ele alınmış ve bu düzlemlerin geometrik özellikleri ile koordinatlama halkalarının cebirsel özellikleri arasındaki bazı ilişkiler, literatür taraması şeklinde, incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Projektif düzlemler, lineer üçlü halka, izomorfizm, düzlemsel halka, Projektif Klingenberg düzlemleri, Moufang-Klingenberg düzlemleri, lokal alterne halka, sexternary halka.

**ABSTRACT**

In this study, we gather some information about the coordinatizations of some projective structures, especially projective planes, Klingenberg planes and Moufang Klingenberg planes. And also we give some relations between the algebraic properties of coordinatization rings and geometric properties of these planes with searching of the literature.

**Key Words:** Projective planes, linear ternary ring, isomorphism, planar ring, Projective Klingenberg Planes, Moufang–Klingenberg Planes, local alternative rings, sexternary rings.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ ONAY SAYFASI	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
İÇİNDEKİLER	V
GİRİŞ	1
1. TEMEL KAVRAM VE ÖNERMELER	3
1.1. Cebirsel Kavramlar	3
1.2. Geometrik Kavramlar	8
2. BAZI GEOMETRİK YAPILARIN KOORDİNATLANMASI	12
2.1. Öklid Düzleminin Koordinatlanması	12
2.2. Projektif Düzlemlerin Üçlü Halkalarla Koordinatlanması	17
2.2.1 Projektif düzlemin noktalarının koordinatlanması	17
2.2.2 Projektif düzlemin doğrularının koordinatlanması	20
2.2.3 Projektif düzlemin üzerinde bulunma bağıntısının belirlenmesi ve düzlemsel üçlü halkaların elde edilmesi	22
2.3. Lineer Üçlü Halkalar	29
3. KLINGENBERG ve MOUFANG-KLINGENBERG DÜZLEMLERİNDE KOORDİNATLAMA	37
3.1. Düzlemsel Sexternary Halkalar ve Projektif Klingenberg Düzlemleri	37
3.2. Lokal Alterne Halkalar ve Moufang-Klingenberg Düzlemleri	49
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	67
TEŞEKKÜR	68

## GİRİŞ

Günümüzde, matematikte yer alan ana bilim dallarının birbiriyle çok sıkı bağları oluşmuştur. Matematiğin anabilim dallarından olan geometri ve cebir arasındaki yoğun ilişkiler pek çok geometrik yapıda koordinatlama sistemleri yardımıyla ele alınıp, incelenmektedir. Nokta ve doğrulara verilen koordinatlar geometrik problemleri cebirsel problemlere dönüştürerek, problemin çözümünü kolaylaştırabilmektedir.

Bu yüksek lisans tezinde, çeşitli geometrik yapıların koordinatlanmaları, değişik koordinatlama metodları ve koordinat halkaları incelenerek verilen yapının geometrik özellikleriyle koordinatlama halkasının cebirsel özellikleri arasındaki bazı ilişkiler üzerine literatürde yer alan çalışmalardan bir derleme yapılmış bunlar derli toplu düzenli bir şekilde verilmiştir.

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde konunun anlaşılması için gerekli olan temel kavramlar ve önermeler verilmiştir.

Üç kısımdan oluşan ikinci bölümün ilk kısmında Öklid düzleminin reel sayılar cismi ile kartezyen koordinatlanması incelenmiş ve bu kartezyen koordinatlar kullanılarak reel projektif düzlemin inşası verilmiştir. İkinci bölümün ikinci kısmında projektif düzlemlerin üçlü halkalar ile koordinatlanması incelenmiş ve koordinatlama kümesi üzerinde  $+$  ve  $\cdot$  işlemleri, üzerinde olma bağıntısına bağlı olarak tanımlanıp, koordinatlama halkasının bazı özellikleri verilmiştir. İkinci bölümün üçüncü kısmında özel olarak lineer üçlü halkalar üzerinde durulmuştur.

Bu tezin üçüncü bölümü ise iki kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda genel bir projektif Klingenberg düzleminin koordinatlanması ele alınmış ve onunla ilgili

sexternary halka adı verilen cebirsel yapı oluşturulup aralarındaki eşleme incelenmiştir. Bölümün son kısmında Moufang-Klingenberg düzlemleri ile lokal alterne halkalar arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.



## 1. TEMEL KAVRAM VE ÖNERMELER

Bu bölümde konunun anlaşılabilirliğini sağlayacak temel tanım ve teoremler iki ana başlık altında özet olarak verilecektir. İlk başlıkta cebirle ilgili, ikinci başlıkta geometri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

### 1.1. Cebirsel Kavramlar

Bu kısımda verilecek kavramlar için (Fraleigh 1989) ve (Schafer 1966) esas alınmıştır.

**Tanım 1.1.1:**  $\mathbf{A}$  boş olmayan bir küme olsun.  $\mathbf{A}$  nın her bir sıralı eleman ikilisine  $\mathbf{A}$  nın tam olarak bir elemanını karşılık tutan bir  $*$  kuralına  $\mathbf{A}$  da bir *ikili işlem* ya da *iç işlem* denir.

**Tanım 1.1.2:**  $\mathbf{G}$  boş olmayan bir küme ve  $*$ :  $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  bir iç işlem olsun. Eğer,

**G1)** Her  $a, b, c \in \mathbf{G}$  için  $a*(b*c) = (a*b)*c$  dir.

**G2)** Her  $a \in \mathbf{G}$  için  $a*e = e*a = a$  olacak şekilde  $\exists e \in \mathbf{G}$  vardır.

**G3)** Her  $a \in \mathbf{G}$  için  $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$  olacak şekilde  $\exists a^{-1} \in \mathbf{G}$  vardır.

şartları sağlanıyorsa  $(\mathbf{G}, *)$  ikilisine *grup* denir ve bu grup eğer bir karışıklık sözkonusu olmayacaksa kısaca  $\mathbf{G}$  ile gösterilir. G1 şartına  $*$  işlemi için *birleşme (assosiyatiflik) özelliği*, G2 şartını sağlayan  $e$  elemanına  $*$  işleminin *etkisiz elemanı* adı verilir. G3 şartındaki  $a^{-1}$  elemanına da *a elemanının  $*$  işlemine göre tersi* denir.

**Tanım 1.1.3:** Bir  $(\mathbf{G}, *)$  grubunda

$$\forall a, b \in \mathbf{G} \text{ için } a*b = b*a$$

şartı sağlanıyorsa  $\mathbf{G}$  ye *değişmeli (komütatif) grup* ya da *Abel grubu* denir.

**Tanım 1.1.4:**  $(\mathbf{H}, +)$  bir abel grubu ". "  $\mathbf{H}$  üzerinde tanımlı bir iç işlem olsun. Eğer her  $x, y, z \in \mathbf{H}$  için, sırasıyla *sol* ve *sağ dağılma özellikleri* adı verilen

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ ve } (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

şartları gerçekleşiyorsa  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  üçlüsüne bir *halka* denir.

Bir  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  halkasında birinci işleme genellikle *toplama*, ikinci işleme de *çarpma işlemi* adı verilir. Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, çarpma işlemine göre etkisiz eleman, varsa, 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana *özdeşlik* ya da *birim eleman* adı da verilir. Eğer  $\mathbf{H}$  halkasında birim eleman varsa  $\mathbf{H}$  ye *birimli halka*, çarpma işlemi değişmeli ise  $\mathbf{H}$  ye *değişmeli(komütatif) halka* ve çarpma işlemi birleşmeli ise  $\mathbf{H}$  ye *birleşmeli halka* denir.

**Tanım 1.1.5:**  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  ve  $(\mathbf{H}', +', \cdot')$  iki halka,  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$  bir dönüşüm olsun. Eğer her  $a, b \in \mathbf{H}$  için

$$\text{i) } \Phi(a + b) = \Phi(a) +' \Phi(b)$$

$$\text{ii) } \Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot' \Phi(b)$$

şartları sağlanıyorsa  $\Phi$  dönüşümüne  $\mathbf{H}$  den  $\mathbf{H}'$  ye bir *homomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.6:**  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  ve  $(\mathbf{H}', +', \cdot')$  iki halka olsun.  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$  örten bir homomorfizm ise  $\Phi$  dönüşümüne  $\mathbf{H}$  den  $\mathbf{H}'$  ye bir *epimorfizm* denir.

**Tanım 1.1.7:**  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  ve  $(\mathbf{H}', +', \cdot')$  iki halka olsun.  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$  birebir ve örten bir homomorfizm ise  $\Phi$  dönüşümüne  $\mathbf{H}$  den  $\mathbf{H}'$  ye bir *izomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.8:** Bir  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  halkasından kendisine bir izomorfizme  $\mathbf{H}$  üzerinde bir *otomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.9:** Bir  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  halkasından kendisine birebir, örten ve her  $a, b \in \mathbf{H}$  için,

$$\text{i) } \Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$$

$$\text{ii) } \Phi(a \cdot b) = \Phi(b) \cdot \Phi(a)$$

şartlarını sağlayan bir  $\Phi$  dönüşümüne  $\mathbf{H}$  üzerinde bir *anti-otomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.10:** Eğer  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  bir birimli ve birleşmeli halka ve  $\mathbf{H} - \{0\}$  in her elemanının çarpmaya göre tersi varsa  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  halkasına *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya *cisim* denir.

Buna göre bölümlü halka ve cisim için, doğrudan doğruya sağlaması gereken şartlar yardımıyla, aşağıdaki tanımlar da verilebilir:

**Tanım 1.1.11:** Eğer  $\mathbf{B} = (\mathbf{B}, +, \cdot)$  sistemi için,

**B1)**  $(\mathbf{B}, +)$  değişmeli bir gruptur.

**B2)**  $(\mathbf{B} - \{0\}, \cdot)$  bir gruptur.

**B3)** Çarpma işlemi toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır.

şartları sağlanıyorsa,  $\mathbf{B}$  ye *bölümlü halka* denir.

**Tanım 1.1.12:**  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}, +, \cdot)$  sistemi için,

**F1)**  $(\mathbf{F}, +)$  bir değişmeli gruptur.

**F2)**  $(\mathbf{F} - \{0\}, \cdot)$  bir değişmeli gruptur.

**F3)** Çarpma işlemi toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır.

şartları sağlanıyorsa,  $\mathbf{F}$  ye bir *cisim* denir.

Tanımlarından açık olarak görüldüğü gibi, bölümlü halka aslında çarpma işleminde değişme özelliği aranmayan bir cisimdir.

**Tanım 1.1.13:** Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  halkasına bir *alterne halka* denir.

i) Her  $a, b \in \mathbf{H}$  için  $a(ab) = (aa)b$

ii) Her  $a, b \in \mathbf{H}$  için  $(ab)b = a(bb)$

Bu özelliklerden birincisine *sol alterne* kural, ikincisine de *sağ alterne* kural adı verilir.

**Tanım 1.1.14:** Özdeşlikli bir halkada çarpma işlemine göre tersi var olan elemanlara *birim eleman* denir.

**Tanım 1.1.15:**  $(\mathbf{H}, +, \cdot)$  bir halka olsun. Eğer  $\mathbf{H}$  nin bir  $\mathbf{H}'$  alt kümesi  $\mathbf{H}$  deki aynı işlemler altında bir halka oluşturuyorsa  $\mathbf{H}'$  ye  $\mathbf{H}$  nin bir *alt halkası* denir.

**Tanım 1.1.16:** Bir  $\mathbf{H}$  halkasındaki her  $a$  elemanı için  $a\mathbf{l} \subseteq \mathbf{H}$  ve  $\mathbf{l}a \subseteq \mathbf{H}$  şartlarını sağlayan  $\mathbf{H}$  nin bir  $\mathbf{l}$  alt halkasına  $\mathbf{H}$  halkasının bir *ideali* denir.

**Tanım 1.1.17:**  $\mathbf{H}$  bir halka ve  $\mathbf{M} \neq \mathbf{H}$  onun bir ideali olsun. Eğer  $\mathbf{M} \subset \mathbf{l} \subset \mathbf{H}$  şartını sağlayan hiçbir  $\mathbf{l}$  ideali yoksa  $\mathbf{M}$  ye *maksimal ideal* denir.

**Tanım 1.1.18:**  $(\mathbf{F}, +, \cdot)$  bir cisim ve  $(\mathbf{V}, \oplus)$  bir abel grubu olsun. Eğer  $\circ : \mathbf{F} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  dış işlemi ve her  $u, v \in \mathbf{V}, \alpha, \beta \in \mathbf{F}$  için;

$$\mathbf{V1)} \alpha \circ (u \oplus v) = (\alpha \circ u) \oplus (\alpha \circ v)$$

$$\mathbf{V2)} (\alpha + \beta) \circ u = (\alpha \circ u) \oplus (\beta \circ u)$$

$$\mathbf{V3)} \alpha \circ (\beta \circ u) = (\alpha \cdot \beta) \circ u$$

$$\mathbf{V4)} 1 \circ u = u ; 1 \in \mathbf{F} \text{ özdeşlik elemanı}$$

şartları sağlanıyorsa  $\mathbf{V}$  ye  $\mathbf{F}$  cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir ve eğer bir karışıklık olmayacaksa  $\mathbf{F}$  cismi belirtilmeden kısaca  $\mathbf{V}$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.19:**  $\mathbf{V}, \mathbf{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı ve  $\otimes, \mathbf{V}$  üzerinde bir iç işlem olsun. Eğer her  $c \in \mathbf{F}$  ve her  $u, v, w \in \mathbf{V}$  için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $\mathbf{V}$  ye  $\mathbf{F}$  cismi üzerinde bir *cebiri* denir.

$$\mathbf{C1)} (c \circ u) \otimes v = u \otimes (c \circ v) = c \circ (u \otimes v)$$

$$\mathbf{C2)} (u \oplus v) \otimes w = (u \otimes w) \oplus (v \otimes w)$$

$$\mathbf{C3)} u \otimes (v \oplus w) = (u \otimes v) \oplus (u \otimes w)$$

Bundan sonra  $\circ$  ve  $\otimes$  simgelerini kullanmayacağız. Bunlar yerine işlemlerde elemanları yanyana yazarak göstereceğiz. Elemanların nereden seçildiği bilindiğinden

bu gösterimi kullanmakta herhangi bir sakınca yoktur. Bu gösterimlerle yukarıdaki cebir şartları her  $c \in \mathbf{F}$  ve her  $u, v, w \in \mathbf{V}$  için

$$1) (cu)v = u(cv) = c(uv)$$

$$2) (u + v)w = (uw) + (vw)$$

$$3) u(v + w) = (uv) + (uw)$$

biçiminde yazılır.

Eğer bir  $\mathbf{V}$  cebirinde

$$\forall u, v, w \in \mathbf{V} \text{ için } (uv)w = u(vw)$$

şartı da sağlanıyorsa  $\mathbf{V}$  ye  $\mathbf{F}$  cismi üzerinde *birleşmeli cebir* denir.

**Teorem 1.1.20:** Bir alterne halkanın herhangi iki elemanı tarafından üretilen altcebr *birleşmeli cebirdir* (Schafer 1966).

**Teorem 1.1.21:**  $\mathbf{A}$  bir alterne halka olsun. Bu takdirde her  $x, y, w \in \mathbf{A}$  için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Pickert 1955).

$$\text{i) } y((xw)x) = ((yx)w)x$$

$$\text{ii) } (x(wx))y = x(w(xy))$$

$$\text{iii) } (xy)(wx) = x(yw)x$$

(Bu eşitliklere *Moufang özdeşlikleri* de denilmektedir.)

## 1.2. Geometrik Kavramlar

Bu kısımda verilecek kavramlar için (Kaya 1992, Batten 1986) ve (Hughes 1973) çalışmaları esas alınmıştır.

**Tanım 1.2.1:** Elemanlarına noktalar denilen bir  $\mathbf{N}$  kümesi ile, elemanlarına doğrular denilen bir  $\mathbf{D}$  kümesi ayırık kümeler olsun ve adına üzerinde olma bağıntısı denilen  $\circ \subset \mathbf{N} \times \mathbf{D}$  bağıntısı gözönüne alınsın. Bu durumda  $(\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  üçlüsüne bir *geometrik yapı* denir ve herhangi bir  $N$  noktası ve  $d$  doğrusu için  $(N, d)$  nin  $\circ$  da olması  $N \circ d$  ile gösterilip “ $N$  noktası  $d$  doğrusu üzerindedir.” veya “ $d$  doğrusu  $N$  noktasından geçer.” biçiminde okunur. Bazen  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  yerine kısaca  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  yazılır ve bu  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  *uzayı* olarak da isimlendirilir.

Genellikle  $\mathbf{N}$  noktalar kümesinin elemanları büyük harflerle,  $\mathbf{D}$  doğrular kümesinin elemanları küçük harflerle gösterilir.  $A$  ve  $B$  noktalarından geçen doğru  $A \cup B$  ile veya kısaca  $AB$  ile gösterilir. Benzer şekilde  $a$  ve  $b$  doğrularının arakesiti  $a \cap b$  ile veya kısaca  $ab$  ile gösterilir.

**Tanım 1.2.2:** Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  geometrik yapısına bir *lineer uzay* denir.

**L1)** Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

**L2)** Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

**Tanım 1.2.3:** Aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  lineer uzayına *projektif düzlem* denir.

**PD1)** Herhangi iki doğru kesişir.

**PD2)** Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

Bir projektif düzlem genellikle  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  yerine  $\mathbb{P} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  biçiminde gösterilir.

**Tanım 1.2.4:**  $S$  bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun.  $S$  de “nokta” sözcüğü yerine “doğru”, ve “doğru” sözcüğü yerine “nokta” koyarak bulunan yeni ifadeye  $S$  nin *dual ifadesi* denir.

Bu tanımdan hemen şu çıkar: Birbirlerinin duali olan nokta ve doğru kavramlarından başka aşağıda yan yana yazılan kavramlar birbirlerinin duali olup, dual ifade bulunurken onlarında yer değiştirmeleri gerekir.

nuktadaş  $\longleftrightarrow$  doğrudaş  
birleşme  $\longleftrightarrow$  kesişme  
.....üzerinde bulunur  $\longleftrightarrow$  ...dan geçer

**Teorem 1.2.5:** (Projektif düzlemlerde duallik ilkesi ): Bir projektif düzleme ilişkin her teoremin ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir.

**Tanım 1.2.6:**  $A, B, C, A', B', C'$  bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer  $A, B, C$  doğrudaş değilse  $\{A, B, C\}$  cümlesine bir *üçgen* denir.  $\{A, B, C\}$  ve  $\{A', B', C'\}$  üçgenleri için  $A$  ve  $A'$ ,  $B$  ve  $B'$ ,  $C$  ve  $C'$  ye bu üçgenlerin *karşılıklı köşeleri* adı verilir. Eğer  $M, A, A'$ ;  $M, B, B'$ ; ve  $M, C, C'$  nokta üçlüleri doğrudaş olacak biçimde bir  $M$  noktası varsa bu üçgenlere  $M$  den *perspektiftir* denir. Ayrıca  $M$  noktasına *perspektiflik merkezi*;  $AB$  ve  $A'B'$ ,  $AC$  ve  $A'C'$ ,  $BC$  ve  $B'C'$  doğru ikililerine bu üçgenlerin *karşılıklı kenarları* adı verilir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının  $P = AB \cap A'B'$ ,  $Q = AC \cap A'C'$ ,  $R = BC \cap B'C'$  arakesit noktaları doğrudaşsa,  $P, Q$  ve  $R$  noktalarının üzerinde bulunduğu bu doğruya üçgenlerin *perspektiflik ekseni* denir. Perspektiflik ekseni  $e$  doğrusu olan iki üçgene  $e$  *ekseninden perspektif üçgenler* adı verilir.

**Tanım 1.2.7 P4 (Dezarg Aksiyomu):** İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular nuktadaş ise bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır.

**P4** aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme *Dezarg Düzlemi*, aksiyomu gerçeklemeyen bir projektif düzleme de *Dezargsel olmayan projektif düzlem* denir.

**Tanım 1.2.8 P5 (Pappus Aksiyomu):**  $A, B, C$  ve  $A', B', C'$  bir projektif düzlemde sırasıyla  $d$  ve  $d'$  gibi farklı iki doğru üzerinde bulunan,  $d \cap d'$  den ve birbirlerinden farklı altı nokta ise

$$L = AB' \cap A'B, M = AC' \cap A'C, N = BC' \cap B'C$$

noktaları doğrudadır.

**P5** aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme *Pappus düzlemi* ya da *Pappus düzlemi* denir.

**Tanım 1.2.9:**  $\mathbb{P}$  ve  $\mathbb{P}'$  herhangi iki projektif düzlem olsun.  $\mathbb{P}$  den  $\mathbb{P}'$  ye  $\mathbb{P}$  nin noktalarını  $\mathbb{P}'$  noktalarına,  $\mathbb{P}$  nin doğrularını  $\mathbb{P}'$  nün doğrularına birebir ve örten olarak dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan bir  $f$  fonksiyonu varsa  $\mathbb{P}$  ve  $\mathbb{P}'$  projektif düzlemlerine *izomorf projektif düzlemler*,  $f$  ye de  $\mathbb{P}$  den  $\mathbb{P}'$  ye bir *izomorfizm* denir. Bir projektif düzlemi kendisine dönüştüren izomorfizme *kolinasyon* veya *otomorfizm* adı verilir.

**Teorem 1.2.10:** Bir projektif düzlemin bütün kolinasyonlarının kümesi fonksiyon bileşke işlemine göre bir grup oluşturur (Projektif düzlemlerin tüm kolinasyonlarının oluşturduğu grup  $G(\mathbb{P})$  ile gösterilir).

**Tanım 1.2.11:**  $f$ , bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin bir kolinasyonu olsun.  $\mathbb{P}$  nin bir  $M$  noktasından geçen her  $x$  doğrusu için  $f(x) = x$  ise  $M$  ye  $f$  nin bir *merkezi* denir. Benzer olarak  $\mathbb{P}$  nin bir  $e$  doğrusu üzerindeki her  $X$  noktası için  $f(X) = X$  ise  $e$  ye  $f$  nin bir *ekseni* denir. Eğer  $f$  nin bir  $M$  merkezi ve bir  $e$  ekseni varsa  $f$  ye  $\mathbb{P}$  nin bir  $(M, e)$ -merkezsel kolinasyonu ya da  $(M, e)$ -merkezsel perspektifliği denir. Ayrıca eğer  $M \in e$  ise  $f$  ye *öteleme (translation ya da elation)*,  $M \notin e$  ise  $f$  ye *homoloji* denir.

**Teorem 1.2.12:** Bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin tüm  $(M, e)$ -merkezsel kolinasyonlarının kümesi bir gruptur. Bu grup kısaca  $G(M, e)$  ile gösterilir.



**Tanım 1.2.13:**  $\mathbb{P}$  bir projektif düzlem,  $M$  ve  $e$  de bu düzlemin sırasıyla belli bir nokta ve belli bir doğrusu olsun.  $\mathbb{P}$  de aşağıdaki özelliklerde verilen herhangi  $X$  ve  $Y$  nokta çifti için  $f(X)=Y$  olacak biçimde bir  $f \in G(M, e)$  –merkezsel kolinasyonu varsa  $\mathbb{P}$  düzlemi  $(M, e)$ –geçişkendir denir:

- i)  $X \neq M$  ve  $Y \neq M$ ,
- ii)  $X \notin e$  ve  $Y \notin e$ ,
- iii)  $M, X, Y$  doğrudur

**Teoremi 1.2.14 (Küçük Dezarg Teoremi):**  $\mathbb{P}$  bir projektif düzlem olsun.  $X \in x$  özelliğindeki her  $X$  noktası ile her  $x$  doğrusu ve  $X$  den perspektif olan herhangi  $\{A, B, C\}$  ve  $\{A', B', C'\}$  üçgenleri için  $AB \cap A'B'$  ve  $AC \cap A'C'$  noktaları  $x$  doğrusu üzerinde ise  $BC \cap B'C'$  noktası da  $x$  üzerindedir.

**Tanım 1.2.15:** Küçük Dezarg Teoremini gerçekleyen bir projektif düzleme *Küçük Dezargsel Düzlem* ya da *Moufang Düzlemi* denir.

**Teorem 1.2.16:** Herhangi bir  $\mathbb{P}$  projektif düzlemi için aşağıdaki önermeler eş anlamlıdır:

- i)  $\mathbb{P}$  bir Moufang düzlemidir.
- ii)  $M \in e$  olmak üzere her  $M$  noktası ve her  $e$  doğrusu için  $\mathbb{P}$  düzlemi  $(M, e)$ –geçişkendir .

**Tanım 1.2.17:**  $\mathbb{P}$  bir projektif düzlem,  $e$  de bu düzlemin bir doğrusu olsun. Eğer  $\mathbb{P}$  her  $X \in e$  noktası için  $(X, e)$ –geçişken ise  $\mathbb{P}$  ye  $(e, e)$ –geçişken denir.

**Teorem 1.2.18:** Herhangi bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin Moufang düzlemi olması için gerek ve yeter şart  $d$  ve  $e$  gibi farklı iki doğru için  $(d, d)$ –geçişken ve  $(e, e)$ –geçişken olmasıdır.

## 2. BAZI GEOMETRİK YAPILARIN KOORDİNLANMASI

Geometri de en temel kavram noktadır. Çünkü bütün geometrik kavramlar bir noktalar kümesi olarak düşünülebilir. Bir noktanın sayılarla temsil edilmesi düşüncesi geometride koordinat kavramının doğmasına neden olmuş; koordinatlar yardımıyla da geometrik büyüklükler ve kavramların cebirsel yoldan açıklanması mümkün olabilmektedir. Koordinatlar kullanılarak geometrik problemlerin cebirsel problemlere dönüştürülmesi ve çözümlenmesi “analitik geometri” olarak ortaya çıkmıştır. Bu bölümde düzlem geometride kullanılan bazı koordinatlama çeşitleri, sonra da projektif düzlemlerin koordinatlama çeşitleri tanıtılacaktır.

Öklid Düzleminin koordinatlanması her analitik geometri kitabında bulunabileceği gibi, projektif düzlemlerin koordinatlanması da projektif geometri ile ilgili kitaplarda, önemli olmayan bazı farklarla, bulunabilir. Bu tezde faydalanılan kitapların bir kısmı kaynaklarda ifade edilmiş olup, projektif düzlemler için (Kaya 1992) esas alınmıştır.

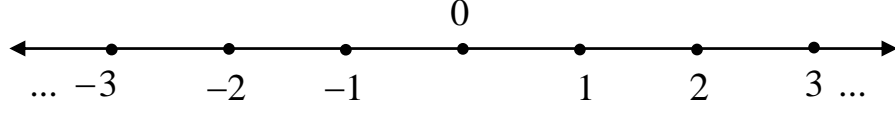
### 2.1. Öklid Düzleminin Koordinatlanması

Öklid düzleminin  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismi ile koordinatlanmasını kısaca inceleyelim.

Önce düzlemin bir doğrusunu ele alalım:

Bir doğrunun noktaları  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesinin elemanlarıyla birebir örten biçimde eşlenebilir. Bunun için doğru üzerinde  $0 \in \mathbb{R}$  ve  $1 \in \mathbb{R}$  sayılarına karşılık gelecek iki nokta seçmek yeter. Şöyle ki: Doğru üzerinde 0 dan itibaren 1 in bulunduğu taraf pozitif, diğer taraf negatif yön olarak kabul edilerek ve 0 ile 1 arasındaki uzaklık birim alınarak, her  $x \in \mathbb{R}$  için bu doğru üzerinde 0 a karşılık gelen noktaya işaretli

uzaklığı  $x$  olan bir tek  $X$  noktası bulunur. Karşıt olarak bu doğru üzerindeki her  $Y$  noktası, bu noktanın sifira karşılık gelen noktaya uzaklığını (işaretiyle birlikte) veren bir tek  $y \in \mathbb{R}$  sayısı belirtir (Bkz. Şekil 2.1.1).

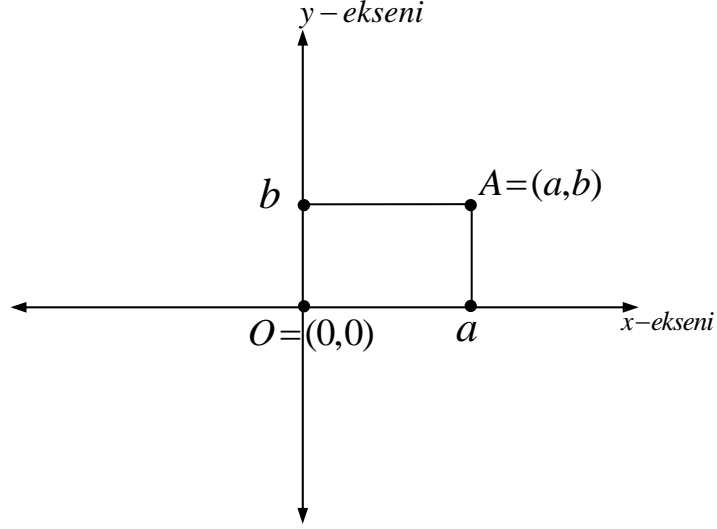


Şekil 2.1.1

Böylece, bu doğrunun noktaları  $\mathbb{R}$  nin elemanlarıyla temsil edilebilir, yani koordinatlanabilir. Bu özellik analitik geometrinin temel ilkesini oluşturur. Çünkü, genel olarak bütün koordinatlamalar -dolayısıyla da analitik geometrideki bütün işlemler-  $\mathbb{R}$  nin elemanlarının bir doğrunun noktalarıyla birebir örten biçimde eşlenmesi demek olan bu ilkeye dayanmaktadır.  $\mathbb{R}$  ye birebir eşlenmiş bir doğruya *sayı doğrusu* denir. Sayı doğrusu tanımından sonra, bir doğrunun herhangi noktasının bir reel sayı olarak ve tersine her reel sayının bu doğru üzerinde bir nokta olarak düşünülebileceği bellidir.

Şimdi düzlemin koordinatlamasına geçebiliriz.

Düzlemde birbirini dik kesen öyle iki doğru seçelim ki, bu doğrulardan birinin pozitif yönü sağa doğru, diğerinin yönü de yukarı doğru olsun. Sağa doğru yönlendirilmiş olan  $x$  eksenine *apsisler eksen*i, yukarı doğru yönlendirilmiş olan  $y$  eksenine *ordinatlar eksen*i, eksenlerin kesiştikleri noktaya *başlangıç noktası* veya *orijin* adı verilir. Bu eksenleri birer sayı doğrusu olarak düşünelim. Bu iki eksenin belirttiği düzleme *analitik düzlem* denir.



Şekil 2.1.2

Analitik düzlemde bir  $A$  noktasını alalım.  $A$  noktasından  $x$  ve  $y$  eksenlerine dikmeler çizelim. Dikmenin  $x$  eksenini kestiği noktaya karşılık gelen sayı  $a$ ,  $y$  eksenini kestiği noktaya karşılık gelen sayı  $b$  olsun.  $A$  noktası bu  $(a,b)$  ikilisi ile gösterilir.  $a$  sayısına  $A$  nın *apsisi*,  $b$  sayısına da  $A$  nın *ordinatı* denir.  $(a,b)$  ikilisine  $A$  noktasının *koordinatları* adı verilir (Bkz. Şekil 2.1.2).

$a, k, m \in \mathbb{R}$  olmak üzere düzlemin doğrularını iki temel sınıfta inceleyebiliriz:

$y = mx + k$  denklemini sağlayan  $(x, y)$  noktalarının kümesi olan doğrular ve  $x = a$  denklemini sağlayan  $(x, y)$  noktalarının kümesi olan doğrular.

$y = mx + k$  denklemleri bir doğruada  $m$  sabitine *doğrunun eğimi* denir. Bu sayı doğrunun  $x$  eksenine ile yaptığı açının tanjantına eşittir.

$x = a$  biçimindeki  $y$  – eksenine paralel doğruların eğimi  $\infty \notin \mathbb{R}$  dir.

Özel olarak  $x$  – eksenine  $y = 0$  ve  $y$  – eksenine  $x = 0$  denklemi ile gösterilir.

$x$  – eksenine ve ona paralel doğruların eğiminin 0 sayısı ve  $y$  – eksenine ile ona paralel doğruların eğiminin  $\infty$  olduğunu vurguluyoruz. Böylece reel 2-uzay denilen Öklid

düzlemini,  $\mathbf{N}$  noktalar ve  $\mathbf{D}$  doğrular kümesi olmak üzere  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  uzayı olarak alabiliriz.

$\mathbf{N} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  ve  $\mathbf{D}$  ise  $y = mx + k$  ve  $x = a$  denklemleriyle tanımlanan doğrular kümesi olarak alınır. Özel olarak,  $y = mx + k$  denklemleriyle tanımlanan bir doğruyu  $[m, k]$ ,  $x = a$  denklemleriyle tanımlanan bir doğruyu da  $[a]$  ile temsil edersek;  $\mathbf{D} = \{[m, k] \mid m, k \in \mathbb{R}\} \cup \{[a] \mid a \in \mathbb{R}\}$  olur ve burada doğrular birer nokta kümesi olarak  $[m, k] = \{(x, mx + k) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $[a] = \{(a, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  biçimindedir.

Düzlemde ortak hiçbir noktası bulunmayan iki doğruya *paralel doğrular* denir.

$\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  reel 2-uzayının aşağıdaki aksiyomları sağladığı kolayca görülür:

- A1) Farklı iki nokta tam olarak bir doğru üzerindedir.
- A2) Bir doğruya üzerinde olmayan bir noktadan tam olarak bir tek paralel çizilebilir.
- A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Genelde bu aksiyomları sağlayan bir çok  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$  uzayı vardır ve bunlara *afin düzlem* adı verilir.

$\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  Öklid düzleminde farklı iki noktaya karşılık bunlardan geçen (dolayısıyla bu noktaların belirlediği) bir tek doğrunun var olduğunu göstermek kolaydır. Ancak farklı iki doğru verildiğinde her ikisinin de üzerinde bulunan bir noktadan (yani bunların belirlediği bir noktadan) bahsetmek her zaman mümkün değildir. Bu Öklid düzlemi (genelde afin düzlem) için bir eksiklik olarak kabul edilir.  $\mathbf{U} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  uzayı aşağıdaki gibi genişletilerek elde edilen reel projektif düzlem bu eksikliği ortadan kaldırmaktadır.

Şimdi Öklid düzlemine bir takım yeni noktalar ve bütün bu yeni noktaları üzerinde bulduran bir tek doğru katarak reel projektif düzlemin nasıl elde edildiğini görelim:

Birbirine paralel bütün  $y = mx + k$  doğrularının üzerine  $(m)$  ile koordinatlanan yeni bir nokta katılır.  $y$ -eksenine paralel tüm doğruların üzerine de yeni nokta olarak  $(\infty)$  katılır. Böylece her doğru bir nokta ile genişletilmiş olunur. Bu yeni noktaların her birine bir *ideal nokta* ya da *sonsuzdaki nokta* denir. İdeal noktaların tümünün kümesi  $[\infty]$  sembolü ile gösterilir ve *ideal doğru* ya da *sonsuzdaki doğru* adı verilerek düzleme ilave edilir. Elde edilen yeni uzay  $(\mathbf{N}', \mathbf{D}')$  olarak gösterilirse  $\mathbf{N}'$  ve  $\mathbf{D}'$  kümelerinin

$$\mathbf{N}' = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(m) \mid m \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty)\}$$

$$\mathbf{D}' = \{[m, k] \cup \{(m)\} \mid m, k \in \mathbb{R}\} \cup \{[a] \cup \{(\infty)\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{[\infty]\}$$

şeklinde yazılabileceği aşıkardır.

Böylece kısaca  $[m, k]$  ile gösterilen  $m$  eğimli  $y = mx + k$  denklemlerle bir doğruya  $(m)$  noktası katılarak  $[m, k] \cup \{(m)\}$  doğrusu ve  $[a]$  ile gösterilen  $\infty$  eğimli  $x = a$  doğrusuna da  $(\infty)$  noktası katılarak  $[a] \cup \{(\infty)\}$  doğrusu elde edilmiş olur.

Yukarıdaki gibi elde edilen reel projektif düzlemin,

**P1)** Her  $M, N \in \mathbf{N}$ ,  $M \neq N$  için  $M \in d$  ve  $N \in d$  olacak şekilde bir tek  $d \in \mathbf{D}$  doğrusu vardır.

**P2)** Her  $c, d \in \mathbf{D}$  için  $N \in c$  ve  $N \in d$  olacak şekilde en az bir  $N \in \mathbf{N}$  noktası vardır.

**P3)** Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Nokta ve doğruları  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismi ile koordinatlanan bu düzlem, kısaca  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  sembolü ile gösterilir (2-boyutlu reel projektif uzay).

Bundan sonra, kısalığın hatırı için, sembolü kötüye kullanarak  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  nin  $[m, k] \cup \{(m)\}$  ve  $[a] \cup \{(\infty)\}$  doğrularını reel 2-uzaydaki gibi  $[m, k]$  ve  $[a]$  sembolleri ile göstereceğiz. Projektif düzlemin  $(m)$  ideal noktasından geçen doğrularından tam olarak bir tanesi orijinden geçer. Bunu temsilci olarak alıyoruz. Bu doğrunun  $x = 1$  doğrusunu kestiği nokta  $(1, m)$  dir. O halde  $(m)$  ideal noktasını, orijini bu  $(1, m)$  noktasına birleştiren doğru ile dolayısıyla  $(1, m)$  noktası ile belirleyebiliriz.

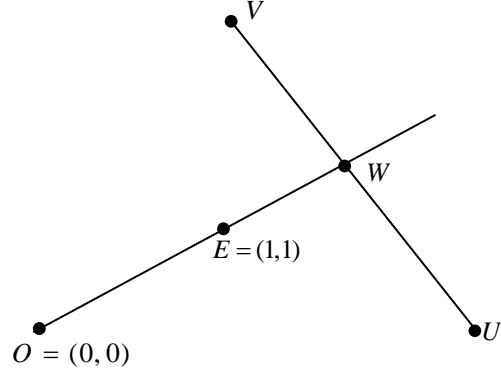
## 2.2. Projektif Düzlemlerin Üçlü Halkalarla Koordinatlanması

Reel projektif düzlemin genellemesi olarak bakabileceğimiz geometrik yapılar vardır ki bunlara *projektif düzlem* denir. Noktalar kümesi  $\mathbf{N}$  ve doğrular kümesi  $\mathbf{D}$  olan genel bir projektif düzlemi  $\mathbb{P} = (\mathbf{N}, \mathbf{D})$  sembolü ile göstereceğiz. Aslında bir *projektif düzlem*  $\mathbf{P1}$ ,  $\mathbf{P2}$ ,  $\mathbf{P3}$  aksiyomlarını sağlayan bir  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$  uzayıdır. Bu uzayın tüm doğrularının nokta sayısı eşit olduğu gibi, her noktasından da, bir doğru üzerindeki nokta sayısı kadar doğru geçer. Bu sayı sonlu da, sonsuz da olabilir. Eğer  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin bir doğrusu üzerinde sonlu  $n+1$  tane nokta varsa  $n$  sayısına,  $\mathbb{P}$  nin *mertebesi* denir.

Mertebesi  $n$  olan bir projektif düzlemin toplam nokta ve doğru sayısı eşit olup  $n^2 + n + 1$  tanedir. Sonlu  $n$  mertebeli bir projektif düzlemin nokta ve doğruları kardinalitesi  $n$  olan, 0 ve 1 ile gösterilen iki elemanı da kapsayan bir  $\mathbf{S}$  kümesi kullanılarak,  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  reel projektif düzleminin koordinatlamasına benzer olarak, aşağıdaki biçimde koordinatlanır. Bu şekildeki koordinatlamaya *projektif düzlemlerin üçlü halkalarla kartezyen biçimde koordinatlaması* denir.

### 2.2.1 Projektif düzlemlerin noktalarının koordinatlanması

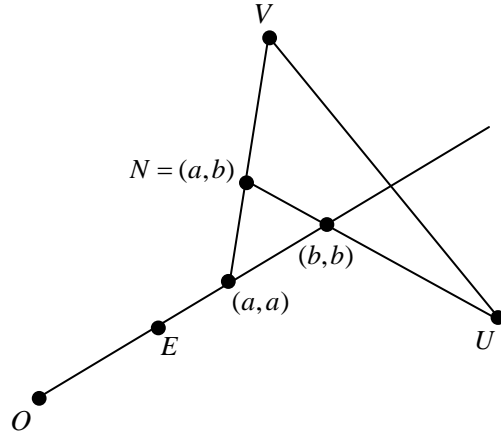
$\mathbb{P}$  bir projektif düzlem olduğundan  $\mathbf{P3}$  aksiyomu gereği herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.  $O, E, U, V$  bu özellikte seçilen dört nokta olsun.  $OE$  doğrusu üzerinde  $W = OE \cap UV$  den farklı her bir noktaya  $\mathbf{S}$  nin bir tek  $a$  elemanı kullanılarak  $\mathbf{S}^2$  nin  $(a, a)$  tipindeki bir elemanı eşlensin. Özel olarak  $O = (0, 0)$  ve  $E = (1, 1)$  alınsın (Bkz. Şekil 2.2.1).



Şekil 2.2.1

$\mathbb{P}$  nin noktaları koordinatlandırırken üç durum söz konusudur:

**1.Durum:**  $N \notin UV$  olsun.

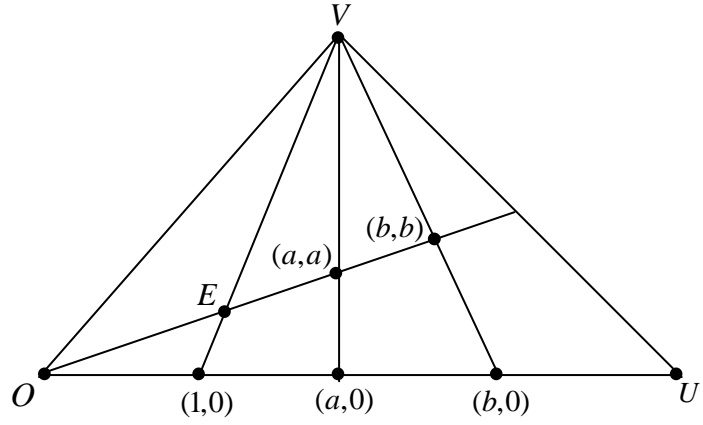


Şekil 2.2.2

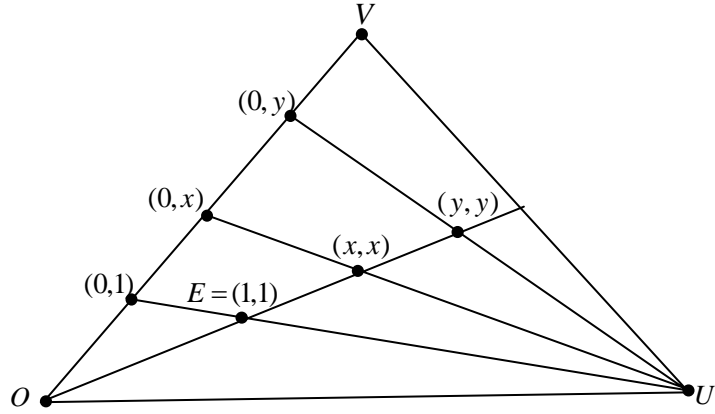
$NV$  doğrusu ile  $OE$  doğrusu farklı doğrular olduğundan arakesitleri bir tektir. Bu arakesit noktasının koordinatları  $(a, a)$  olsun. Benzer biçimde  $NU \cap OE$  noktası da bir tek olup koordinatları  $(b, b)$  ise  $N = (a, b)$  koordinatları verilir (Bkz. Şekil 2.2.2).

Özel olarak  $OU$  doğrusu üzerindeki  $U$  dışındaki noktalar  $(a, 0)$  ve  $OV$  doğrusu üzerindeki  $V$  dışındaki noktalar ise  $(0, b)$  biçiminde koordinatlara sahip olur. Bunlar için aşağıdaki şekiller çizilebilir.





Şekil 2.2.3

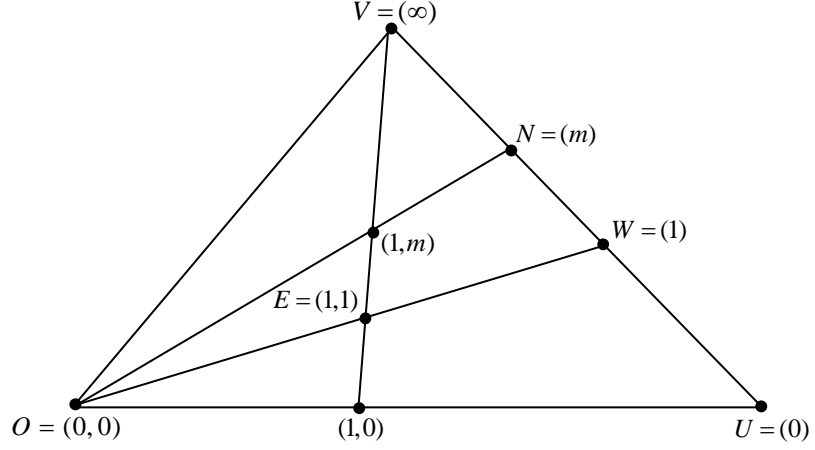


Şekil 2.2.4

**2.Durum:**

$N \in UV, N \neq V$  olsun.

Dikkat edilirse  $VE$  doğrusu üzerindeki noktaların ilk bileşenleri "1" dir. Bu noktaları belirleyici olan, asıl, ikinci bileşenleridir.  $NO \cap EV = (1, m)$  ise  $N$  ye  $(m)$  koordinatı karşılık tutulur.



Şekil 2.2.5

Bu durumda  $U = (0)$  ve  $W = OE \cap UV = (1)$  koordinatına sahip olur (Bkz. Şekil 2.2.5).

### 3.Durum:

$N = V$  ise  $\infty \notin \mathbf{S}$  olmak üzere  $V$  ye  $(\infty)$  koordinatı verilir.

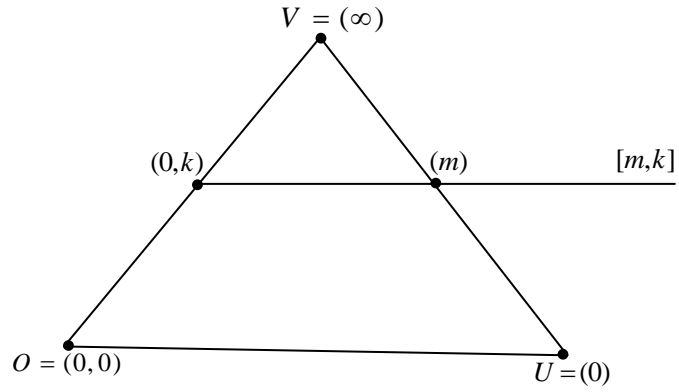
## 2.2.2 Projektif düzlemin doğrularının koordinatlanması

Bir  $d$  doğrusu için de, noktalarda olduğu gibi, üç durum söz konusudur:

### 1.Durum

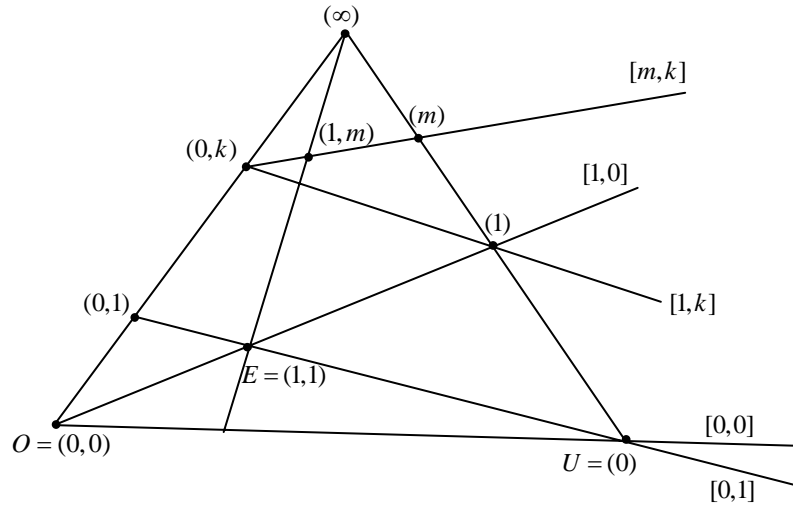
$V \notin d$  olsun.

$d \cap UV = (m)$  ve  $d \cap OV = (0, k)$  olmak üzere  $d$  doğrusu  $[m, k]$  şeklinde koordinatlanır (Bkz. Şekil 2.2.6).



Şekil 2.2.6

Aşağıdaki şekilde bu tip doğruya çeşitli örnekler verilmiştir.



Şekil 2.2.7

### 2.Durum:

$V \in d$  ve  $d \neq UV$  olsun.

$d \cap OU = (k,0)$  olmak üzere  $d$  doğrusu  $[k]$  şeklinde koordinatlanır (Bkz.Şekil 2.2.8).

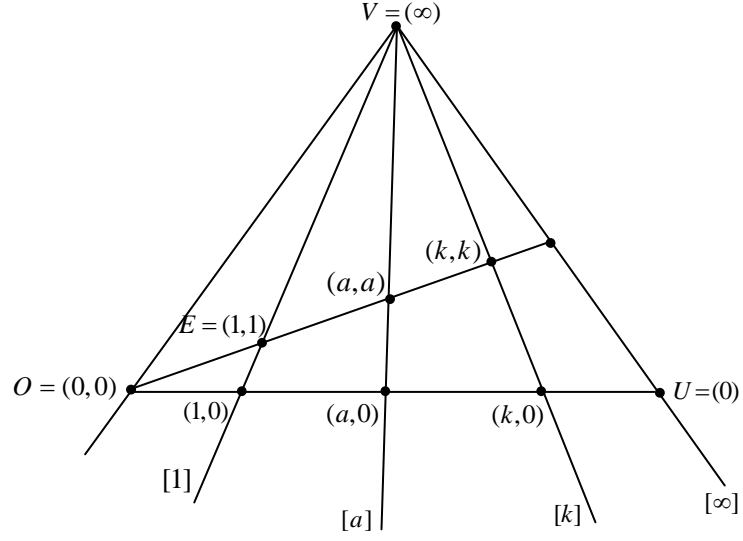
Bu tip doğrular üzerindeki tüm noktaların 1. bileşenleri doğrunun koordinatı ile aynıdır.

### 3.Durum:

$d = UV$  olsun.

Bu durumda  $d$  doğrusuna  $[\infty]$  koordinatı verilir.

Son iki durum için aşağıdaki şekil açıklayıcı olacaktır.



Şekil 2.2.8

### 2.2.3 Projektif düzlem için üzerinde bulunma bağıntısının belirlenmesi ve düzlemsel üçlü halkaların elde edilmesi

Nokta ve doğruların koordinatlarının belirlenmesinden sonra üzerinde olma bağıntısı için aşağıdaki aşikar sonuçlar elde edilir.

Her  $m, k, x, y \in \mathbf{S}$  için

$$(\infty) \in [\infty]; (\infty) \in [k]; (\infty) \notin [m, k]$$

$$(x) \in [\infty]; (x) \notin [k]; (x) \in [m, k] \Leftrightarrow m = x$$

$$(x, y) \notin [\infty]; (x, y) \in [k] \Leftrightarrow x = k$$

dır.

Genel durum olan  $(x, y)$  noktasının  $[m, k]$  doğrusu üzerinde bulunup bulunmama şartlarını belirlemek için  $\mathbf{S}^3$  den  $\mathbf{S}$  ye tanımlı ve  $\forall (m, x, k) \in \mathbf{S}^3$  için  $T(m, x, k) = y \Leftrightarrow (x, y) \in [m, k]$  özelliğinde bir  $T$  dönüşümü tanımlanır.

Eğer her bir  $(m, x, k)$  sıralı üçlüsü için  $y = T(m, x, k)$  olacak biçimde bir tek  $y \in \mathbf{S}$  olduğu gösterilirse  $T$  nin  $\mathbf{S}$  üzerinde bir üçlü işlem olduğu ispatlanmış olunur. Tanımdan  $(x, y) \in [m, k]$  dir. Ayrıca  $(x, y) \in [x]$  dir. Dolayısıyla  $(x, y) \in [m, k] \cap [x]$  dir.

$\mathbb{P}$  de bu şekilde bir tek  $(x, y)$  noktası var olduğundan  $T(m, x, k) = y$  olacak şekilde  $y \in \mathbf{S}$  de bir tektir.

Biz bundan sonra herhangi bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin homogen olmayan koordinatlamasından bahsederken, yukarıdaki gibi belirlenen  $(\mathbf{S}, T)$  sistemine  $\mathbb{P}$  nin *düzlemsel üçlü halkası* diyeceğiz.

Herhangi bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin  $(\mathbf{S}, T)$  düzlemsel üçlü halkasının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülebilir (Kaya 1992).

**T1:** Her  $m, x, k \in \mathbf{S}$  için  $T(0, x, k) = k = T(m, 0, k)$  dır;

**T2:** Her  $m, x \in \mathbf{S}$  için  $T(m, 1, 0) = m$  ve  $T(1, x, 0) = x$  dır;

**T3:** Verilen her bir  $m, x, y \in \mathbf{S}$  üçlüsü için  $T(m, x, k) = y$  olacak biçimde bir tek  $k \in \mathbf{S}$  vardır;

**T4:**  $m_1 \neq m_2$  olmak üzere verilen  $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbf{S}$  için  $T(m_1, x, k_1) = T(m_2, x, k_2)$  olacak biçimde bir tek  $x \in \mathbf{S}$  vardır;

**T5:**  $x_1 \neq x_2$  olmak üzere verilen  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{S}$  için  $T(m, x_1, k) = y_1$  ve  $T(m, x_2, k) = y_2$  olacak biçimde  $\mathbf{S}$  de bir tek  $m, k$  eleman çifti vardır.

**Tanım 2.2.1:** Bir  $T : \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}$  üçlü işlemi yukarıdaki **T1, T2, T3, T4, T5** özelliklerini sağlıyorsa  $(\mathbf{S}, T)$  sistemine bir *üçlü halka* denir.

Yukarıda verdiklerimiz her projektif düzlemden bir düzlemsel üçlü halka üretilebildiğini göstermektedir. Bunun karşıtında doğru olduğu aşağıdaki teoreme verilecektir.

**Teorem 2.2.2:** Her  $(\mathbf{S}, T)$  üçlü halkası bir düzlemsel halkadır, yani verilen her  $(\mathbf{S}, T)$  üçlü halkası için öyle bir  $\mathbb{P}$  projektif düzlemi vardır ki onun düzlemsel üçlü halkası  $(\mathbf{S}, T)$  dir. (Bu projektif düzlem  $\mathbb{P}_{(\mathbf{S}, T)}$  ile gösterilir.)

**İspat:**  $(\mathbf{S}, T)$  verilen bir üçlü halka ve  $\infty$  da  $\mathbf{S}$  de bulunmayan bir eleman olsun.

$(\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in)$  geometrik yapısının nokta ve doğru kümeleri sırasıyla

$$\mathbf{N} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{S}\} \cup \{(x) : x \in \mathbf{S}\} \cup \{(\infty)\},$$

$$\mathbf{D} = \{[m, k] : m, k \in \mathbf{S}\} \cup \{[k] : k \in \mathbf{S}\} \cup \{[\infty]\}$$

biçiminde ve  $\in \subset \mathbf{N} \times \mathbf{D}$  üzerinde bulunma bağıntısına da her  $x, y, m, k \in \mathbf{S}$  için

$$(x, y) \in [m, k] \Leftrightarrow T(m, x, k) = y$$

$$(x, y) \in [k] \Leftrightarrow x = k$$

$$(x) \in [m, k] \Leftrightarrow m = x$$

$$(x) \in [\infty]$$

$$(\infty) \in [\infty]$$

$$(\infty) \in [k]$$

biçiminde tanımlansın. Bu tanımlamadan

$$(x, y) \notin [\infty]$$

$$(x) \notin [k]$$

$$(\infty) \notin [m, k]$$

olduğu da açıkça görülür.

Şimdi  $(\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in)$  nun projektif düzlem olduğunu gösterelim:

**P1)**  $\forall N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ ,  $N_1 \neq N_2$  için bir tek  $N_1 N_2$  doğrusunun varlığı gösterilmelidir. **P1)**

aksiyomunun sağlandığını göstermek için  $N_1$  ve  $N_2$  noktalarının konumlarına göre 3 durum söz konusu olur.

**1. Durum:** Noktaların her ikisi de iki bileşenli olsun.

**a)**  $N_1 = (x_1, y_1)$  ve  $N_2 = (x_2, y_2)$  biçiminde alınsın. Burada önce  $x_1 = x_2$  olduğu kabul edilsin. O zaman  $N_1 N_2 = [x_1] = [x_2]$  dir.  $N_1 \in [x_1]$  ve  $N_2 \in [x_2]$  olup  $N_1$  ve  $N_2$  yi birlikte bulunduran  $[m, k]$  biçiminde doğru yoktur. Aksi halde

$$N_1 \in [m, k] \Leftrightarrow y_1 = T(m, x_1, k) \text{ ve}$$

$N_2 \in [m, k] \Leftrightarrow y_2 = T(m, x_2, k) = T(m, x_1, k)$  olması gerekir ki bu  $T(m, x_1, k)$  nın  $y_1$  ve  $y_2$  gibi farklı iki değer alması demektir ki bu  $T$  dönüşümünün üçlü işlem olması ile çelişir.

**b)** Şimdi de  $N_1 = (x_1, y_1)$  ve  $N_2 = (x_2, y_2)$  noktaları için  $x_1 \neq x_2$  olduğu kabul edilsin.  $N_1 N_2$  doğrusu  $[k]$  tipinde bir doğru olamaz. Ayrıca bu noktaların  $[\infty]$  doğrusu üzerinde bulunmadığı da bilinmektedir.  $N_1 N_2 = [m, k]$  biçiminde bir doğru olmalıdır.

$$N_1 \in [m, k] \Leftrightarrow y_1 = T(m, x_1, k) \text{ ve}$$

$$N_2 \in [m, k] \Leftrightarrow y_2 = T(m, x_2, k) \text{ dir.}$$

$x_1 \neq x_2$  iken **T5** özelliği gereği bu özellikte bir tek  $[m, k]$  doğrusu vardır.

**2. Durum:** Noktaların birisi tek öbürü iki bileşenli olsun.

$N_1 = (x_1)$  ve  $N_2 = (x_2, y_2)$  olduğu kabul edilsin. Üzerinde bulunma bağıntılarından  $(x_1) \notin [a]$  ve  $(x_2, y_2) \notin [\infty]$  olduğu bilinmektedir. Bu durumda  $N_1 N_2$  doğrusu  $[m, k]$  biçiminde bir doğru olmalıdır. Böylece

$N_1 \in [m, k] \Leftrightarrow m = x_1$  ve  $N_2 \in [m, k] \Leftrightarrow y_2 = T(x_1, x_2, k)$  olduğu bilinmektedir. Bu durumda **T3** özelliği gereği bir tek  $k \in \mathbf{S}$  vardır. Dolayısıyla  $N_1 N_2 = [x_1, k]$  şeklinde tek türlü belirlidir. Eğer  $N_1 = (\infty)$  ise  $N_1 N_2 = (\infty)(x_2, y_2) = [x_2]$  dir.

**3. Durum:**  $N_1$  ve  $N_2$  noktalarının her ikisi de tek bileşenli olsun.

O zaman  $N_1 N_2 = [\infty]$  olur.

**P2** nin ispatı **P1** in ispatının dualidir.

**P3)** Herhangi üçü doğrudan olmayan dört noktanın var olduğu gösterilmelidir.

$(0,0), (1,1), (0)$  ve  $(\infty)$  noktaları göz önüne alınırsa, bu noktaların herhangi üçü doğrudan değildir. Üzerinde olma bağıntısının tanımı kullanılarak bu noktalardan geçen doğruların farklı olduğu aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$(0,0) \cup (0) = [0,0] \text{ dir.}$$

$$(0,0) \cup (1,1) = [m,k] \text{ doğrusu olsun.}$$

$(0,0) \in [m,k] \Leftrightarrow 0 = T(m,0,k)$  olup  $T1$  gereği  $k=0$  ve  $(1,1) \in [m,k] \Leftrightarrow 1 = T(m,1,k)$  olup  $T2$  gereği  $m=1$  dir. Dolayısıyla  $(0,0) \cup (1,1) = [1,0]$  olarak bulunur.

$$(0,0) \cup (\infty) = [0] \text{ dir.}$$

$$(1,1) \cup (0) = [m,k] \text{ doğrusu olsun.}$$

$(0) \in [m,k] \Leftrightarrow m=0$  ve  $(1,1) \in [0,k] \Leftrightarrow 1 = T(0,1,k)$  olup  $T1$  gereği  $k=1$  dir. Dolayısıyla  $(1,1) \cup (0) = [0,1]$  olarak bulunur.

$$(\infty) \cup (0) = [\infty] \text{ dir.}$$

Son olarak da  $(1,1) \cup (\infty) = [1]$  olduğu açıktır.

Projektif düzlemler için bir çok koordinatlama yöntemleri vardır ve bunlar genellikle birbirlerinden az çok farklılık gösterirler. Bu farklılık çoğunlukla hem  $\{O, E, U, V\}$  koordinatlama dörtgeninin seçilişinden hem de  $T$  üçlü işleminin farklı biçimde tanımlanmasından ileri gelmektedir. Burada anlatılan koordinatlama yöntemi ilk kez M.Hall (Hall 1943) tarafından verilenin G.Pickert (Pickert 1955) tarafından değiştirilmiş biçimidir. Hall'in koordinatlama yöntemi de literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır (Albert 1968). Yine yaygın olarak kullanılan bir koordinatlama yöntemi için Hughes (Hughes 1973) ya da Bumcrot (Bumcrot 1969) a başvurulabilir.

Eğer Teorem 2.2.2 de  $(0,0) = O$ ,  $(1,1) = E$ ,  $(0) = U$ , ve  $(\infty) = V$  olarak seçilirse bu düzlemin düzlemsel üçlü halkası  $(\mathbf{S}, T)$  olur.

Verilen bir  $(\mathbf{S}, T)$  üçlü halkasının, bu üçlü halkadan elde edilen projektif düzleme ait düzlemsel üçlü halka olması için koordinatlama dörtgeni olarak  $\{(0,0), (1,1), (0), (\infty)\}$  kümesi seçildi. Bir projektif düzlemde  $O, E, U, V$  koordinatlama dörtgeninin değişik seçilmesiyle yapılacak yeni koordinatlama ile doğal olarak öncekinden tamamen farklı bir üçlü halka elde edilebilir.



**Tanım 2.2.3:**  $(\mathbf{S}, T)$  ve  $(\mathbf{S}', T')$  iki üçlü halka olsun.  $\mathbf{S}$  den  $\mathbf{S}'$  ye giden birebir örten ve her  $a, b, c \in \mathbf{S}$  için  $\varphi(T(a, b, c)) = T'(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$  özelliklerine sahip bir  $\varphi: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$  eşlemesine  $(\mathbf{S}, T)$  ve  $(\mathbf{S}', T')$  üçlü halkaları arasında bir *izomorfizm* denir. Aralarında bir  $\varphi$  izomorfizmi bulunan  $(\mathbf{S}, T)$  ve  $(\mathbf{S}', T')$  ye de *izomorf üçlü halkalar* denir.

**Teorem 2.2.4:**  $\mathbb{P}$  ve  $\mathbb{P}'$  herhangi iki projektif düzlem,  $(\mathbf{S}, T)$  ve  $(\mathbf{S}', T')$  de sırasıyla bu düzlemlerin  $\{O, E, U, V\}$  ve  $\{O', E', U', V'\}$  koordinatlama dörtgenlerine göre düzlemsel üçlü halkalar olsun.  $(\mathbf{S}, T)$  ve  $(\mathbf{S}', T')$  üçlü halkalarının izomorf olması için gerek ve yeter koşul  $f(O) = O', f(E) = E', f(U) = U',$  ve  $f(V) = V'$  olacak biçimde bir  $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  izomorfizminin var olmasıdır.

Bu teoremin önemli ve hemen görülebilen bir sonucu şöyle ifade edilebilir.

$\mathbb{P}$  bir projektif düzlem,  $(\mathbf{S}, T)$  bu düzlemin bir  $\{O, E, U, V\}$  koordinatlama dörtgenine göre düzlemsel üçlü halkası ve  $(\mathbf{S}', T')$  de yine  $\mathbb{P}$  nin bir  $\{O', E', U', V'\}$  koordinatlama dörtgenine göre düzlemsel üçlü halkası olsun.  $(\mathbf{S}, T)$  ve  $(\mathbf{S}', T')$  üçlü halkalarının izomorf olması için gerek ve yeter şart  $f(O) = O', f(E) = E', f(U) = U',$  ve  $f(V) = V'$  olacak biçimde bir  $f \in G(\mathbb{P})$  kolonasyonunun var olmasıdır.

Bir Moufang düzleminde kolonasyonlar grubu dört-nokta üzerinde geçişken olduğundan (Çiftçi ve ark. 1988) Moufang düzleminin bütün üçlü halkaları izomorftur.

Bu konuda son olarak herhangi bir  $(\mathbf{S}, T)$  üçlü halkasının  $T$  işleminin özel halleri olarak  $\mathbf{S}$  üzerinde toplama ve çarpma denilen iki ikili işlem tanımlanacaktır. Böylece hem  $(\mathbf{S}, T)$  düzlemsel üçlü halkasının yapısını alışık olduğumuz cebirsel yapılara benzer biçimde ele almak hem de bu üçlü halkaya karşılık gelen projektif düzlemin geometrik yapısının sahip olduğu bazı özelliklerin cebirsel karşılıklarını bulmak mümkün olacaktır. Bu da geometri ve cebir arasında daha önce varlığı çeşitli vesilelerle belirtilen ilginç ilişkilerin bir kısmının açıklanması imkanını verecektir.

**Tanım 2.2.5:** Herhangi bir  $(\mathbf{S}, T)$  üçlü halkasının  $T$  işleminin

$$x + y = T(1, x, y) \text{ ve } x \cdot y = T(x, y, 0)$$

biçiminde tanımlanan özel hallerine sırasıyla,  $\mathbf{S}$  üzerinde *toplama* ve *çarpma ikili işlemleri* denir.

Hem  $(\mathbf{S}, +)$ , hem de  $(\mathbf{S} - \{0\}, \cdot)$  sistemleri aşağıda tanımlanacak yarıgrup kavramının şartlarını sağlarlar. Bu yarıgrupların birim elemanlarının, sırasıyla, 0 ve 1 olduğu görülür.

**Tanım 2.2.6:**  $\mathbf{S}$  bir küme ve  $*$  da  $\mathbf{S}$  üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer.

**L1:** Verilen her  $a, b \in \mathbf{S}$  için  $a * x = b$  denkleminin bir tek  $x \in \mathbf{S}$  çözümü vardır.

**L2:** Verilen her  $a, b \in \mathbf{S}$  için  $x * a = b$  denkleminin bir tek  $x \in \mathbf{S}$  çözümü vardır.

**L3:** Her  $x \in \mathbf{S}$  için  $x * u = u * x = x$  olacak biçimde bir  $u \in \mathbf{S}$  elemanı (*birim eleman*) vardır.

aksiyomları sağlanıyorsa  $(\mathbf{S}, *)$  sistemine bir *yarıgrup* veya *loop* denir.

Eğer  $(\mathbf{S}, +)$  birim elemanı 0 olan bir yarıgrup ve  $(\mathbf{S} - \{0\}, \cdot)$  bir yarıgrup olup her  $x \in \mathbf{S}$  için  $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$  ise  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sistemine *çifte-yarıgrup* denir.

Bir  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  çifte yarıgrupunun bir projektif düzlemi tanımlayacağı dolayısıyla bir üçlü halka olacağı şartları aşağıdaki teorem ile belirlenebilir.

**Teorem 2.2.7:** Herhangi bir  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  çifte yarıgrupunun üçlü işlemi  $T(a, b, c) = ab + c$  biçiminde tanımlı bir üçlü halkadan elde edilen düzlemsel halka olması için gerek ve yeter şartlar şunlardır:

1) Verilen her  $a, b, c, d \in \mathbf{S}$ ,  $a \neq c$  için  $ax + b = cx + d$  olacak biçimde bir tek  $x \in \mathbf{S}$  vardır.

2) Verilen her  $a, b, c, d \in \mathbf{S}$   $a \neq c$  için  $xa + y = b$  ve  $xc + y = d$  sisteminin bir tek  $(x, y) \in \mathbf{S}^2$  çözümü vardır (Kaya 1992).

### 2.3. Lineer Üçlü Halkalar

**Tanım 2.3.1:**  $(\mathbf{S}, T)$  bir üçlü halka olsun. Eğer  $T$  üçlü işlemi her  $a, b, c \in \mathbf{S}$  için  $T(a, b, c) = T(1, T(a, b, 0), c)$  özelliğine sahipse, yani  $+$  ve  $\cdot$  yukarıda tanımlanan ikili işlemler olmak üzere

$$T(a, b, c) = a \cdot b + c$$

özelliğine sahip ise  $(\mathbf{S}, T)$  ye *lineer üçlü halka* denir.

İncelememizde üçlü halkası lineer olan projektif düzlemelerle ilgileniyoruz.

Bir projektif düzlemin geometrik yapısı ile ondan elde edilen  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  çifte-yarıgrupunun cebirsel yapısı arasında çok yakın ilişkiler vardır. Burada bunlardan önemli üç tanesi sadece belirtilmekle yetinilecektir.

**Teorem 2.3.2:** Bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin Moufang düzlemi olması için gerek ve yeter şart  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sisteminin alterne halka olmasıdır.

**Teorem 2.3.3:** Bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin Desarg düzlemi olması için gerek ve yeter şart  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sisteminin bir bölümlü halka olmasıdır.

**Teorem 2.3.4:** Bir  $\mathbb{P}$  projektif düzleminin bir Pappus düzlemi olması için gerek ve yeter şart  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sisteminin bir cisim olmasıdır.

Bir  $\mathbb{P}$  projektif düzlemi non-homogen üçlü koordinatları ile de belirlenebilir. İncelememiz, bu koordinatlar verilip kartezyen koordinatlarla birbirlerine nasıl dönüştürüldüğü gösterilerek tamamlanacaktır.

$(\mathbf{S}, +, \cdot)$  Teorem 2.2.7 deki 1 ve 2 şartlarını sağlayan bir çifte –yarıgrup olsun.  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sistemini kullanarak  $(\mathbf{N}, \mathbf{D}, \epsilon)$  geometrik yapısını aşağıdaki gibi kuralım:

$$\mathbf{N} = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{S}\} \cup \{(1, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbf{S}\} \cup \{(0, 1, 0)\}$$

$$\mathbf{D} = \{[m, 1, k] \mid m, k \in \mathbf{S}\} \cup \{[1, 0, k] \mid k \in \mathbf{S}\} \cup \{[0, 0, 1]\}$$

biçiminde tanımlansın.

$\in \subset \mathbf{N} \times \mathbf{D}$  üzerinde bulunma bağıntısı da her  $x_1, x_2, m, k \in \mathbf{S}$  için

$$(x_1, x_2, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow x_2 = mx_1 + k$$

$$(x_1, x_2, 1) \in [1, 0, k] \Leftrightarrow x_1 = k$$

$$(x_1, x_2, 1) \notin [0, 0, 1]$$

$$(1, x_2, 0) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow x_2 = m$$

$$(1, x_2, 0) \notin [1, 0, k] \text{ ve } (1, x_2, 0) \in [0, 0, 1]$$

$$(0, 1, 0) \in [1, 0, k], (0, 1, 0) \in [0, 0, 1] \text{ ve } (0, 1, 0) \notin [m, 1, k] \text{ şeklindedir.}$$

**Teorem 2.3.5:** Yukarıdaki biçimde tanımlanan  $(\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in)$  geometrik yapısı bir projektif düzlemdir.

**İspat: P1)**  $\forall N_1, N_2 \in \mathbf{N} \quad N_1 \neq N_2$  için bir tek  $N_1 N_2$  doğrusunun varlığı gösterilmelidir. **P1)** aksiyomunun sağlandığını göstermek için  $N_1$  ve  $N_2$  noktalarının konumlarına göre 5 durum söz konusu olur.

**1. Durum:**  $N_1$  ve  $N_2$  noktalarının her ikisi de 3 tipindeki noktalar olsun.

$$N_1 = (x_1, x_2, 1) \text{ ve } N_2 = (y_1, y_2, 1) \text{ olsun.}$$

Eğer  $x_1 = y_1$  ise  $N_1 N_2$  doğrusu 2 ve 3 tipinde olamaz. Dolayısıyla  $N_1 N_2 = [1, 0, k]$  biçiminde olacaktır. O zaman

$$N_1 \in N_1 N_2 \Leftrightarrow x_1 = k \text{ yani } N_1 N_2 = [1, 0, x_1] \text{ olur.}$$

Eğer  $x_1 \neq y_1$  ise  $N_1 N_2$ , 2 tipinde olacaktır. Bu durumda  $N_1 N_2 = [m, 1, k]$  denilsin.

$$N_1 \in N_1 N_2 \Leftrightarrow x_2 = mx_1 + k \text{ ve } N_2 \in N_1 N_2 \Leftrightarrow y_2 = my_1 + k$$

olur ki Teorem 2.2.7 deki 2 şartından bu şekilde bir tek  $(m, k) \in \mathbf{S}^2$  vardır.

**2. Durum:** Noktaların birisi 1 ve diğeri 3 tipinde olsun.  $N_1 = (x_1, x_2, 1)$  ve  $N_2 = (1, y, 0)$  olsun. O zaman  $N_1 N_2$  doğrusu 2 tipinde olmak zorundadır.  $N_1 N_2 = [m, 1, k]$  olsun.

$$N_1 \in N_1 N_2 \Leftrightarrow x_2 = mx_1 + k$$

$$N_2 \in N_1 N_2 \Leftrightarrow y = m$$

denklemleri elde edilir. Buradan da  $k = x_2 - yx_1$  bulunur. O halde  $N_1 N_2 = [y, 1, x_2 - yx_1]$  olur.

**3. Durum:** Noktaların birisi 3 diğeri 2 tipinde olsun.  $N_1 = (x_1, x_2, 1)$  ve  $N_2 = (0, 1, 0)$  olsun. O zaman  $N_1 N_2 = [1, 0, k]$  şeklinde olmak zorundadır. Bu durumda

$$N_1 \in N_1 N_2 \Leftrightarrow x_1 = k \text{ ve } N_1 N_2 = [1, 0, x_1] \text{ olur.}$$

**4. Durum:** Noktaların birisi 2 diğeri 1 tipinde olsun.  $N_1 = (1, x_2, 0)$  ve  $N_2 = (0, 1, 0)$  olsun. Bu durumda  $N_1 N_2 = [0, 0, 1]$  olduğu açıktır.

**5. Durum:** Noktaların her ikisi de 1 tipinde olsun.  $N_1 = (1, x_2, 0)$  ve  $N_2 = (1, y_2, 0)$  olarak alınırsa  $x_2 \neq y_2$  olduğundan  $N_1 N_2 = [0, 0, 1]$  olmak zorundadır.

**P2** nin ispatı **P1** in ispatının dualidir.

**P3-)**  $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$  ve  $(1, 1, 1)$  noktalarının herhangi üçünün doğruduş olmayan dört nokta olduğu açıktır.

**Teorem 2.3.6:**  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  Teorem 2.2.7 deki 1 ve 2 şartlarını sağlayan bir çifte – yarıgrup olsun.  $\mathbf{S}$  nin elemanlarını kullanarak ve  $O = (0, 0)$ ,  $E = (1, 1)$ ,  $U = (0)$ ,  $V = (\infty)$  seçerek kurduğumuz  $\mathbb{P}_{(\mathbf{S}, T)} = (\mathbf{N}', \mathbf{D}')$  projektif düzlemi ile yukarıdaki teoremden verilen non-homogen üçlü koordinatlar ile kurulan  $\mathbb{P} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \epsilon)$  projektif düzlemi izomorftur.

**İspat:**  $\mathbb{P}_{(\mathbf{S}, T)}$  den  $\mathbb{P}$  ye

$$\begin{aligned}
(x, y) &\rightarrow (x, y, 1) \\
(x) &\rightarrow (1, x, 0) \\
(\infty) &\rightarrow (0, 1, 0) \\
f: [m, k] &\rightarrow [m, 1, k] \\
[k] &\rightarrow [1, 0, k] \\
[\infty] &\rightarrow [0, 0, 1]
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $f$  fonksiyonunun iki düzlemin noktalarından oluşan kümeler arasında birebir ve örten olduğu açıktır.

$f$  fonksiyonunun üzerinde olma bağıntısını koruduğunu gösterelim.

$\forall (x, y) \in \mathbf{N}'$ ,  $\forall [m, k] \in \mathbf{D}'$  ise  $(x, y) \in [m, k]$  için  $y = mx + k$  denklemi geçerli olup, buradan  $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$  yani  $f(x, y) \in f([m, k])$  elde edilir.

$(x, y) \in [k] \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow (x, y, 1) \in [1, 0, k] \Leftrightarrow f(x, y) \in f([k])$  sonucu elde edilir.

$(x, y) \notin [\infty]$  olduğu gibi  $(x, y, 1) \notin [0, 0, 1]$  yani  $f(x, y) \notin f([\infty])$  olur.

Üzerinde olma bağıntısının diğer hallerde de geçerli olduğu benzer biçimde kolayca görülür.

O halde  $f$ ,  $\mathbb{P}_{(\mathbf{S}, T)}$  projektif düzleminden  $\mathbb{P}$  ye bir izomorfizmdir. Dolayısıyla iki düzlem izomorftur.

Teorem 2.2.7 deki 1 ve 2 şartlarını sağlayan  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  çifte yarıgrubu üzerine;

$$\mathbf{N} = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{S}\} \cup \{(1, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbf{S}\} \cup \{(0, 1, 0)\}$$

$$\mathbf{D} = \{[m, 1, k] \mid m, k \in \mathbf{S}\} \cup \{[1, 0, k] \mid k \in \mathbf{S}\} \cup \{[0, 0, 1]\}$$

alınarak kurulan  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$  sistemi için üzerinde bulunma bağıntısı  $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{N}$  ve  $\forall d = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbf{D}$  için  $X \circ d \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$  biçiminde tanımlanarak elde edilen  $\Pi = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \circ)$  geometrik yapısının da bir projektif düzlem olduğu, üstelik  $\mathbb{P}$  ile  $\Pi$  arasında noktalar için  $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$  şeklinde ve  $\mathbb{P}$  nin doğrularından  $\Pi$  nin doğrularına

$$[m, 1, k] \rightarrow [-m, 1, -k]$$

$$g : [1, 0, k] \rightarrow [1, 0, -k]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0, 0, 1]$$

şeklinde tanımlı  $g$  dönüşümünün  $\mathbb{P}$  ile  $\Pi$  projektif düzlemleri arasında bir izomorfizm olduğu iyi bilinmektedir.

O halde  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sistemi üzerine projektif düzlemini koordinatlamakta bu metotlardan istediğimizi seçmemizin bir sakıncası yoktur.

Son olarak  $(\mathbf{S}, +, \cdot)$  sistemi bir bölümlü halka iken, her nokta ve her doğrusunun  $\mathbf{S}$  nin kardinalitesinin bir eksiği sayısınca temsilinin var olduğu, aşağıdaki gibi kurulan  $(\mathbf{N}'', \mathbf{D}'', I)$  geometrik yapısının da bir projektif düzlem olduğunu söyleyebiliriz.

$$\mathbf{N}'' = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbf{S}, i = 1, 2, 3; (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0), (x_1, x_2, x_3) = (x_1 r, x_2 r, x_3 r), r \in \mathbf{S}, r \neq 0\}$$

$$\mathbf{D}'' = \{[a_1, a_2, a_3] \mid a_i \in \mathbf{S}, i = 1, 2, 3; [a_1, a_2, a_3] \neq [0, 0, 0], [a_1, a_2, a_3] = [s a_1, s a_2, s a_3], s \in \mathbf{S}, s \neq 0\}$$

$\mathbf{N}'' \times \mathbf{D}''$  kümesinin  $I$  ile gösterilen ve üzerinde bulunma bağıntısı adı verilen altkümesi  $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{N}''$  ve  $\forall [a_1, a_2, a_3] \in \mathbf{D}''$  için

$$(x_1, x_2, x_3)I[a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

**Teorem 2.3.7:**  $\mathbf{N}''$ ,  $\mathbf{D}''$  ve  $I$  yukarıdaki gibi tanımlanmak şartıyla  $(\mathbf{N}'', \mathbf{D}'', I)$  geometrik yapısı bir projektif düzlemdir.

**İspat:** **P1, P2, P3** aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

Önce  $(\mathbf{N}'', \mathbf{D}'', I)$  sisteminde üzerinde bulunma bağıntısının iyi tanımlı olduğu yani nokta ve doğru gösteriminden bağımsız olduğu gösterilsin:

$r \neq 0 \neq s$  olup  $\mathbf{S}$  bölümlü halkasında  $a, b \in \mathbf{S}$ ,  $a \cdot b = 0$  iken ya  $a = 0$  ya da  $b = 0$  olduğu kullanılarak

$$(x_1 r, x_2 r, x_3 r)I[s a_1, s a_2, s a_3] \Leftrightarrow (s a_1)(x_1 r) + (s a_2)(x_2 r) + (s a_3)(x_3 r) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3))r = 0$$

$$\Leftrightarrow s(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in [a_1, a_2, a_3]$$

**P1)**  $\forall X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{N}''$  için bir tek  $XY = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbf{D}''$  doğrusunun var olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir. Burada  $x_1, x_2, x_3$  elemanlarının üçü birden sıfır olamaz. Bu yüzden  $x_1 \neq 0$  alınabilir. O halde

$r = x_1^{-1}$  için  $(x_1, x_2, x_3)x_1^{-1} = (x_1x_1^{-1}, x_2x_1^{-1}, x_3x_1^{-1}) = (1, x_2', x_3')$  olduğundan  $x_1 = 1$  alınabilir. Böylece

$$X I XY \Leftrightarrow a_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (2.1a)$$

$$Y I XY \Leftrightarrow a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0 \quad (2.1b)$$

denklemleri elde edilir.

Burada (2.1a) denkleminde  $a_1 = -a_2x_2 - a_3x_3$  bulunur. Bu  $a_1$  değeri (2.1b) denkleminde yerine yazılarak

$$(-a_2x_2 - a_3x_3)y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0 \quad (2.2)$$

bulunur. Bu denklem aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$a_2(y_2 - x_2y_1) + a_3(y_3 - x_3y_1) = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir. (2.3) denkleminde  $y_2 - x_2y_1 = 0$  ve  $y_3 - x_3y_1 = 0$  olamaz. Aksi halde  $y_2 = x_2y_1$  ve  $y_3 = x_3y_1$  olur.  $x_1 = 1$  alındığından  $y_1 = 1y_1 = x_1y_1$  yazılabilir ki bu da  $i = 1, 2, 3$  için  $y_i = x_iy_1$  demektir. Bu durumda  $X = Y$  çelişmesine varılır.  $y_2 - x_2y_1 \neq 0$  kabul edilsin. Bu kabul altında  $a_3 = 0$  olamaz. Eğer  $a_3 = 0$  olsaydı (2.3) denkleminde  $a_2(y_2 - x_2y_1) = 0$  bulunurdu.  $y_2 - x_2y_1 \neq 0$  kabulünden de  $a_2 = 0$  elde edilir. Bulunan değerler (2.1a) denkleminde kullanılırsa  $a_1 = 0$  olur ki bu da  $XY = [0, 0, 0]$  çelişmesini verir. O halde  $y_2 - x_2y_1 \neq 0$  iken  $a_3 \neq 0$  olmak zorundadır. Böylece  $a_3 = 1$  alınabilir. (2.3) denkleminde bu değerler yerine konulursa  $a_2 = (x_3y_1 - y_3)(y_2 - x_2y_1)^{-1}$  ve  $a_1$  ile  $a_2$  değerleri (2.1a) denkleminde yerine yazılırsa  $a_1 = (y_3 - x_3y_1)(y_2 - x_2y_1)^{-1}x_2 - x_3$  bulunur.



Böylece  $XY = [(y_3 - x_3y_1)(y_2 - x_2y_1)^{-1}x_2 - x_3, (x_3y_1 - y_3)(y_2 - x_2y_1)^{-1}, 1]$  olarak bulunmuş olur.

Dikkat edilirse burada  $y_3 - x_3y_1 \neq 0$  iken  $a_2 \neq 0$  olup işlemler benzer şekilde yapılırsa  $XY$  doğrusunun yine tek türlü bulunacağı görülür.

**P2)** “Farklı iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.” önermesi **P1** in duali olup **P1** in ispatı için verilen ifadelerin dualleri alınarak **P2** ispatlanabilir.

**P3)**  $N_1 = (1, 0, 0)$ ,  $N_2 = (0, 1, 0)$ ,  $N_3 = (0, 0, 1)$  ve  $N_4 = (1, 1, 1)$  noktalarının herhangi üçü doğrudan değildir.

$$N_2N_3 = [a_1, a_2, a_3] \text{ olsun. } N_2I [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 0$$

$$a_2 = 0 \text{ dir.}$$

$$N_3I [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a_3 = 0$$

bulunur. Buradan  $N_2N_3 = [a_1, 0, 0] = a_1^{-1}[a_1, 0, 0] = [a_1^{-1}a_1, a_1^{-1} \cdot 0, a_1^{-1} \cdot 0] = [1, 0, 0]$  elde edilir.  $N_1$  noktasının bu  $N_2N_3$  doğrusunun üzerinde olmadığı da açıktır. Çünkü

$$N_1 = (1, 0, 0) \notin [1, 0, 0] \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \neq 0 \text{ dir. Benzer biçimde } N_4 \text{ noktası da } [1, 0, 0]$$

doğrusunun üzerinde değildir.  $N_4 = (1, 1, 1) \notin [1, 0, 0] \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \neq 0 \text{ dir.}$

$$N_1N_4 = [b_1, b_2, b_3] \text{ olsun. } N_1I [b_1, b_2, b_3] \Leftrightarrow b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = 0 \text{ dir. } b_1 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$N_4I [b_1, b_2, b_3] \Leftrightarrow b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1 + b_3 \cdot 1 = 0 \text{ Buradan da } b_2 = -b_3 \text{ elde edilir. Burada}$$

$N_1N_4 = [0, b_2, -b_2]$  olarak bulunmuş olur.  $N_2$  ve  $N_3$  noktalarının  $N_1N_4$  doğrusunun üzerinde bulunmadığı da kolayca görülür.

$(\mathbf{S}, +, \cdot)$  bölümlü halkası üzerine yukarıdaki gibi kurulan  $\Pi$  projektif düzlemi ile  $(\mathbf{N}'' , \mathbf{D}'' , I)$  projektif düzlemi arasında noktalar için

$$h(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1x_3^{-1}, x_2x_3^{-1}, 1), & x_3 \neq 0 \text{ ise} \\ (1, x_2x_1^{-1}, 0), & x_3 = 0 \neq x_1 \text{ ise} \\ (0, 1, 0), & x_3 = 0 = x_1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve doğrular için

$$h([a_1, a_2, a_3]) = \begin{cases} [a_2^{-1}a_1, 1, a_2^{-1}a_3], & a_2 \neq 0 \text{ ise} \\ [1, 0, a_1^{-1}a_3], & a_2 = 0 \neq a_1 \text{ ise} \\ [0, 0, 1], & a_1 = a_2 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı  $h$  dönüşümünün bir izomorfizm olduğu kolayca görülebilir.

Sonuç olarak yukarıda bahsedilen koordinatlamalardan işlemlerimize en uygun olanını kullanabileceğimizi söyleyebiliriz.

### 3. KLINGENBERG ve MOUFANG KLINGENBERG DÜZLEMLERİNDE KOORDİNATLAMA

#### 3.1. Düzlemsel Sexternary Halkalar ve Projektif Klingenberg Düzlemleri

Üçlü halkalar ile projektif düzlemler arasında birebir eşleme yapılabildiği iyi bilinmektedir. Bu kısımda önce projektif Klingenberg düzlemi ve sexternary halka denilen cebirsel yapı tanımlanacak, sonra da bu iki yapı arasında birebir eşlemenin nasıl tesis edileceği gösterilecektir.

**Tanım 3.1.1:**  $\mathbf{N}$  noktalar kümesini,  $\mathbf{D}$  doğrular kümesini,  $\in$  üzerinde olma bağıntısını ve  $\sim$  ise *komşuluk bağıntısı* adı verilen  $\mathbf{N}$  ve  $\mathbf{D}$  üzerinde bir denklik bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir  $\mathbf{M}=(\mathbf{N},\mathbf{D},\in,\sim)$  yapısına bir *Projektif Klingenberg düzlemi* denir ve kısaca **PK** ile gösterilir.

(**PK1**) Komşu olmayan herhangi iki  $A, B \in \mathbf{N}$  noktaları için  $A \in d$  ve  $B \in d$  olacak biçimde tam olarak bir  $d \in \mathbf{D}$  doğrusu vardır.

(**PK2**) Komşu olmayan herhangi iki  $c, d \in \mathbf{D}$  doğruları için  $N \in c$  ve  $N \in d$  olacak biçimde tam olarak bir  $N \in \mathbf{N}$  arakesit noktası vardır.

(**PK3**)  $\mathbf{M}$  nin kanonik görüntüsü denilen bir  $\mathbf{M}^*=(\mathbf{N}^*,\mathbf{D}^*,\in)$  projektif düzlemi ile; her  $A, B \in \mathbf{N}$  ve her  $c, d \in \mathbf{D}$  için

$$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ve } \Psi(c) = \Psi(d) \Leftrightarrow c \sim d$$

şartlarını sağlayan bir  $\Psi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^*$  geometrik yapı epimorfizmi vardır.

Bu tanımda, bir PK-düzleminin aynı komşulukta olan herhangi iki noktası ve herhangi iki doğrusu için bir şart belirtilmemektedir. Mesela, bir PK-düzleminin aynı komşulukta olan herhangi iki noktasından hiç doğru geçmeyebilir veya bir tek doğru geçebilir veyahut da pek çok doğru geçebilir.

**Tanım 3.1.2:**  $A \sim B$  ve  $B \in d$  olacak şekilde bir  $B \in \mathbf{N}$  noktası varsa  $A \in \mathbf{N}$  noktası  $d \in \mathbf{D}$  doğrusunun yakınındadır denir.

Bir nokta, bir doğruya komşu olamayacağından bu durumun da  $A \sim d$  ile gösterilmesinde bir sakınca yoktur.

Şimdi verilen bir  $\mathbf{M}=(\mathbf{N},\mathbf{D},\epsilon,\sim)$  PK-düzleminin nokta ve doğrularının bir  $\mathcal{R}$  kümesinin elemanlarıyla nasıl koordinatlanacağı gösterilecektir. Aşağıdaki tanım ile verilecek bu koordinatlama bazı küçük düzenlemelerle (Keppens 1988) den alınmıştır.

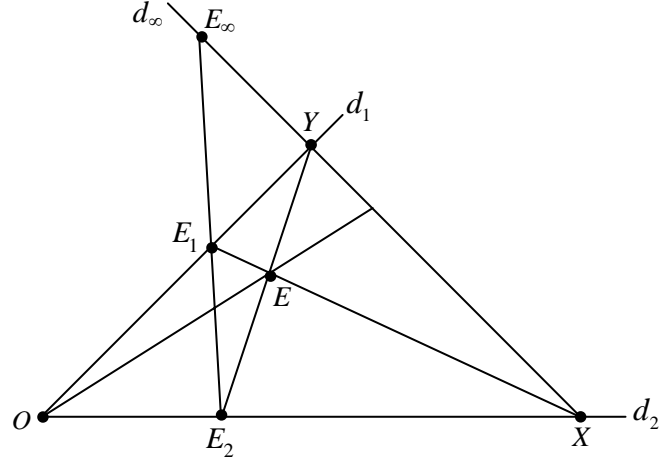
**Tanım 3.1.3:**  $\mathbf{M}=(\mathbf{N},\mathbf{D},\epsilon,\sim)$  bir PK-düzlem olsun ve  $(O,X,Y,E)$   $\mathbf{M}$  nin bir bazı (yani  $(\Psi(O),\Psi(X),\Psi(Y),\Psi(E))$  kümesi  $\mathbf{M}^*$  projektif düzleminde bir tamdörtgen) olsun.  $OY := d_1$ ,  $OX := d_2$ ,  $XY = d_\infty$ ,  $XE \cap d_1 = E_1$ ,  $YE \cap d_2 = E_2$ ,  $E_1E_2 \cap d_\infty := E_\infty$  biçiminde gösterilsin (Bkz. Şekil 3.1.1).

$$\mathbf{H}_1 := \{N \in \mathbf{N} \mid N \in d_1, N \not\sim Y\}$$

$$\mathbf{I}_1 := \{N \in \mathbf{H}_1 \mid N \sim O\}$$

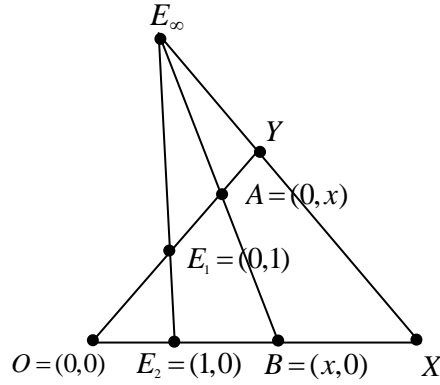
ve  $\mathbf{H}_1$  kümesinin kardinalitesi  $k$  olsun (burada  $k$  sonsuz olabilir). Özel olarak 0 ve 1 i bulduran ama  $\infty$  sembolünü herhangi bir eleman olarak kapsamayan kardinalitesi  $k$  olan bir  $\mathcal{R}$  kümesi alınsın. Birebir ve örten bir  $\theta : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathcal{R}$  fonksiyonu tanımlansın ve özel olarak  $\theta(O) = 0$  ve  $\theta(E_1) = 1$  olsun. Ayrıca  $\theta(\mathbf{I}_1) = \mathcal{R}_0$  denilsin. (Burada  $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$  olduğu açıktır.) Böylece  $\mathbf{H}_1$  kümesinin elemanları ile  $\mathcal{R}$  kümesi arasında  $\theta$  yardımıyla bir eşleme kurulmuştur. Bu eşleme yardımıyla  $\mathbf{M}$  nin nokta ve doğruları koordinatlanacaktır.

**M** nin noktalarının koordinatlanması:

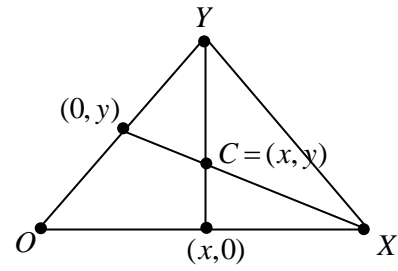


Şekil 3.1.1

- i)  $d_1$  in  $d_\infty$  doğrusuna yakın olmayan  $\theta(A) = x$  özelliğinde bir  $A$  noktasına  $A = (0, x)$  koordinatı (Bkz. Şekil 3.1.2 (a));
- ii)  $d_2$  nin  $d_\infty$  doğrusuna yakın olmayan  $A = E_\infty B \cap d_1 = (0, x)$  özelliğindeki bir  $B$  noktasına  $B = (x, 0)$  koordinatı (Bkz. Şekil 3.1.2 (a));
- iii)  $d_\infty$  a yakın olmayan  $XC \cap d_1 = (0, y)$  ve  $YC \cap d_2 = (x, 0)$  özelliğinde bir noktasına  $C = (x, y)$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.2.(b)).



Şekil 3.1.2 (a)

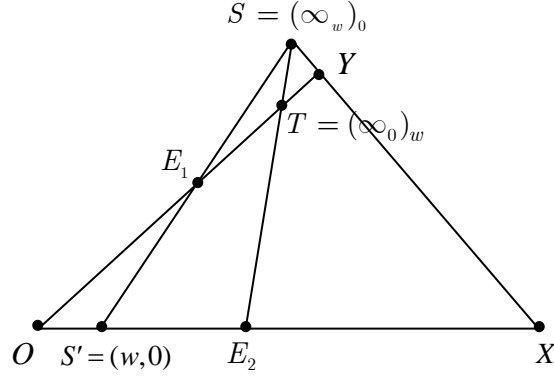


Şekil 3.1.2 (b)

$d_\infty$  doğrusuna yakın noktaların koordinatlanması ayrıntılı olarak ele alınıp aşağıdaki gibi yapılacaktır.

iv)  $S \in d_\infty \cap [Y]$  (Burada  $[Y]$  ile  $Y$  nin komşuluğundaki noktaların kümesi gösterilmektedir.) için  $S \notin E_1$  olduğundan  $SE_1$  doğrusu ve dolayısıyla  $S' = SE_1 \cap d_2$  noktası iyi tanımlıdır.  $S \sim Y$  olduğundan  $SE_1 \sim d_1$  ve  $S' \sim O$  dur.  $S' = (w, 0)$  iken  $w \in \mathcal{R}_0$  olup,  $S$  ye  $S = (\infty_w)_0$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.3).

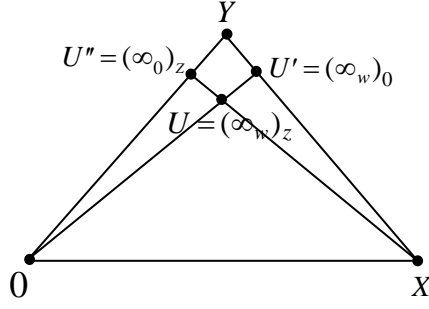
v)  $T \in d_1 \cap [Y]$  için  $TE_2$  doğrusu ve  $S = TE_2 \cap d_\infty$  noktası iyi tanımlıdır.  $T \sim Y$  olduğundan  $S \sim Y$  dir.  $S = (\infty_w)_0$  iken  $w \in \mathcal{R}_0$  olup,  $T$  ye  $T = (\infty_0)_w$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.3).



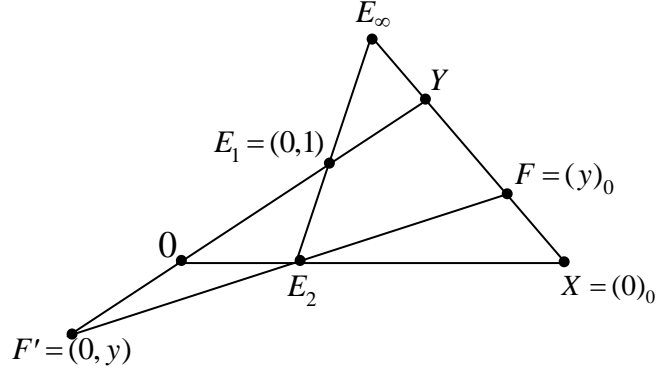
Şekil 3.1.3

vi)  $U \in [Y]$  iken  $OU$  ve  $XU$  doğruları ile  $U' = OU \cap d_\infty$  ve  $U'' = XU \cap d_1$  noktaları iyi tanımlıdır.  $U \sim Y$  olduğundan  $U' \sim Y$  ve  $U'' \sim Y$  dir.  $U' = (\infty_w)_0$  ve  $U'' = (\infty_0)_z$  iken  $w, z \in \mathcal{R}_0$  olup,  $U$  ya  $U = (\infty_w)_z$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.4 (a)).

vii)  $F \in d_\infty - [Y]$  olsun. Bu takdirde  $FE_2$  doğrusu ve  $F' = FE_2 \cap d_1$  noktası iyi tanımlıdır.  $F \notin Y$  olduğundan  $F' \notin Y$  dir.  $F' = (0, y)$  ise  $F$  ye  $F = (y)_0$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.4 (b)).



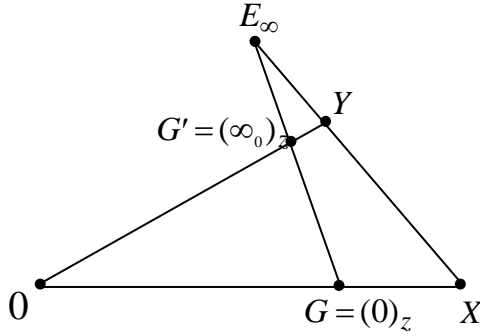
Şekil 3.1.4.(a)



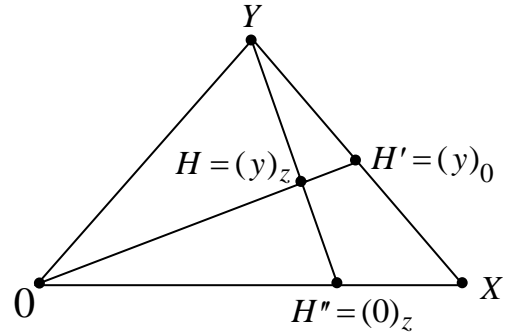
Şekil 3.1.4.(b)

viii)  $G \in d_2 \cap [X]$  iken  $GE_\infty$  doğrusu ve  $G' = GE_\infty \cap d_1$  noktası iyi tanımlıdır.  $G \sim X$  olduğundan  $G' \sim Y$  dir.  $G' = (\infty_0)_z$  iken  $G$  ye  $G = (0)_z$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.5(a)).

ix)  $H \sim d_\infty$  ve  $H \not\sim Y$  olsun. Bu takdirde  $OH$  ve  $YH$  doğruları ile  $H' = OH \cap d_\infty$  ve  $H'' = YH \cap d_2$  noktaları iyi tanımlıdır.  $H \sim d_\infty$  olduğundan  $H'' \sim X$  dir ve  $H \not\sim Y$  olduğundan  $H' \not\sim Y$  dir.  $H' = (y)_0$  ve  $H'' = (0)_z$  iken  $z \in R_0$  olup,  $H$  ye  $H = (y)_z$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3 1.5 (b)).



Şekil 3.1.5(a)



Şekil 3.1.5(b)

Bu koordinatlamaya göre;  $O = (0,0)$ ,  $X = (0)_0$ ,  $Y = (\infty_0)_0$ ,  $E_1 = (0,1)$ ,  $E_\infty = (1)_0$ ,  $E_2 = (1,0)$ , ve  $E = (1,1)$  dir.

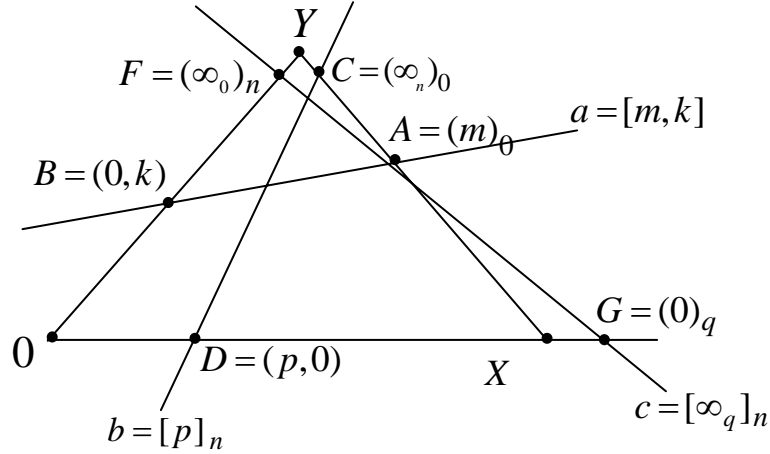
**M** nin doğrularının koordinatlanması:

**M** nin doğruları üç özel durum göz önüne alınarak koordinatlanacaktır:

i)  $a$ , **M** nin  $Y \not\sim a$  özelliğindeki bir doğrusu olsun. O zaman  $A = a \cap d_\infty$  ve  $B = a \cap d_1$  noktaları iyi tanımlıdır.  $Y \not\sim a$  olduğundan  $A, B \not\sim Y$  dir.  $A = (m)_0$  ve  $B = (0, k)$  ise  $a$  ya  $a = [m, k]$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.6).

ii)  $b$ , **M** nin  $Y \sim b$  ve  $b \not\sim d_\infty$  özelliğinde bir doğrusu olsun. O zaman  $C = b \cap d_\infty$  ve  $D = b \cap d_2$  noktaları iyi tanımlıdır.  $Y \sim b$  ve  $b \not\sim d_\infty$  olduğundan sırasıyla  $C \sim Y$  ve  $D \not\sim X$  dir.  $C = (\infty_n)_0$  ve  $D = (p, 0)$  iken  $n \in \mathcal{R}_0$  olup  $b$  ye  $b = [p]_n$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.6).

iii)  $c$ , **M** nin  $c \sim d_\infty$  özelliğindeki bir  $c$  doğrusu olsun. O zaman  $F = c \cap d_1$  ve  $G = c \cap d_2$  noktaları iyi tanımlıdır.  $F = (\infty_0)_n$  ve  $G = (0)_q$  iken  $q, n \in \mathcal{R}_0$  olup  $c$  ye  $c = [\infty_q]_n$  koordinatı verilecektir (Bkz. Şekil 3.1.6).



Şekil 3.1.6

Bu koordinatlamaya göre  $d_1 = [0]_0$ ,  $d_2 = [0, 0]$ ,  $d_\infty = [\infty_0]_0$ ,  $XE = [0, 1]$ ,  $YE = [1]_0$ ,  $E_1E_2 = [1, 1]$ ,  $E_\infty O = [1, 0]$  dir.



Şimdi de bir Klingenberg düzlemi oluşturmak için uygun cebirsel yapılar bulma hazırlıklarına başlayalım. Bunun için aşağıdaki tanımlara ihtiyacımız olacaktır.

**Tanım 3.1.4:** Boş olmayan bir  $\mathcal{R}$  kümesi üzerinde tanımlı üçlü işlemler  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$  olmak üzere  $(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, \dots, T_n)$   $(n+1)$ -lisine  $n$ -üçlü yapı denir.

**Tanım 3.1.5:**  $0, 1 \in \mathcal{R}$  ve  $0 \neq 1$  olmak üzere bir  $(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, \dots, T_n)$   $n$ -üçlü yapısında aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa yapıya  $n$ -üçlü halka denir:

**TR1)**  $T_1, \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$  üzerinde iyi tanımlıdır,

**TR2)** Her  $a, b, c \in \mathcal{R}$  için  $T_1(a, 0, c) = T_1(0, b, c) = c$  dir,

**TR3)** Her  $a \in \mathcal{R}$  için  $T_1(a, 1, 0) = T_1(1, a, 0) = a$  dır,

**TR4)** Verilen her  $a, b, c \in \mathcal{R}$  için  $T_1(a, b, x) = c$  olacak biçimde bir tek  $x \in \mathcal{R}$  vardır.

Özel olarak  $n = 1$  için üçlü halka ismi kullanılır. TR2 ve TR3 şartları 0 ve 1 e özel roller vermektedir.  $\mathcal{R}$  nin bu özellikleri sağlayan başka elemanı yoktur yani 0 ve 1 bu özellikleri sağlayan yegane elemanlardır.

**M**, Tanım 3.1.3 deki gibi bir  $\mathcal{R}$  kümesi yardımıyla koordinatlanmış bir PK-düzlemi olsun. **M** deki üzerinde olma bağıntısı kullanılarak  $\mathcal{R}^3$  den  $\mathcal{R}$  ye aşağıdaki altı fonksiyon tanımlanmıştır:

$$T_1(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \text{ için } (y, z) \in [x, k]$$

$$T_2(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \text{ için } (z, y) \in [k]_x$$

$$T_3(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \text{ için } (z)_y \in [k, x]$$

$$T_4(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \text{ için } (y)_z \in [\infty_k]_x$$

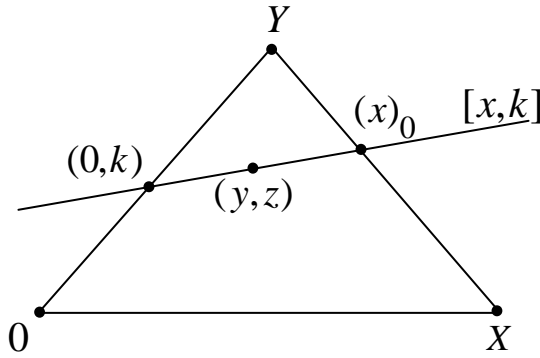
$$T_5(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \text{ için } (\infty_z)_y \in [x]_k$$

$$T_6(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \text{ için } (\infty_y)_z \in [\infty_x]_k$$

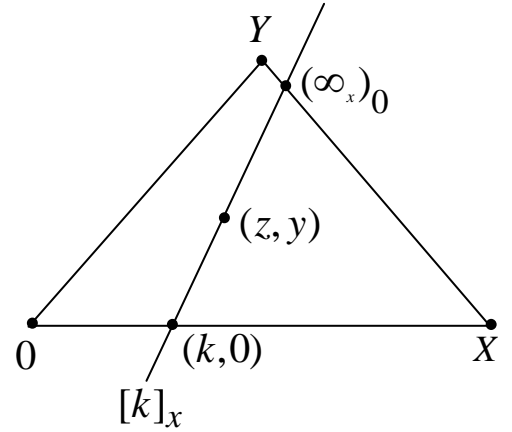
Şimdi bu şekilde tanımlanan  $T_1, T_2, \dots, T_6$  fonksiyonlarının  $\mathcal{R}$  üzerinde üçlü işlemler olduğu gösterilecektir.

$T_1$  iyi tanımlıdır. Çünkü  $x, y, z \in \mathcal{R}$  için  $(y, z)$  ile  $(x)_0$  noktalarından geçen doğru  $d_1$  e komşu değildir ve dolayısıyla  $d_1$  ile arakesit noktası bir tektir. Bu arakesit noktası,  $(\infty_0)_0$  a komşu olmadığından  $(0, k)$  koordinatına sahiptir (Bkz. Şekil 3.1.7(a)). O halde  $k$  tek türlü belirlidir.

$T_2$  iyi tanımlıdır. Çünkü  $x \in \mathcal{R}_0, y, z \in \mathcal{R}$  için  $(z, y)$  ile  $(\infty_x)_0$  noktalarından geçen doğru  $d_2$  ye komşu değildir ve dolayısıyla  $d_2$  ile arakesit noktası bir tektir.  $(z, y) \cup (\infty_x)_0$  doğrusu  $d_\infty$  a komşu olmadığından bu arakesit noktası  $(0)_0$  a komşu değildir ve  $(k, 0)$  koordinata sahiptir (Bkz. Şekil 1.7(b)). O halde  $k$  tek türlü belirlidir.



Şekil 3.1.7(a)

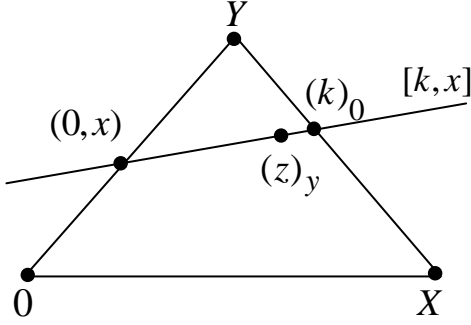


Şekil 3.1.7(b)

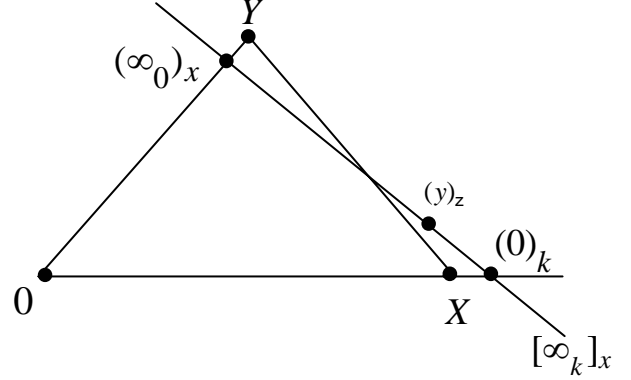
$T_3$  iyi tanımlıdır. Çünkü  $y \in \mathcal{R}_0, x, z \in \mathcal{R}$  için  $(z)_y$  ile  $(0, x)$  noktalarından geçen doğru ile  $d_\infty$  un arakesit noktası bir tek olarak belirlidir. Bu arakesit noktası  $(\infty_0)_0$  a komşu olmadığından  $(k)_0$  koordinatına sahiptir (Bkz. Şekil 3.1.8(a)). Bundan dolayı  $k$  tek türlü belirlidir.

$T_4$  iyi tanımlıdır. Çünkü  $x, z \in \mathcal{R}_0, y \in \mathcal{R}$  için  $(y)_z$  ile  $(\infty_0)_x$  noktalarından geçen doğru ile  $d_2$  nin arakesit noktası tek olarak belirli olup  $(0)_0$  ile komşu olduğundan

$k \in \mathcal{R}_0$  olmak üzere  $(0)_k$  koordinatına sahiptir (Bkz. Şekil 3.1.8(b)). Bu yüzden  $k$  bir tek belirli olup  $T_4(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$  dır.



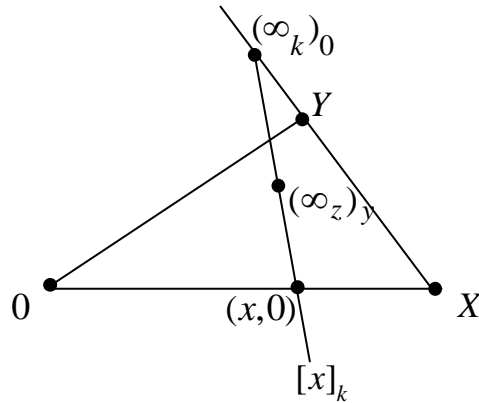
Şekil 3.1.8(a)



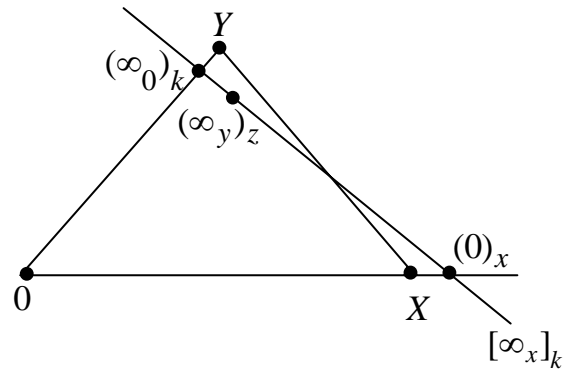
Şekil 3.1.8(b)

$T_5$  iyi tanımlıdır. Çünkü  $y, z \in \mathcal{R}_0$ ,  $x \in \mathcal{R}$  için  $(\infty_z)_y$  ile  $(x,0)$  noktalarından geçen doğru  $d_\infty$  a komşu değildir. Bu yüzden  $d_\infty$  ile bu doğrunun arakesit noktası bir tek olarak belirlidir. Bu arakesit noktası  $(\infty_0)_0$  ile komşu olduğundan  $(\infty_k)_0$  koordinata sahiptir (Bkz. Şekil 3.1.9(a)). Bundan dolayı  $k$  tek türlü belirlidir ve  $T_5(\mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$  dır.

$T_6$  iyi tanımlıdır.  $x, y, z \in \mathcal{R}_0$  için  $(\infty_y)_z$  ile  $(0)_x$  noktalarından geçen doğru ile  $d_1$  in arakesit noktası bir tektir ve bu arakesit noktası  $Y$  ile komşu olduğundan  $(\infty_0)_k$  koordinata sahiptir (Bkz. Şekil 3.1.9(b)). Bu yüzden,  $k$  bir tek olarak belirlidir ve  $T_6(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$  dır.



Şekil 3.1.9(a)



Şekil 3.1.9(b)

Sonuç olarak  $(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$  6-üçlü yapıdır. Bundan sonra bu yapı için özel olarak *sexternary yapı* ismi kullanılacaktır. Aşağıdaki teorem, bir PK-düzlemi verildiğinde ona karşılık gelen  $(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$  sexternary yapısının hangi özelliklere sahip olduğunu ifade eder.

**Teorem 3.1.6:**  $\mathbf{M}$  bir PK-düzlem ve  $\mathbf{M}$  ye karşılık gelen sexternary yapı

$$(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(PSR0)  $T_1$ ,  $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$  üzerinde iyi tanımlıdır.

(PSR 1)  $\mathcal{R}$  de aşağıdaki özelliklere sahip bir  $\cong$  denklik bağıntısı vardır:

(i)  $0 \not\cong 1$ ,

(ii)  $\cong$ ,  $T_1$  ile uyumludur; yani  $a \cong a'$ ,  $b \cong b'$  ve  $c \cong c'$  ise bu takdirde  $T_1(a, b, c) = T_1(a', b', c')$  dür,

(iii) Şayet  $T_1(a, b, x) \cong T_1(a, b, y)$  ise bu takdirde  $x \cong y$  dir,

(iv) Şayet  $a \not\cong c$  iken  $T_1(x, a, b) \cong T_1(x, c, d)$  ve  $T_1(y, a, b) \cong T_1(y, c, d)$  ise bu takdirde  $x \cong y$  dir,

(v) Şayet  $a \not\cong c$  iken  $T_1(a, x, y) \cong T_1(a, x', y')$  ve  $T_1(c, x, y) \cong T_1(c, x', y')$  ise bu takdirde  $x \cong x'$  ve  $y \cong y'$  dür,

$\mathcal{R}_0 = \{x \mid x \in \mathcal{R} \text{ ve } x \cong 0\}$  olsun.

(PSR 2)  $T_2, T_3, T_4, T_5$  ve  $T_6$  işlemlerinin tanım kümeleri sırasıyla  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0$  ve  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0$  olup  $T_4(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$ ,  $T_5(\mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$  ve  $T_6(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$  dır.

(PSR 3)  $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$  için  $T_1(a, 0, c) = T_1(0, b, c) = c$  dir.

(PSR 4)  $\forall b, c \in \mathcal{R}$  için  $T_2(0, b, c) = c$  dir.

(PSR 5)  $\forall a \in \mathcal{R}$  için  $T_1(1, a, 0) = T_1(a, 1, 0) = a$  dir.

(PSR 6) Şayet  $T_2(a, b, c) = k$  ya da  $T_3(a, b, c) = k$  ise bu takdirde  $k \cong c$  dir.

(PSR 7)  $a \not\cong c$  olmak üzere  $\forall a, b, c, d \in \mathcal{R}$ , için  $T_1(x, a, b) = T_1(x, c, d)$  denkleminin  $\mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

(PSR 8)  $a \not\equiv c$  ve  $b \equiv d$  olmak üzere  $\forall a, b, c, d \in \mathcal{R}$  için  $T_2(x, a, b) = T_2(x, c, d)$  denkleminin  $\mathcal{R}_0$  da bir tek çözümü vardır.

(PSR 9)  $a \not\equiv c$  olmak üzere  $\forall a, c \in \mathcal{R}$  ve  $\forall b, d \in \mathcal{R}_0$  için  $T_4(x, a, b) = T_4(x, c, d)$  denkleminin  $\mathcal{R}_0$  da bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 10) \forall a, b, d \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall c \in \mathcal{R}_0 \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_1(x, a, b) = y \\ T_3(y, c, d) = x \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 11) \forall a, b \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall c, d \in \mathcal{R}_0 \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_2(x, a, b) = y \\ T_5(y, c, d) = x \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 12) \forall a \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall b, c, d \in \mathcal{R}_0 \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_4(x, a, b) = y \\ T_6(y, c, d) = x \end{array} \right\} \text{ sisteminin } \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0 \text{ da bir}$$

tek çözümü vardır.

$$(PSR 13) a \not\equiv c \text{ olmak üzere } \forall a, b, c, d \in \mathcal{R} \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_1(a, x, y) = b \\ T_1(c, x, y) = d \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 14) a \not\equiv c \text{ ve } b \equiv d \text{ olmak üzere } \forall a, b, c, d \in \mathcal{R} \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_3(a, x, y) = b \\ T_3(c, x, y) = d \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 15) a \not\equiv c \text{ olmak üzere } \forall a, c \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall b, d \in \mathcal{R}_0 \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_5(a, x, y) = b \\ T_5(c, x, y) = d \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0$  da bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 16) \forall a, b, d \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall c \in \mathcal{R}_0 \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_1(a, x, y) = b \\ T_2(c, y, x) = d \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

$$(PSR 17) \forall a, b \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall c, d \in \mathcal{R}_0 \text{ için } \left. \begin{array}{l} T_3(a, x, y) = b \\ T_4(c, y, x) = d \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}$  de bir tek çözümü vardır.

$$(\text{PSR } 18) \left. \begin{array}{l} \forall a \in \mathcal{R} \text{ ve } \forall b, c, d \in \mathcal{R}_0 \text{ için } T_5(a, x, y) = b \\ T_6(c, y, x) = d \end{array} \right\}$$

sisteminin  $\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0$  da bir tek çözümü vardır.

**Tanım 3.1.7:**  $0, 1 \in \mathcal{R}$  olmak üzere yukarıdaki teoremde ifade edilen **(PSR 0)-(PSR 18)** özelliklerine sahip bir  $(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$  sexternary yapısına bir *düzlemsel sexternary halka* (PSR) denir.

Bu cebirsel hazırlıklardan sonra artık bir PK-düzlemi oluşturulabilir. Aşağıdaki teorem, bir PSR ile bir PK-düzleminin nasıl inşa edilebileceğini göstermektedir.

**Teorem 3.1.8:**  $(\mathcal{R}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$  bir PSR olsun. Komşuluk bağıntısına sahip bir  $\mathbf{M} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in, \sim)$  üzerinde olma yapısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\mathbf{N}$  (noktalar) kümesi;  $x, y \in \mathcal{R}$  olmak üzere  $(x, y)$  ikililerinden,  $x \in \mathcal{R}$  ve  $y \in \mathcal{R}_0$  olmak üzere  $(x)_y$  biçimindeki elemanlardan ve  $x, y \in \mathcal{R}_0$  olmak üzere  $(\infty_x)_y$  biçimindeki elemanlardan oluşmaktadır.  $\mathbf{D}$  (doğrular) kümesi;  $m, k \in \mathcal{R}$  olmak üzere  $[m, k]$  biçimindeki elemanlar,  $m \in \mathcal{R}_0$  ve  $k \in \mathcal{R}$  olmak üzere  $[k]_m$  biçimindeki elemanlar ve  $m, k \in \mathcal{R}_0$  olmak üzere  $[\infty_k]_m$  biçimindeki elemanlardan meydana gelmektedir.

$\in \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{D}$  üzerinde olma bağıntısı

$$(x, y) \in [m, k] \Leftrightarrow T_1(m, x, y) = k$$

$$(x, y) \in [k]_m \Leftrightarrow T_2(m, y, x) = k$$

$$(x, y) \notin [\infty_k]_m$$

$$(x)_y \in [m, k] \Leftrightarrow T_3(k, y, x) = m$$

$$(x)_y \notin [k]_m$$

$$(x)_y \in [\infty_k]_m \Leftrightarrow T_4(m, x, y) = k$$

$$(\infty_x)_y \notin [m, k]$$

$$(\infty_x)_y \in [k]_m \Leftrightarrow T_5(k, y, x) = m$$

$$(\infty_x)_y \in [k]_m \Leftrightarrow T_6(k, x, y) = m$$

biçiminde,  $\sim$  komşuluk bağıntısı noktalar için;

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x \cong x' \text{ ve } y \cong y'$$

$$(x, y) \not\sim (x')_{y'}$$

$$(x, y) \not\sim (\infty_{x'})_{y'}$$

$$(x)_y \sim (x')_{y'} \Leftrightarrow x \cong x'$$

$$(x)_y \not\sim (\infty_{x'})_{y'}$$

$$(\infty_x)_y \sim (\infty_{x'})_{y'}$$

ve doğrular için;

$$[m, k] \sim [m', k'] \Leftrightarrow m \cong m' \text{ ve } k \cong k'$$

$$[m, k] \not\sim [k']_{m'}$$

$$[m, k] \not\sim [\infty_{k'}]_{m'}$$

$$[k]_m \sim [k']_{m'} \Leftrightarrow k \cong k'$$

$$[k]_m \not\sim [\infty_{k'}]_{m'}$$

$$[\infty_k]_m \sim [\infty_{k'}]_{m'}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde  $\mathbf{M}$  bir projektif Klingenberg düzlemidir.

Teorem 3.1.8 de inşa edilen PK-düzleminde  $O = (0, 0)$ ,  $X = (0)_0$ ,  $Y = (\infty_0)_0$ ,  $E = (1, 1)$  olarak  $OY$  doğrusu üzerinde olan fakat  $Y$  ye komşu olmayan noktaları  $b \in \mathcal{R}$  olmak üzere  $(0, b)$  koordinatlı olarak alınır ve de  $OY$  nin  $Y$  ye komşu olmayan noktalarının kümesi ile  $\mathcal{R}$  arasında  $(0, b) \rightarrow b$  şeklinde bir dönüşüm tanımlanırsa bu koordinatlama ortaya çıkan PSR orijinal PSR olur.

### 3.2. Lokal Alterne Halkalar ve Moufang-Klingenberg Düzlemleri

Bir projektif düzlemin geometrik özellikleri ile koordinatlamasını yaptığımız üçlü halkanın cebirsel özellikleri arasında çok yakın ilişkilerin var olduğunu biliyoruz.

Mesela bir Moufang düzleminin üçlü halkası bir alterne halkadır (Hughes 1973). Bir alterne halkanın cebirsel özellikleri için (Schafer 1966) a bakılabilir.

Moufang düzlemleri için yapılanların benzerleri kısmen de olsa Klingenberg düzlemlerinin Moufang–Klingenberg (kısaca MK) düzlemleri denilen sınıfı için yapılabilmektedir. Bu durumda elde edilen sexternary yapı bir lokal alterne halka olmaktadır.

Bu kısımda bir lokal alterne halka yardımıyla bir MK-düzlemin koordinatlanması (Baker 1991) ve (Blunck 1991) esas alınarak incelenecektir.

Önce, projektif düzlemlerde iyi bilinen bir kavramın PK-düzlemlerindeki karşılığı verilecektir.

**Tanım 3.2.1:**  $\mathbf{M}=(\mathbf{N},\mathbf{D},\epsilon,\sim)$  bir PK-düzlem olsun. “ $A \not\sim M$ ,  $B \not\sim M$ ,  $A \not\sim e$ ,  $B \not\sim e$  ve  $A, B, M$  doğruduş özelliğindeki tüm  $A, B \in \mathbf{N}$  noktaları için  $A$  yı  $B$  ye dönüştüren bir  $(M, e)$ -merkezsiz kolonasyonu vardır.” şartı sağlanıyorsa  $\mathbf{M}$   $(M, e)$ -geçişkendir denir.

**Tanım 3.2.2:**  $\mathbf{M}$  bir PK-düzlem olsun. Eğer  $M \in e$  özelliğindeki her  $(M, e)$  için,  $\mathbf{M}$   $(M, e)$ -geçişken ise  $\mathbf{M}$  ye *Moufang-Klingenberg düzlemi* veya kısaca *MK-düzlemi* denir.

**Teorem 3.2.3:**  $\mathbf{M}$  bir MK-düzlem iken  $\mathbf{M}^*$  kanonik görüntüsü bir Moufang düzlemidir (Blunck 1991).

**Tanım 3.2.4:** Özdeşlikli bir alterne halkanın birim olmayan elemanların  $\mathbf{I}$  kümesi bir ideal ise halkaya *lokal alterne halka* denir.

Şimdi de MK-düzlemlerinin koordinatlanmasını ele alalım. Burada özetlenecek olan koordinatlamada, projektif düzlemler için (Hall 1943) de verilen koordinatlamasının bir genellemesi olan (Dugas 1979) koordinatlamasındaki metottan faydalanılmaktadır.



**Tanım 3.2.5:**  $\mathbf{M}=(\mathbf{N},\mathbf{D},\in,\sim)$  bir  $MK$ -düzlem ve  $(O,U,V,E)$   $\mathbf{M}$  nin bir bazı yani  $(\Psi(O),\Psi(U),\Psi(V),\Psi(E))$  kanonik görüntüsü  $\mathbf{M}^*$  da bir tamdörtgen olsun.  $OE:=d$ ,  $d\cap UV:=W$  ve  $UV:=d_\infty$  biçiminde gösterilsin.

$$\mathbf{H}:=\{N\in\mathbf{N}\mid N\in d, N\not\sim W\}$$

$$\mathbf{I}:=\{N\in\mathbf{H}\mid N\sim O\}$$

ve  $\mathbf{H}$  kümesinin kardinalitesi  $k$  olsun (burada  $k$  sonsuz olabilir). Özel olarak 0 ve 1 i bulunduran ama  $\infty$  sembolünü herhangi bir eleman olarak kapsamayan kardinalitesi  $k$  olan bir  $\mathcal{R}$  kümesi alınsın. 1:1 ve örten bir  $\theta:\mathbf{H}\rightarrow\mathcal{R}$  fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca  $\theta(O)=0$  ve  $\theta(E)=1$  ve  $\theta(\mathbf{I})=\mathcal{R}_0$  denilsin (Burada  $\mathcal{R}_0\subset\mathcal{R}$  olduğu açıktır). Böylece  $\mathbf{H}$  kümesinin elemanları ile  $\mathcal{R}$  kümesi arasında  $\theta$  yardımıyla bir eşleme kurulmuştur. Bu eşleme yardımıyla  $\mathbf{M}$  nin  $N\in\mathbf{N}$  noktaları ve  $c\in\mathbf{D}$  doğruları, aşağıdaki gibi koordinatlanacaktır:

Önce  $\mathbf{M}$  nin noktalarının koordinatlanmasını veriyoruz.

$d$  doğrusu özel olarak ele alınıp  $W$  ya komşu olmayan noktalar aşağıdaki gibi koordinatlanacaktır.

$N\in d$   $N\not\sim W$  ve  $\theta(N)=x$  ise  $N=(x,x,1)$  koordinatı verilsin.

i)  $N\not\sim d_\infty$  olsun.  $NV\cap d=(x,x,1)$  ve  $NU\cap d=(y,y,1)$  ise  $N=(x,y,1)$  koordinatı verilsin (Bkz. Şekil 3.2.1).

ii)  $N\sim d_\infty$  ve  $N\not\sim V$  olsun.  $ON\cap EV=(1,y,1)$  ve  $(NV\cap UE)O\cap EV=(1,z,1)$  ise  $N=(1,y,z)$  koordinatı verilsin (Bkz. Şekil 3.2.2).

iii)  $N\sim V$  olsun.  $ON\cap EU=(w,1,1)$  ve  $NU\cap d=(1,1,z)$  ise  $N=(w,1,z)$  koordinatı verilsin (Bkz. Şekil 3.2.3).

Şimdi de  $\mathbf{M}$  nin doğrularını koordinatlayalım.  $\mathbf{M}$  nin herhangi bir doğrusu  $c$  olsun.

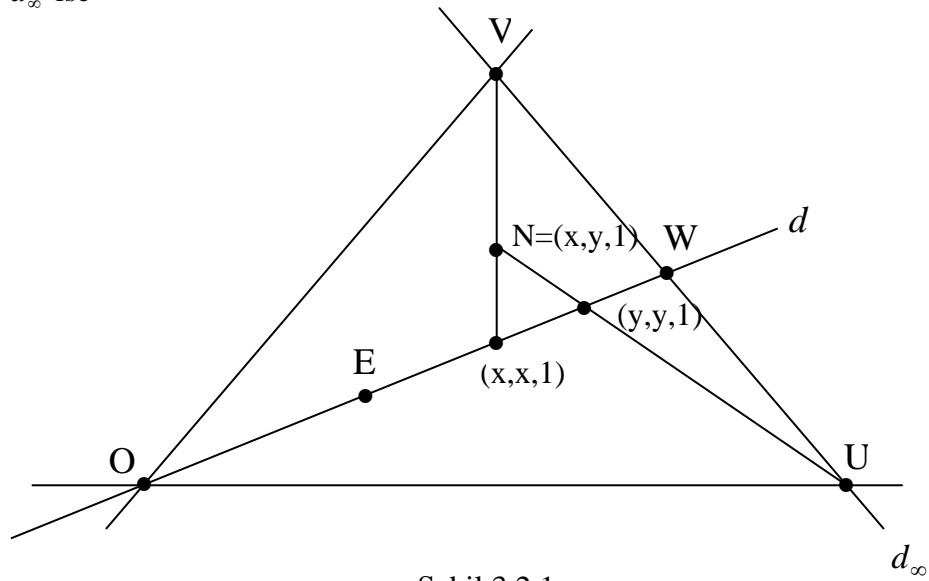
iv)  $c\not\sim V$  olsun.  $c\cap d_\infty=(1,m,0)$  ve  $c\cap OV=(0,k,1)$  ise  $c=[m,1,k]$  koordinatı verilsin (Bkz. Şekil 3.2.4).

v)  $c \sim V$  ve  $c \not\sim d_\infty$  olsun.  $c \cap d_\infty = (n,1,0)$  ve  $c \cap OU = (p,0,1)$  ise  $c = [1, n, p]$  koordinatı verilsin (Bkz. Şekil 3.2.5).

vi)  $c \sim d_\infty$  olsun.  $c \cap OU = (1,0,q)$  ve  $c \cap OV = (0,1,n)$  ise  $c = [q, n, 1]$  koordinatı verilsin (Bkz. Şekil 3.2.6).

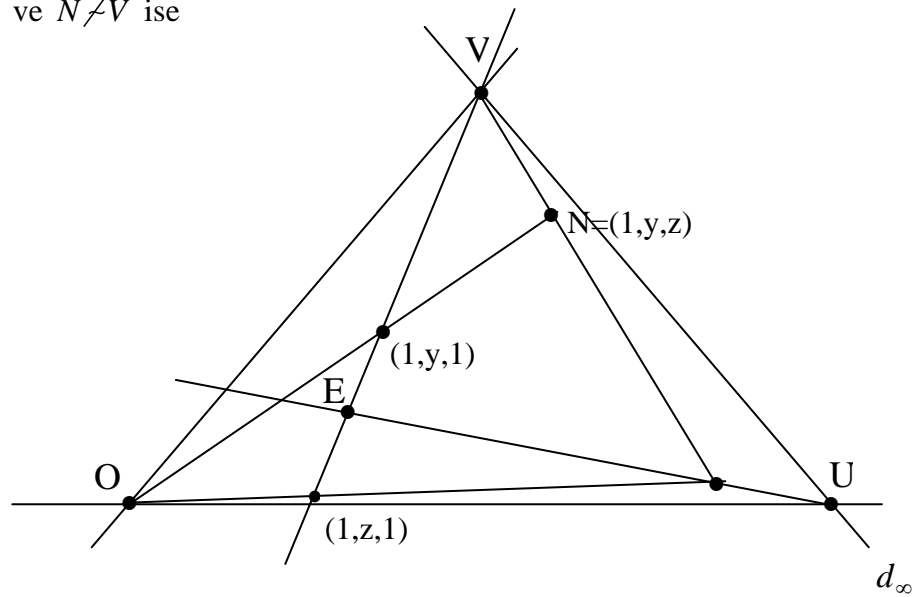
*Noktaların Koordinatlanması:*

1.  $N \not\sim d_\infty$  ise



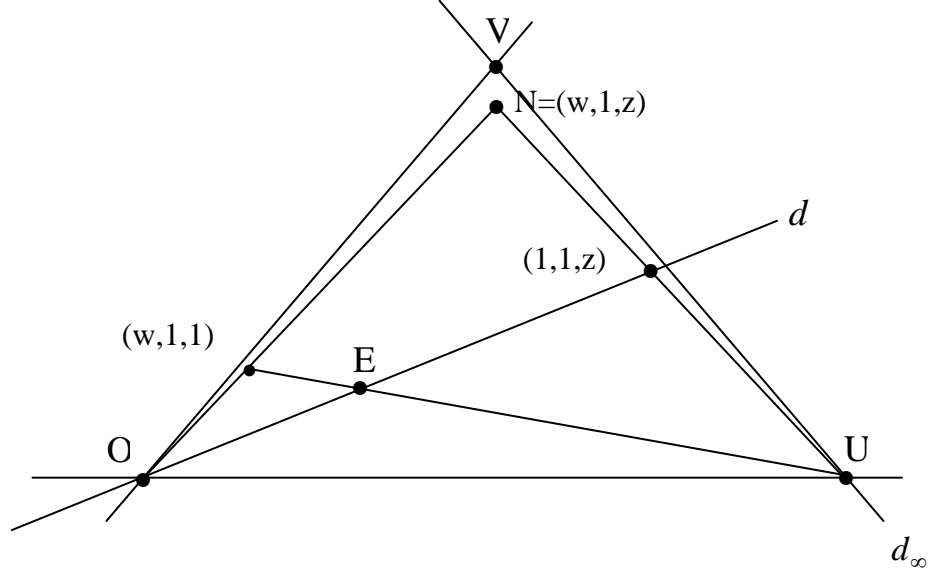
Şekil 3.2.1

2.  $N \sim d_\infty$  ve  $N \not\sim V$  ise



Şekil 3.2.2

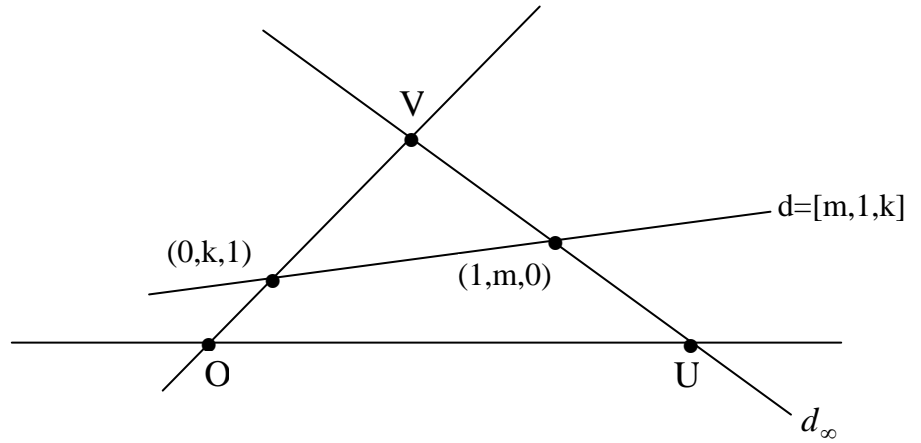
3.  $N \sim V$  ise



Şekil 3.2.3

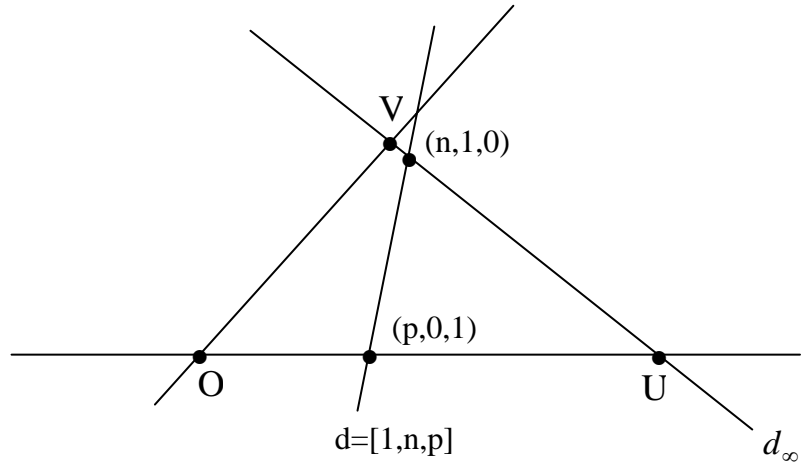
*Doğruların Koordinatlanması:*

1.  $d \not\sim V$  ise



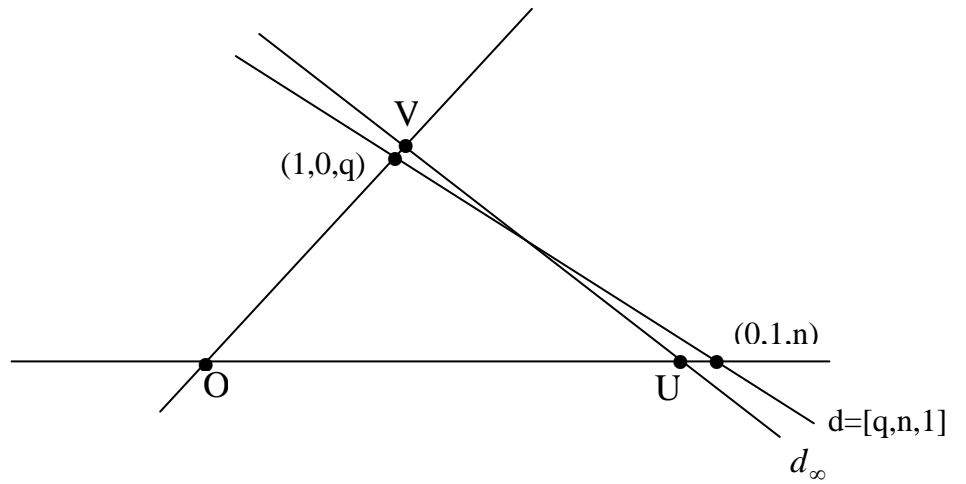
Şekil 3.2.4

2.  $d \sim V$  ve  $d \neq d_\infty$  ise



Şekil 3.2.5

3.  $d \sim d_\infty$  ise



Şekil 3.2.6

Burada  $w, z, q, n \in \mathbb{I}$  olduğu açıktır.

Bu tanımın bir sonucu olarak bazdaki noktaların  $O = (0,0,1), U = (1,0,0), V = (0,1,0), E = (1,1,1)$  koordinatlarını aldığı görülmektedir. Ayrıca bu koordinatlamaya göre  $OU = [0,1,0], OV = [1,0,0], UV = [0,0,1]$  olur.

(Baker 1991) da yukarıdaki gibi koordinatlanan bir MK-düzlem verildiğinde,  $\mathcal{R}$  nın toplamaya ve çarpmaya göre etkisiz elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan bir lokal

alterne halka olduğu altı üçlü işlem yardımıyla gösterilmiştir. Burada  $\mathcal{R}$  üzerinde toplama ve çarpma işlemleri her  $a, b \in \mathcal{R}$  için

$$a + b = T_1(a, 1, b) \text{ ve } a \cdot b = T_1(a, b, 0)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu üçlü işlemler yardımıyla, düzlemin üzerinde olma bağıntısı aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = xm + k$$

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$$

$$(x, y, 1) \notin [q, n, 1]$$

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

$$(1, y, z) \notin [1, n, p]$$

$$(1, y, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = q + yn$$

$$(w, 1, z) \notin [m, 1, k]$$

$$(w, 1, z) \in [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp$$

$$(w, 1, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n$$

Buna göre doğrular, üzerindeki nokta tiplerine göre, noktalardan oluşan kümeler halinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$[m, 1, k] = \{(x, xm + k, 1) \mid x \in \mathcal{R}\} \cup \{(1, zk + m, z) \mid z \in \mathcal{R}_0\}$$

$$[1, n, p] = \{(yn + p, y, 1) \mid y \in \mathcal{R}\} \cup \{(zp + n, 1, z) \mid z \in \mathcal{R}_0\}$$

$$[q, n, 1] = \{(1, y, yn + q) \mid y \in \mathcal{R}\} \cup \{(w, 1, wq + n) \mid w \in \mathcal{R}_0\}$$

Bu yapılanların sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir (Baker 1991).

**Teorem 3.2.6:**  $\mathbf{M}$  yukarıdaki gibi koordinatlanmış bir MK-düzlem olsun. Bu takdirde  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$  lokal alterne halkadır ve  $\mathcal{R}_0$  birimden farklı elemanların oluşturduğu idealdir. Ayrıca  $\mathbf{M}$  de komşuluk bağıntısı aşağıdaki gibi karakterize edilebilir:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathcal{R}_0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$[x_1, x_2, x_3] \sim [y_1, y_2, y_3] \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathcal{R}_0, \quad i = 1, 2, 3$$

Şimdi de karşıt önerme ele alınacaktır. Her lokal alterne halkaya karşılık onunla koordinatlanan bir MK düzleminin var olduğunun gösterilmesi için gerekli olan bazı tanım ve önermeler verilecektir.

**Tanım 3.2.7:**  $\mathbf{H}$  halkasındaki maksimal ideallerin arakesitine  $\mathbf{H}$  nin bir *jacobson radikali* denir.  $\mathbf{H}$ , bir naring yani, 0 ve 1 gibi farklı iki elemana sahip, birleşmeli olması gerekmeyen bir halka olsun.  $\mathbf{H}$  deki birimlerin kümesi  $\mathbf{U}$  ve  $\eta = \mathbf{H}/\mathbf{U}$  olsun.

i) Her  $a, b, c \in \mathbf{H}$  için  $ab=1$  olması  $a(bc) = c = (ca)b$  olmasını gerektiriyorsa  $\mathbf{H}$  ye *inversive(tersinir) halka* denir.

ii) Her  $a, b \in \mathbf{H}$  için  $a(ab) = a^2b$  ve  $(ab)b = ab^2$  şartları sağlanıyorsa  $\mathbf{H}$  ye *alterne halka* denir.

Bir  $\mathbf{H}$  bir lokal halka ise her  $a \in \mathbf{H}$  için ya  $a$  ya da  $1-a \in \mathbf{U}$  da olmalıdır. Aksi takdirde  $1 = a + (1-a) \in \eta$  çelişkisi oluşur.

**Teorem 3.2.8:** i) Eğer  $\mathbf{H}$  bir lokal alterne halka ise  $\eta$  ideali tek maksimal sağ(sol) idealdir ve  $\mathbf{H}$  nin  $\mathbf{J}$  jacobson radikaline eşittir ve  $\mathbf{H}/\mathbf{J}$  alterne aykırı cisimdir.

ii) Her alterne halka tersinirdir ve  $|\mathbf{H}/\mathbf{J}| \neq 2$  özelliğindeki her lokal tersinir  $\mathbf{H}$  halkası bir lokal alterne halkadır.

Bundan sonraki kısımlar için  $\mathbf{H}$  bir lokal alterne halka olmak üzere, birim olmayan elemanların oluşturduğu ideal,  $\mathbf{J}$  Jacobson radikaline eşittir. Ayrıca  $\mathbf{H}$ , Teorem 3.2.8 de verilen inversive halka kurallarının her ikisini de sağlar. Ayrıca  $\mathbf{H}$  de aşağıdaki özelliklerin geçerli olduğu Baker (Baker 1991) da gösterilmiştir ki bunlar  $\Pi(\mathbf{H})$  Moufang Klingenberg düzleminin inşasında kullanılacaktır.

**Teorem 3.2.9:a)**  $\mathbf{H}$  bir lokal inversive halka olmak üzere  $y, u \in \mathbf{H}$ ;  $x, v \in \mathbf{U}$  ve  $x + yu + v = 0$  için  $(x^{-1}y)(uv^{-1}) = [x^{-1}(yu)]v^{-1} = x^{-1}[(yu)v^{-1}]$  dir.

b)  $x + n(ax) = d$  denklemi tüm  $a, d \in \mathbf{H}$  ve  $n \in \mathbf{J}$  için bir tek  $x$  çözümüne sahiptir.

c)  $x + (xa)n = d$  denklemi tüm  $a, d \in \mathbf{H}$  ve  $n \in \mathbf{J}$  için bir tek  $x$  çözümüne sahiptir.

ç)  $a \in \mathbf{H}$ ,  $y \in \mathbf{J}$  olsun. Böylece  $y(ay+1)^{-1} = (ya+1)^{-1}y$  dir.

d) Eğer  $a, y \in \mathbf{H}$ ,  $u \in \mathbf{J}$  ve  $n = (ua+1)^{-1}u$ , ise böylece  $y[(ua)n] = [(yu)a]n$  dir.

e)  $a, u \in \mathbf{H}$ ,  $y \in \mathbf{H}$  ve  $t = y(ay+1)^{-1}$  olsun. Böylece  $[t(ay)]u = t[a(yu)]$  dir.

f)  $a, x, v \in \mathbf{H}$  ve  $u, y \in \mathbf{J}$  için  $y-u = xv$ ,  $n = (ua+1)^{-1}u$  ve  $t = y(ay+1)^{-1}$  olsun. Bu taktirde  $t-n = [x-t(ax)][v-(va)n]$  dir.

*Bir  $\mathbf{H}$  lokal Alterne Halkası Üzerine Bir Moufang Klingenberg Düzleminin İnşaaı:*

$\mathbf{H}$  bir lokal alterne halka olsun. Komşuluk bağıntısı da tanımlanmış bir geometrik yapı aşağıdaki gibi kurulsun.

$\Pi(\mathbf{H}) = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, I, \sim)$  için

$\mathbf{N} = \{(x, y, 1), (1, y, z), (w, 1, z) \mid x, y \in \mathbf{H}; w, z \in \eta\}$

$\mathbf{D} = \{[m, 1, p], [1, n, p], [q, n, 1] \mid m, p \in \mathbf{H}; q, n \in \eta\}$

$X = (x_1, x_2, x_3) I d = [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0$  şeklinde tanımlansın. Nokta ve doğrular için  $\sim$  komşuluk bağıntısı  $i=1,2,3$  olmak üzere her  $i$  için  $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \eta$  ve  $[a_1, a_2, a_3] \sim [b_1, b_2, b_3] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \eta$  şeklinde tanımlansın.

**Teorem 3.2.10:** Her lokal alterne halkaya karşılık bununla koordinatlanabilen bir MK-düzlemi vardır.  $\mathbf{H}$  bir lokal alterne halka ise yukarıdaki gibi kurulan  $\Pi(\mathbf{H})$  yapısı bir MK düzlemidir.

**İspat:** İlk olarak  $\mathbf{H}$  bir lokal alterne halka iken  $\Pi(\mathbf{H})$  nin bir Moufang PK-düzlem olduğunu gösterelim.

Bunun için önce **PK1)**, **PK2)** ve **PK3)** şartlarının sağladığının gösterilmesi gerekir.

Burada Teorem 3.2.8 gereği  $\mathbf{J} = \eta$  dır.

**PK1)**  $X$  ve  $Y$  aynı komşulukta olmayan iki nokta olsun. Herhangi iki tip, iki nokta komşu olmak zorunda olduğundan düşünülecek 5 durum vardır:

**1. Durum:**  $X = (x_1, x_2, 1)$  ve  $Y = (y_1, y_2, 1)$  noktaları alınsın. Bu iki noktanın aynı komşulukta olması için  $x_1 - y_1 \in \mathbf{J}$  ve  $x_2 - y_2 \in \mathbf{J}$  olmalıdır. Aksi takdirde  $X \not\sim Y$  ise ya  $x_1 - y_1 \in \mathbf{U}$ , veya  $x_1 - y_1 \in \mathbf{J}$  ve  $x_2 - y_2 \in \mathbf{U}$  dur.  $x_1 - y_1 \in \mathbf{U}$  olsun. Bir nokta kendisi ile aynı tipten bir doğru üzerinde olamayacağından  $X$  ve  $Y$  noktaları ya  $[m_1, 1, m_3]$  ya da  $[1, m_2, m_3]$  ( $m_2 \in \mathbf{J}$ ) doğrularının üzerinde olabilirler. İlk olarak  $[1, m_2, m_3]$  ( $m_2 \in \mathbf{J}$ ) doğrusu ele alınırsa üzerinde bulunma bağıntısının tanımından  $x_1 + x_2 m_2 + m_3 = 0 = y_1 + y_2 m_2 + m_3$  denklemleri elde edilir. Buradan da  $x_1 - y_1 = (y_2 - x_2) m_2 \in \mathbf{J}$  olup bu bir çelişkidir. Eğer  $X, Y \in [m_1, 1, m_3]$  alınırsa  $x_1 m_1 + x_2 + m_3 = 0 = y_1 m_1 + y_2 + m_3$  denklemleri elde edilir. Buradan  $(x_1 - y_1) m_1 = y_2 - x_2$  dır.  $x_1 - y_1 \in \mathbf{U}$ , olduğundan tersi vardır. Böylece  $m_1 = (x_1 - y_1)^{-1} (y_2 - x_2)$  ve  $m_3 = -y_1 m_1 - y_2$  olarak elde edilir. Yani  $[m_1, 1, m_3]$  doğrusu tek türlü bulunmuş olur.

Benzer olarak  $x_1 - y_1 \in \mathbf{J}$  ve  $x_2 - y_2 \in \mathbf{U}$ , için  $X$  ve  $Y$  noktaları  $[1, m_2, m_3]$  doğrusunun üzerinde iseler, benzer işlemler sonucunda  $m_2 = (y_2 - x_2)^{-1} (x_1 - y_1) \in \mathbf{J}$  ve  $m_3 = -y_2 m_2 - y_1$  elde edilir.

**2. Durum:**  $X = (x_1, x_2, 1)$  ve  $Y = (1, y_2, y_3)$ ,  $y_3 \in \mathbf{J}$  olsun.  $X$  ve  $Y$  noktaları sırasıyla 3. ve 1. tipten noktalar oldukları için bu iki tip nokta sadece 2. tipten bir doğru yani  $[m_1, 1, m_3]$  tipinden bir doğru üzerinde olabilirler. Üzerinde olma bağıntısının tanımından  $x_1 m_1 + x_2 + m_3 = 0 = m_1 + y_2 + y_3 m_3$  denklemleri elde edilir. İlk denklemden  $m_3 = -x_1 m_1 - x_2$  olarak çekilen  $m_3$  değeri ikinci denklemde yerine yazılıp denklem düzenlenirse  $0 = m_1 - y_3 (x_1 m_1) + (y_2 - y_3 x_2)$  elde edilir. Burada  $y_3 \in \mathbf{J}$  olduğundan Teorem 3.2.9(b) gereği bu denklemin tek türlü  $m_1$  çözümü vardır.



**3. Durum:**  $X = (x_1, x_2, 1)$  ve  $Y = (y_1, 1, y_3)$ ,  $y_1, y_3 \in \mathbf{J}$  olsun. Her iki nokta birlikte sadece  $[1, u_2, u_3]$ ,  $u_2 \in \mathbf{J}$  doğrusunun üzerinde olabilirler. Üzerinde olma bağıntısının tanımından  $x_1 + x_2 u_2 + u_3 = 0$  ve  $y_1 + u_2 + y_3 u_3 = 0$  denklemleri elde edilir. Böylece ilk denklemden çekilen  $u_3 = -x_1 - x_2 u_2$  değeri ikinci denklemde yerine yazılıp, denklem düzenlenirse  $u_2 - y_3(x_2 u_2) + (y_1 - y_3 x_1) = 0$  elde edilir. Burada  $y_1, y_3 \in \mathbf{J}$  olduğundan Teorem 3.2.9(b) gereği denklemin tek türlü  $u_2$  çözümü vardır.

**4. Durum:**  $X = (1, x_2, x_3)$  ve  $Y = (1, y_2, y_3)$ ,  $x_3, y_3 \in \mathbf{J}$  olsun.  $X$  ve  $Y$  noktalarının ikisi de 1. tipten noktalar olduklarından 2. ve 3. tipten doğrular üzerinde bulunabilirler. Bu doğrular  $[u_1, 1, u_3]$  veya  $[m_1, m_2, 1]$ ,  $m_1, m_2 \in \mathbf{J}$  olsun.  $x_3 - y_3 \in \mathbf{J}$  olduğundan  $X \not\sim Y$  olması  $x_2 - y_2 \in \mathbf{U}$  olmasını gerektirir. Eğer  $X$  ve  $Y$  noktaları  $[u_1, 1, u_3]$  doğrusunun üzerinde iseler tanımdan  $u_1 + x_2 + x_3 u_3 = 0 = u_1 + y_2 + y_3 u_3$  denklemleri elde edilir. Buradan da  $x_2 - y_2 = (y_3 - x_3) u_3 \in \mathbf{J}$  bulunur ki bu da  $x_2 - y_2 \in \mathbf{U}$  olması ile çelişir. O zaman  $X$  ve  $Y$  noktaları birlikte sadece  $[m_1, m_2, 1]$  doğrusunun üzerindedirler. Üzerinde olma bağıntısının tanımından  $m_1 + x_2 m_2 + x_3 = m_1 + y_2 m_2 + y_3$  denklemleri elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeleri yapılırsa  $m_2 = (x_2 - y_2)^{-1} (y_3 - x_3) \in \mathbf{J}$  ve  $m_1 = -y_3 - y_2 m_2 \in \mathbf{J}$  bulunur.

**5. Durum:**  $X = (1, x_2, x_3)$  ve  $Y = (y_1, 1, y_3)$ ,  $x_3, y_1, y_3 \in \mathbf{J}$  olsun. Her iki noktada birlikte sadece  $[m_1, m_2, 1]$  doğrusu üzerinde olabilirler. Üzerinde olma bağıntısının tanımından  $m_1 + x_2 m_2 + x_3 = 0 = y_1 m_1 + m_2 + y_3$  denklemleri elde edilir. İlk denklemden çekilen  $m_1 = -x_3 - x_2 m_2$  değeri ikinci denklemde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa  $0 = m_2 - y_1(x_2 m_2) + (y_3 - y_1 x_3)$  bulunur.  $y_1, y_3 \in \mathbf{J}$  olduğundan  $y_3 - y_1 x_3 \in \mathbf{J}$  dir. Teorem 3.2.9(b) gereği  $m_2$  tek türlü bulunur ve  $m_2 \in \mathbf{J}$  dir. Ayrıca  $x_3 \in \mathbf{J}$  olduğundan  $m_1 = -x_3 - x_2 m_2 \in \mathbf{J}$  dir.

**PK2) PK1)** deki adımların duallerini alarak ve Teorem 3.2.9(c) den faydalanarak yapılır.

**PK3** )  $\mathbf{H}$  bir lokal halka olduğundan Teorem 3.2.8 gereği  $\mathbf{H}/\mathbf{J}$  bir alterne aykırı cisimdir. Bu yüzden  $\Pi(\mathbf{H}/\mathbf{J})$  bir Moufang projektif düzlemdir ve  $\nu: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}/\mathbf{J}$  kanonik epimorfizmi, **PK3** şartını sağladığı kolayca görülebilen, bir  $\phi: \Pi(\mathbf{H}) \rightarrow \Pi(\mathbf{H}/\mathbf{J})$  epimorfizmine indirgenir.

Böylece  $\Pi(\mathbf{H})$  bir PK-düzlemdir. Şimdi de  $\Pi(\mathbf{H})$  nin bir Moufang düzlemi olduğunu gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki 3 iddiayı ispatlamak yeterli olacaktır.

**i)** Herhangi bir  $s \in \mathbf{U}$  için  $\sigma(1,0,1) = (1,s,1)$  olacak şekilde  $((0,1,0), [1,0,0])$  – ötelemesi vardır.

**ii)** Herhangi bir  $s \in \mathbf{U}$  için  $\alpha(0,0,1) = (s,0,1)$  olacak şekilde  $((1,0,0), [0,0,1])$  – ötelemesi vardır.

**iii)** Herhangi bir  $s \in \mathbf{U}$  için  $\beta(0,1,0) = (0,s,1)$  olacak şekilde  $((0,0,1), [0,1,0])$  – ötelemesi vardır.

Eğer böyle bir  $\sigma$  -ötelemesi var ise  $X \in \mathbf{N}$  noktaları ve  $m \in \mathbf{D}$  doğruları üzerinde aşağıda verilen şekilde rol oynayacaktır.

$$\sigma(X) = \begin{cases} ((1+x_1s)^{-1}x_1, 1, -((1+x_1s)^{-1}x_1)(sx_3) + x_3) & \text{Eğer } X \text{ 2. tip ise} \\ (x_1, x_1s + x_2, x_3) & \text{diğer;} \end{cases}$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} [1, (1-m_2s)^{-1}m_2, m_3 + (m_3s)((1-m_2s)^{-1}m_2)] & \text{Eğer } m \text{ 1. tip ise} \\ [m_1 - sm_2, m_2, m_3] & \text{diğer} \end{cases}$$

$((0,1,0), [1,0,0])$  – öteleme olduğunu göstermek için önce  $\sigma$  nın üzerinde bulunma bağıntısını koruduğu gösterilmelidir.

**1. Durum:**  $X$ , 2. tip olmayan bir nokta ve  $m$  de 1.tip olmayan bir doğru olmak üzere  $X I m$  olduğu farz edilsin. Bu durumda üzerinde olma bağıntısının tanımından 4 durum ortaya çıkar.

i)  $X$  noktası 1.tip ve  $m$  doğrusu 2. tip olsun.

$$\begin{aligned}
 (1, x_2, x_3)I [m_1, 1, m_3] &\Leftrightarrow m_1 + x_2 + x_3 m_3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow m_1 - s + s + x_2 + x_3 m_3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1, s + x_2, x_3)I [m_1 - s, 1, m_3] \text{ dir.} \\
 &\Leftrightarrow \sigma(X)I\sigma(m)
 \end{aligned}$$

ii)  $X$  noktası 1.tip ve  $m$  doğrusu 3. tip olsun.

$$\begin{aligned}
 (1, x_2, x_3)I [m_1, m_2, 1] &\Leftrightarrow m_1 + x_2 m_2 + x_3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow m_1 - s m_2 + s m_2 + x_2 m_2 + x_3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1, s + x_2, x_3)I [m_1 - s m_2, m_2, 1] \text{ dir.} \\
 &\Leftrightarrow \sigma(X)I\sigma(m)
 \end{aligned}$$

iii)  $X$  noktası 3.tip ve  $m$  doğrusu 2. tip olsun.

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2, 1)I [m_1, 1, m_3] &\Leftrightarrow x_1 m_1 + x_2 + m_3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_1 m_1 - x_1 s + x_1 s + x_2 + m_3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x_1, x_1 s + x_2, 1)I [m_1 - s, 1, m_3] \\
 &\Leftrightarrow \sigma(X)I\sigma(m)
 \end{aligned}$$

iv)  $X$  noktası 3.tip ve  $m$  doğrusu 3. tip olsun.

$(x_1, x_2, 1) \not I [m_1, m_2, 1]$  dir. Çünkü bir nokta kendisi ile aynı tipten bir doğru üzerinde bulunamaz.

**2. Durum:**  $(x_1, x_2, 1) I [1, m_2, m_3]$   $m_2 \in \mathbf{J}$  olduğu farz edilsin. Üzerinde bulunma bağıntısının tanımından  $x_1 + x_2 m_2 + m_3 = 0$  dir. Bu denklemde  $x_1 + m_3 = -x_2 m_2$  dir.  $n = (1 - m_2 s)^{-1} m_2$  olsun. Teorem 3.2.9(d) den  $x_2 [(-m_2 s)n] = [-(x_2 m_2)s]n$  dir.

$$\begin{aligned}
[x_2 - (x_2 m_2) s] n &= x_2 n - ((x_2 m_2) s) n \\
&= x_2 n - x_2 [(m_2 s) n] \text{ dir.} \\
&= x_2 (n - (m_2 s) n) \\
&= x_2 ((1 - m_2 s) n) \\
&= x_2 m_2
\end{aligned}$$

Böylece  $x_1 + (x_1 s + x_2) n + m_3 + (m_3 s) n = -x_2 m_2 - [(x_2 m_2) s] n + x_2 n = 0$  elde edilir. Sonuç olarak  $\sigma(X) I \sigma(m)$  dir.

**3. Durum:**  $(x_1, 1, x_3) I [m_1, m_2, 1]$ ,  $x_1, x_3, m_1, m_2 \in \mathbf{J}$  olduğu farz edilsin.  $t = (1 + x_1 s)^{-1} x_1$  olsun. Teorem 3.2.9(ç) den  $t = x_1 (1 + x_1 s)^{-1}$  ve Teorem 3.2.9(e) den  $t[s(x_1 m_1)] = [t(s x_1)] m_1$  olduğu bilinmektedir. Bu yüzden  $t[s(x_1 m_1) + m_1] = [t(s x_1 + 1)] m_1 = x_1 m_1$  dir. Böylece  $m_2 + x_3 = -x_1 m_1$  olduğundan  $t(m_1 - s m_2) + m_2 - t(s x_3) + x_3 = -x_1 m_1 + t[s(x_1 m_1) + m_1] = 0$  olup bu da  $\sigma(X) I \sigma(m)$  demektir.

**4. Durum:**  $(x_1, 1, x_3) I [1, m_2, m_3]$ ,  $x_1, x_3, m_2 \in \mathbf{J}$  olduğu farz edilsin. Üzerinde bulunma bağıntısının tanımından  $x_1 + m_2 = -x_3 m_3$  dir.  $n = (1 - m_2 s)^{-1} m_2$  ve  $t = (1 + x_1 s)^{-1} x_1 = x_1 (1 + s x_1)^{-1}$  olsun. Teorem 3.2.9(f) gereği  $t + n = [x_3 - t(s x_3)][-m_3 - (m_3 s) n]$  olup bu da  $\sigma(X) I \sigma(m)$  olduğunu gösterir.

Şimdi aşikar olarak  $(0, 1, 0)$   $\sigma$  nın merkezi ve  $[1, 0, 0]$  ise eksenidir. Son olarak, eğer  $P = (1, 0, 0)$ , ise  $\sigma(P) = (1, s, 0)$  olup  $P, \sigma(P) \notin [1, 0, 0]$  dir. Böylece  $\sigma$  bir  $((0, 1, 0), [1, 0, 0])$  - öteleme dir.

Benzer işlemler  $\alpha$  ve  $\beta$  ya uygulanırsa aşağıdakiler elde edilir.

$$\alpha(X) = \begin{cases} (1, x_2 - (x_3 (s x_3 + 1)^{-1}) (s x_2), x_3 (1 + s x_3)^{-1}) & \text{Eğer } X \text{ 1. tip ise} \\ (x_1 + x_3 s, x_2, x_3) & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\alpha(m) = \begin{cases} [m_1(1-sm_1)^{-1}, m_2 + (m_2s)(m_1(1-sm_1)^{-1}), 1] & \text{Eğer } m \text{ 3. tip ise} \\ [m_1, m_2, m_3 - sm_1] & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\beta(X) = \begin{cases} (a, b, 1) & x_2 \in U \text{ olmak üzere } X, 1. \text{ tip veya } s + x_2 \in U \text{ olmak üzere } X, 3. \text{ tip} \\ (bx_1, b, 1) & \text{eğer } X \text{ 2. tip ise} \\ (x_2^{-1}x_1, 1, x_2^{-1}((x_3s + x_2)s^{-1})) & \text{eğer } s + x_2, x_1 \in J \text{ olmak üzere } X \text{ 3. tip ise} \\ (1, x_1^{-1}x_2, x_1^{-1}x_3 + (x_1^{-1}x_2)s^{-1}) & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\beta(m) = \begin{cases} [m_1 - (m_1s^{-1})c, 1, -c] & \text{eğer } s - m_3 \in U \text{ olmak üzere } m \text{ 2. tip ise} \\ [m_1(m_3^{-1}c), 1, c] & \text{eğer } m_3 \in U \text{ olmak üzere } m \text{ 1. tip veya 3. tip ise} \\ [m_1m_3^{-1}, -c^{-1}, 1] & \text{eğer } m_1, s - m_3 \in J \text{ olmak üzere } m \text{ 2. tip ise} \\ [1, m_2m_1^{-1} - s(m_3m_1^{-1}), m_3m_1^{-1}] & \text{diğer} \end{cases}$$

Burada  $a = s((x_3s + x_2)^{-1}x_1)$ ,  $b = (s(x_3s + x_2)^{-1})x_2$  ve  $c = m_3((sm_2 - m_3)^{-1}s)$  dir.

Böylece  $\Pi(\mathbf{H})$  yapısının bir MK-düzlemi olduğu ispatlanmış olur.

Kardinalitesi  $k$  olan bir  $\mathbf{H}$  lokal alterne halkası kullanılarak Tanım 3.1.3 deki metotla koordinatlanan PK-düzlemi ile Tanım 3.2.5 deki gibi koordinatlanan PK-düzleminin izomorf olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Bu düzlemler arasında noktalar için

$$(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$$

$$(y)_z \rightarrow (1, y, z)$$

$$(\infty_w)_z \rightarrow (w, 1, z)$$

ve doğrular için de

$$[m, k] \rightarrow [m, 1, k]$$

$$[p]_n \rightarrow [1, n, p]$$

$$[\infty_q]_n \rightarrow [q, n, 1]$$

biçiminde tanımlanan  $f$  dönüşümünün bir izomorfizm olduğu görülebilir.

Tanım 3.2.5 de verilen üzerinde olma bağıntısı yerine

$$(x_1, x_2, x_3) \in [m_1, m_2, m_3] \Leftrightarrow x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 = 0$$

bağıntısı alınmış olsaydı elde edilen PK-düzlemi yukarıda verdiklerimizle yine izomorf olurdu. Bunların izomorf olduğu, noktalar için özdeşlik olarak ve doğrular için ise

$$[m, 1, k] \rightarrow [-m, 1, -k]$$

$$[1, n, p] \rightarrow [1, -n, -p]$$

$$[q, n, 1] \rightarrow [-q, -n, 1]$$

biçiminde tanımlanan  $h$  dönüşümünün bir izomorfizm olduğu iyi bilinmektedir (Baker 1991).

**KAYNAKLAR**

- ALBERT, A.A., R. SANDLER. 1968. An Introduction to Finite Projective Planes. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- BAKER, C. A., N.D. LANE., J.W. LORIMER. 1991. A Coordinatization for Moufang-Klingenberg Planes. *Simon Stevin*, 65, 3-22.
- BATTEN, L.M. 1986. *Combinatorics of Finite Geometries*. Cambridge University Press.
- BENNETT, M.K. 1995. *Affine and Projective Geometry*. John Wiley&Sons, Inc, United States of America.
- BLUNCK, A. 1991. Projectivities in Moufang-Klingenberg Planes. *Geometriae Dedicata*, 40, 341-359.
- BUMCROT, J.R. 1969. *Modern Projective Geometry*. Holt, Rinehart and Wilson, Inc.
- COXETER, H.S.M. 1974. *Projective Geometry*. Springer-Verlag, New York.
- COXETER, H.S.M. 1989. *Introduction to Geometry*. John Wiley&Sons, INC. United States of America.
- COXETER, H.S.M. 1993. *The Real Projective Plane*. Springer-Verlag, New York,
- ÇİFTÇİ, S., R. KAYA., J.C. FERRAR, 1988. On 4-Transitivity in the Moufang Plane. *Journal of Geometry*, 31, 65-68.
- DUGAS, M. 1979. Verallgemeinerte Andre-Ebenen mit Epimorphismen auf Hjelmslev-Ebenen. *Geom. Dedicata*, 8, 105-123.
- EISENHART, L.P. 1967. *Coordinate Geometry*. Dover Publications, INC. Mineola, New York.
- FRALEIGH, J. B. 1989. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison Wesley Publ. Co.
- HACISALİHOĞLU, H.H. 1995. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri. Ankara Üniversitesi, Ankara.
- HALL, M. 1943. Projective Planes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54, 229-277.
- HUGHES, D.R., F.C. PIPER. 1973. *Projective Planes*. Springer-Verlag, New York.
- KAYA, R. 1992. *Projektif Geometri*. Eskişehir, Anadolu Üniv.Yay., No: 551.463.

KEPPENS, D. 1988. Coordinatization of Projective Klingenberg planes (part I). *Simon Stevin*, 62, 63-90.

PICKERT, G. 1955. *Projektive Ebenen*. Springer –Verlag, Berlin.

STEVENSON, F.W. 1972. *Projective Planes*. San Francisco, W.H. Freeman Co. 416.

SCHAFFER, R.D. 1966. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. Acad. Pres., New York.



## ÖZGEÇMİŞ

03.06.1985 yılında Bursa'da doğdu. İlk öğrenimini 1996 yılında Nedim Öztan İlköğretim Okulu'nda ve orta öğrenimini 2003 yılında Bursa Şükrü Şankaya Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2003 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2006 yılında Erasmus Öğrenci Değişim Projesiyle bir dönem Belçika Gent Üniversitesi'nde ders aldı. 2007 yılında lisans öğrenimini tamamlayıp aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı ve akabinde enstitüye araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı görevi sürdürmektedir.