REEL KISMI POZİTİF ANALİTİK FONKSİYONLARIN SINIFI VE BAZI İLGİLİ SINIFLARI

Şükran KORKMAZ

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL KISMI POZİTİF ANALİTİK FONKSİYONLARIN SINIFI VE BAZI İLGİLİ SINIFLARI

Şükran KORKMAZ

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2017

TEZ ONAYI

Şükran KORKMAZ tarafından hazırlanan "Reel Kısmı Pozitif Analitik Fonksiyonların Sınıfı ve Bazı İlgili Sınıfları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
U.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye :Yrd. Doç. Dr. Elif YAŞAR
U.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI
Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü 22/05/2017

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

22/05/2017

Şükran KORKMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL KISMI POZİTİF ANALİTİK FONKSİYONLARIN SINIFI VE BAZI İLGİLİ SINIFLARI

Şükran KORKMAZ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler ifade edildi.

İkinci bölümde, $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ olmak üzere, $\mathbb{U}$ birim diskinde reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{P}$ sınıfı tanımlandı ve bu sınıfın temel özellikleri verildi. Ayrıca, bu sınıftaki fonksiyonlar için sabordinasyon prensibi, integral temsili, katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri ifade edildi.

Tezin asıl kısmını oluşturan son bölümde, $\mathcal{P}$ sınıfının bazı alt sınıfları tanımlandı ve bu alt sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, sabordinasyon prensibi ve distorsiyon teoremleri gibi bazı özellikler verildi.

Anahtar Kelimeler: Reel Kısmı Pozitif Analitik Fonksiyonlar, Sabordinasyon, Distorsiyon, Katsayı Hesaplamaları, δ-komşuluk

2017, vi+100 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

THE CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS WITH POSITIVE REAL PARTAND SOME OF ITS RELATED CLASSES

Şükran KORKMAZ

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consists of three chapters.

First chapter includes the basic definitions and theorems which will be used in the next chapters.

Second chapter defines the class $\mathcal{P}$ of analytic functions with positive real part in the unit disk $\mathbb{U}$. Besides, basic features of this class including distortion theorems, subordination principle, coefficient equations are given.

Last chapter, the main part of the thesis, defines some subclasses of the class $\mathcal{P}$ and gives some features of the functions in these subclasses.

Key Words: Analytic Functions with Positive Real Part, Subordination, Distortion, Coefficient Estimates, δ-Neighborhood

2017, vi+100 pages.

TEŞEKKÜR

Okul hayatım boyunca bana emeği geçen bütün değerli hocalarıma ve özellikle bu tez çalışmasında her türlü desteğini, bilgisini ve fedakarlığını büyük bir sabır ve anlayış içinde bana sunan, kendisini bir çok açıdan kendime örnek aldığım değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ' e sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Eğitimime devam etmem hususunda beni devamlı teşvik eden, maddi-manevi desteklerini hiç esirgemeyen arkadaşlarıma ve aileme çok teşekkür ederim.

Şükran KORKMAZ

… /… /2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
D_r	Orijin merkezli r yarıçaplı açık disk
$N_\delta(p)$	p fonksiyonunun δ komşuluğu
$\partial D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı çember
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathrm{Im}f$	f fonksiyonunun sanal kısmı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathrm{Re}f$	f fonksiyonunun reel kısmı
$f(A)$	A bölgesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının Hadamard Çarpımı
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine olması
$\mathcal{A}$	$\lvert\phi(z)\rvert \leq 1, \lvert z\rvert < 1$ olan analitik $\phi(z)$ fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{P}$	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{U}$	Birim disk

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin önemli konularından biri olan reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar ilk olarak MacGregor (1962 ve 1964) tarafından çalışılmıştır ve bu fonksiyonlar, reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonlar, yıldızıl ve konveks yalınkat fonksiyonlar gibi birçok konuya temel oluşturmaktadır.

Riemann Dönüşüm Teoremi gereği, kompleks düzlemin herhangi basit bağlantılı bir öz alt kümesi yerine $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diski üzerinde çalışmak kolaylık sağlar (Riemann 1851). Dolayısıyla, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlarla ilgili çalışmalar, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $p(0) = 1$ ve $\text{Re}p(z) > 0$ $(z \in \mathbb{U})$ şartlarını sağlayan $p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlar üzerinde yoğunlaşmış ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile gösterilmiştir.

Bu tezin amacı, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı ve bazı ilgili sınıflarını incelemektir. Üç bölümden oluşan tezin birinci bölümünde, ilerleyen kısımlarda kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, $\mathcal{P}$ sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca, bu sınıftaki fonksiyonlar için sabordinasyon prensibi, integral temsili, katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri ifade edilmiştir.

Tezin asıl kısmını oluşturan üçüncü bölüm, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bazı ilgili sınıfların tanıtıldığı sekiz alt bölümden oluşmaktadır. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, komşuluk, Hadamard çarpımı, sabordinasyon prensibi ve distorsiyon teoremleri gibi bazı özellikler verilmiştir. Bu alt bölümlerde, $\mathcal{P}'$ sınıfı (Walker 1990), $\mathcal{P}_b(\alpha)$ ve $\mathcal{P'}_a(\alpha)$ sınıfları (McCarty 1972), $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ sınıfı (Bernardi 1974), $\mathcal{P}_n(\alpha)$ ve $Q_n(\alpha)$ sınıfları (Owa ve ark. 1993), $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}\right)$ ve $\mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}\right)$ sınıfları (Owa ve ark. 2006), $\mathcal{P}_\alpha$ ve $\mathcal{P}_\alpha(n)$ sınıfları (Shaffer 1973), $\mathcal{P}(\alpha)$ sınıfı (Lecko 2000) ve $\mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ve $\mathcal{P}_M$ sınıfları (Libera ve Livingston 1972) incelenmiştir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, gelecek bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler ifade edilecektir. Bu bilgilerin ayrıntıları Palka (1991), Goodman (1983), Conway (1995) ve Duren (1983) yayınlarında bulunabilir.

1.1 Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$$

$$D^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık disk, kapalı disk, delinmiş açık disk ve çember* denir. Bundan sonra $D(0, r)$ açık diski D_r ile ve $D(0,1)$ birim diski de $\mathbb{U}$ ile gösterilecektir.

1.2 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise A kümesine *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* denir. A kümesini kapsayan kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin *kapanışı* denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. A kümesini kapsayan en geniş açık kümeye veya A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir.

1.3 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olsun. Her $D(z, r)$ diski ile A ve A nın tümleyeni olan A^t kümesinin kesişimi boş kümeden farklı ise z noktasına A kümesinin *sınır noktası* denir.

1.4 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası A kümesinde kalıyor ise bu kümeye *konveks küme* denir.

1.5 Tanım. (z_n) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n doğal sayıları için $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (z_n) dizisine z_0 noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ veya $z_n \to z_0$ şeklinde gösterilir.

1.6 Tanım. $z_0 \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde A kümesinde bir (z_n) dizinin mevcut olmasıdır. (Conway 1995)

1.7 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap D(z_0, \delta)] \subset D(f(z_0), \varepsilon)$$

şeklinde bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap D(z, \delta)] \subset D(f(z), \varepsilon)$$

şeklinde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim z_n = z_0$ özelliğinde her bir (z_n) dizisi için $\lim f(z_n) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde dizisel süreklilik ile süreklilik birbirini gerektirir.

1.8 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir. A kümesinde alınan her dizinin yığılma noktası yine A kümesine ait ise A kümesine *kompakt* veya *dizisel kompakt* denir.

1.9 Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır. (Palka 1991)

1.10 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. Eğer $A \cap U \neq \phi$, $A \cap V \neq \phi$ ve $A \subset U \cup V$ şartlarını sağlayan $U \subset \mathbb{C}$ ve $V \subset \mathbb{C}$ ayrık açık kümeleri mevcut değilse A kümesine *bağlantılı küme* denir. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* adı verilir.

1.11 Tanım. $[a, b]$ kapalı aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $t \in [a, b]$ için $\varphi'(t)$ mevcut ve $\varphi'(t) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri*, $[a, b]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye *parçalı düzgün eğri* denir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri*, uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri* ve sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye *Jordan bölgesi* adı verilir.

1.12 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğri sadece A kümesinin noktalarını içeriyorsa veya A da alınan her kapalı eğri içinde bölgeye ait herhangi bir noktaya büzülebiliyorsa bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

1.13 Tanım. f bir A bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferensiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda bulunan bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik* denir.

1.14 Tanım. $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $a_0, a_1, a_2, \ldots$ kompleks sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

şeklindeki fonksiyon serisine z_0 merkezli *Taylor serisi* denir. (Palka 1991)

1.15 Teorem. z_0 merkezli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı ρ olsun. Seri, $|z-z_0|>\rho$ şartını sağlayan her z noktası için ıraksaktır. $\rho>0$ ise o zaman bu seri, $D=D(z_0,\rho)$ diskinde mutlak ve normal yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

şeklinde tanımlı $f(z)$ fonksiyonu D diskinde analitiktir. a_n katsayısı ve f fonksiyonu arasındaki ilişki

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

şeklindedir. (Palka 1991)

1.16. Teorem (Maksimum Modül Teoremi). $f(z)$ fonksiyonu sınırlı bir A bölgesinde analitik ve kapanışında sürekli ise $|f(z)|$ değeri sınırda maksimum değerini alır. Ayrıca, $f(z)$ fonksiyonu sabit ise $|f(z)|$ değeri A bölgesinin bir iç noktasında maksimum değerini alır. (Ponnusamy ve Silverman 2006)

1.17 Tanım. A kompleks düzlemde açık bir küme ve $f=u+iv$ olsun. Eğer A kümesinde f fonksiyonu ve k. mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f *fonksiyonu* $C^k(A)$ *sınıfındadır* denir.

1.18 Tanım. $A\subset\mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, A bölgesinden $f(A)$ üzerine birebir olan f fonksiyonuna A bölgesinde *yalınkat (ünivalent) fonksiyon* denir. Buna göre A bölgesinde yalınkat bir f fonksiyonu $z_1,z_2\in A$ olmak üzere, $f(z_1)=f(z_2)$ olması $z_1=z_2$ olmasını gerektirir. Geometrik olarak, $f(A)$ görüntü bölgesinin katlı bir bölge olmaması demektir. Eğer f fonksiyonu A bölgesinin bir z_0 noktasının belli bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *yerel (lokal) yalınkat fonksiyon* denir.

1.19 Teorem. f fonksiyonu bir A bölgesinde analitik olsun. Eğer $z_0 \in A$ noktası için $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun yalınkat olduğu z_0 noktasının bir $\mathrm{D}(z_0, r) \subset A$ komşuluğu vardır.

1.20 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f: A \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ve $f \in C^1(A)$ olsun. $z_0 \in A$ için

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ u_y(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0)$$

sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasında *Jakobiyeni* denir.

1.21 Teorem. Bir $f = u + iv$ fonksiyonunun basit bağlantılı bir A bölgesindeki Jakobiyeni $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ dir.

İspat. $f = u + iv$ olmak üzere

$$f_z = \frac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y\right) + \frac{i}{2}\left(v_x - u_y\right)$$

ve

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(f_x + if_y\right) = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y\right) + \frac{i}{2}\left(v_x + u_y\right)$$

olur. Buradan

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - v_x u_y = J_f$$

elde edilir.

Teorem 1.19 dan, f fonksiyonu analitik ise $J_f(z) = |f'(z)|^2$ olduğu görülür.

1.22 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: A \to \mathbb{C}$ yalınkat bir fonksiyon ve $f \in C^1(A)$ olsun. Her $z \in A$ için $J_f(z) \neq 0$ ise f fonksiyonuna A bölgesinde *diffeomorfizm* denir. $f: A \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm ve $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna A bölgesinde *yön koruyan*, $J_f(z) < 0$ ise f fonksiyonuna *yönü ters çeviren* adı verilir.

$J_{\bar{f}} = -J_f$ olduğundan f yön koruyan ise $\bar{f}$ eşlenik fonksiyonu yönü ters çevirendir.

1.23 Tanım. $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere $\theta(z,w) = \operatorname{Arg}\left(\frac{w}{z}\right)$ değerine *z den w ya yönlendirilmiş açı* denir. $\theta(z,w)$, z ile w arasındaki en küçük açının ölçüsü olup bu değer $(-\pi, \pi]$ aralığındadır. Eğer açının yönü saat yönünün tersi ise $\theta(z,w) > 0$, saat yönünde ise $\theta(z,w) < 0$ dır. Buna göre $\theta(z,w) = \pi$ durumu hariç $\theta(z,w) = -\theta(z,w)$ ve $\theta(\bar{z},\bar{w}) = -\theta(z,w)$ olduğu açıktır.

1.24 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: A \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm olsun. A bölgesinde z_0 köşe noktasına sahip eğrisel bir açının kenarları α ve β olmak üzere

$$|\theta(\alpha,\beta)| = \left|\theta\big(f(\alpha), f(\beta)\big)\right|$$

ise f fonksiyonuna $z_0 \in A$ noktasında *açı koruyan* denir. Eğer z_0 noktasında $J_f(z_0) > 0$ ve $\theta(\alpha,\beta) = \theta(f(\alpha), f(\beta))$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in A$ noktasında *konform*, $J_f(z_0) < 0$ ve $\theta(\alpha,\beta) = \theta[f(\beta), f(\alpha)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in A$ noktasında *ters konform* denir. Yani, açı ölçüsünü ve yönünü koruyan bir diffeomorfizme *konform dönüşüm*, açı ölçüsünü koruyan fakat yönünü ters çeviren diffeomorfizme de *ters konform* adı verilir. Eğer her $z \in A$ noktası için f fonksiyonu konform ise f ye A bölgesinde *konform dönüşüm* denir.

Örneğin, $f(z) = az + b,\ a \neq 0$ dönüşümü $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ ye bir konform dönüşüm iken $f(z) = \bar{z}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ de ters konform dönüşümdür.

1.25 Teorem. f fonksiyonu bir A bölgesinde analitik ve $z \in A$ olsun. Eğer $f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonu z noktasında konformdur. (Zill 2003)

1.26 Teorem. f fonksiyonu bir A bölgesinde analitik ve $z_0 \in A$ olsun.

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

ve

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

olacak biçimde $n > 1$ doğal sayısı varsa, $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında kesişen herhangi iki düzgün eğri arasındaki açıyı n çarpanı kadar büyütür. Dolayısıyla, $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 da konform değildir. (Zill 2003)

1.27 Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun A bölgesinde konform olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun A da analitik ve yalınkat olmasıdır. (Palka 1991)

1.28 Teorem. (Riemann Dönüşüm Teoremi). A, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesi olsun. A bölgesini $\mathbb{U}$ birim diski üzerine birebir ve analitik (konform) olarak resmeden $z_0 \in A$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır. (Palka 1991)

Eğer A bir Jordan bölgesi ise Riemann dönüşüm teoremi sürekli olarak A bölgesinin sınırına genişletilebilir ve genişletilmiş fonksiyon sınır eğrisini birebir olarak birim çember üzerine dönüştürür. Caratheodary' nin bu sonucu aşağıdaki teoremde ifade edilir.

1.29 Teorem (Caratheodary Genişleme Teoremi). A bir γ Jordan eğrisi ile sınırlanmış bir bölge ve f fonksiyonu A bölgesini $\mathbb{U}$ birim diski üzerine konform olarak dönüştürsün. O zaman f fonksiyonu $\bar{A}$ bölgesinden $\overline{\mathbb{U}}$ üzerine homomorfizme genişletilebilir. (Palka 1991)

1.30 Teorem (Schwarz Lemma). f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| \leq 1$ şeklinde analitik bir fonksiyon olsun. O zaman $\mathbb{U}$ diskinde $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.31 Teorem (Schwarz-Pick Lemma). $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve her $z \in \mathbb{U}$ için $|f(z)| < 1$ ise o zaman

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

dir. (Gamelin 2001)

Sınırlı analitik fonksiyonların yüksek mertebeden türevlerinin hesabını elde etmek için bu teoremden faydalanılarak sıradaki teorem ifade edilir.

1.32 Teorem. $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve her $z \in \mathbb{U}$ için $|f(z)| < 1$ ise o zaman

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!\,(1 - |f(z)|^2)}{(1 - |z|^2)^n}(1 + |z|)^{n-1}$$

dir.

Bu teoremin bir sonucu aşağıdadır.

1.33 Sonuç. $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ analitik bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \frac{|f^n(z)|(1 - |z|^2)^n}{1 - |f(z)|^2} \leq n!\,2^{n-1}$$

dir.

1.34 Tanım. $|z| < 1$ için $|\phi(z)| \leq 1$ şartını sağlayan analitik $\phi(z)$fonsiyonlarının sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilsin. (McCarty 1972)

1.35 Lemma. $\phi(z) \in \mathcal{A}$ ve $\phi(0) = z_0$ olsun. O zaman

(i) $|\phi'(z)| \leq \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$,

(ii) $\frac{|z_0|-|z|}{1-|z_0 z|} \leq |\phi(z)| \leq \frac{|z_0|+|z|}{1+|z_0 z|}$

olur. (McCarty 1972)

1.36 Teorem (Helly Seçme Teoremi). (μ_n), $[a,b]$ aralığında $\mu_n(a) = 0$ ve $\mu_n(b) = 1$ özelliğinde azalmayan bir fonksiyon dizisi olsun. O zaman $[a,b]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonuna yakınsayan (μ_n) dizisinin bir (μ_{n_k}) alt dizisi vardır. Üstelik $[a,b]$ aralığında her sürekli φ fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi(t) d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b \varphi(t) d\mu(t)$$

dir. (Duren 1983)

1.37 Teorem (Hurwitz Teoremi). (f_n), bir D bölgesinde sıfırı olmayan analitik fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün olsun. O zaman f fonksiyonunun D bölgesinde ya hiç sıfırı yoktur ya da f özdeş olarak sıfırdır. (Duren 1983)

1.38 Tanım (Hadamard Çarpımı). $\mathbb{U}$ birim diskinde her $z \in \mathbb{U}$ için f ve g,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde iki analitik fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun Hadamard çarpımı, $f * g$ şeklinde gösterilir ve şu şekilde ifade edilir;

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

(Walker 1990, Owa ve ark. 1993)

1.39 Teorem (Noshiro-Warschawski). f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\mathrm{Re}\{f'(z)\} > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesinde yalınkattır. (Duren 1983)

1.40 Tanım. Bir D bölgesinde tanımlı $u = u(x, y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve D de $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ise u fonksiyonuna D bölgesinde *harmonik* denir.

1.41 Teorem (Harmonik Fonksiyonlar için Maksimum ve Minimum Prensibi). Sabit olmayan reel değerli bir $u(x, y)$ fonksiyonu, sınırlı bir D bölgesinde harmonik olsun. $u(x, y)$ fonksiyonu maksimum veya minimum değerini D bölgesinin sınırında alır.

Teorem 1.42 konveks bölgeler için bir yalınkatlık testini verir.

1.42 Teorem. D konveks bir bölge olsun. Belli bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha} f'(z)\right] > 0$$

ise f fonksiyonu D bölgesinde yalınkattır.

İspat. z_1 ve z_2 D bölgesinde iki farklı nokta olsun. f fonksiyonunun

$$\Gamma = \{z : z = z_1 + t(z_2 - z_1), 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{U}$$

doğru parçası boyunca integrali alınırsa

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{\Gamma} f'(z)dz = \int_0^1 f'(z)(z_2 - z_1)dt$$

$$= (z_2 - z_1)e^{-i\alpha} \int_0^1 e^{i\alpha} f'(z)dt$$

olur. Hipotez gereği bu son integral sıfır olamaz. Dolayısıyla, $f(z_2) \neq f(z_1)$ olur. Dolayısıyla, bu f fonksiyonunun D bölgesinde yalınkat olduğunu gösterir.

1.43 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer sabit bir $w_0 \in A$ noktasını, her bir $w \in A$ noktasına birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_0 + tw \in A$ ise, A kümesine w_0 *noktasına göre yıldızıl küme* denir.

1.44 Tanım. $r \in (0,1]$, $f \in \mathcal{A}(D_r)$ ve $z_0 \in D_r$ olsun. Eğer f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl ise, f fonksiyonuna D_r üzerinde z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Orijine göre yıldızıl olan fonksiyonlara kısaca *yıldızıl fonksiyon* adı verilir. Ayrıca, f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $\mathbb{C}$ de konveks ise, f fonksiyonuna D_r üzerinde *konveks fonksiyon* denir.

2. $\mathcal{P}$ SINIFI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{U}$ birim diskinde reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı tanımlanacak ve bu sınıfın temel özellikleri verilecektir. Ayrıca, sabordinasyon prensibi, katsayı hesaplamaları, domine edilmiş seri kavramları üzerinde durulacak ve bu sınıfa ait fonksiyonların integral temsili ifade edilecektir.

2.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $p(0) = 1$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}p(z) > 0$ şartlarını sağlayan

$$p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlara *reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar* denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde bu şekilde tanımlı reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile gösterilir.

Herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonunun yalınkat olması gerekmez. Örneğin; $n \leq 2$ tamsayısı için $p(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat değildir.

$\mathcal{P}$ sınıfına ait önemli bir fonksiyon örneği $z \in \mathbb{U}$ için

$$L(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini $H^+ = \{w : Rew > 0\}$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder.

Sıradaki teorem, $\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonların bazı işlemler altında sabit kaldığını gösterir. Tanım 2.1 den ispatlar açıktır.

2.2 Teorem. $p(z)$, $p_1(z)$ ve $p_2(z)$ fonksiyonları her $z \in \mathbb{U}$ için $\mathcal{P}$ sınıfına ait ise o zaman aşağıdaki şartlar altında $q(z)$ fonksiyonu da $\mathcal{P}$ sınıfına aittir. (Goodman 1983)

(i) $q(z) = p\left(e^{i\theta} z\right)$, $\theta \in \mathbb{R}$ için

(ii) $q(z) = [p(z)]^t$ veya $q(z) = p(tz)$, $-1 \leq t \leq 1$ için

(iii) $q(z) = 1/p(z)$,

(iv) $q(z) = [p_1(z)]^{t_1}[p_2(z)]^{t_2}$, $t_1, t_2 > 0$,$t_1 + t_2 \leq 1$ için

(v) $p(\lambda) = a + ib$ ise $q(z) = 1/a[p\left(\frac{z+\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right) - ib]$, $\lambda \in \mathbb{U}$ için

(vi) $q(z) = (p(z) + ib)/(1 + ibp(z))$, $b \in \mathbb{R}$ için

İspat. (ii) $z \in \mathbb{U}$ ve $p(z) \in \mathcal{P}$ olsun. $p(z) = re^{i\theta}$ olacak şekilde $r > 0$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ sayıları vardır. Buradan,

$$\mathrm{Re}q(z) = \mathrm{Re}[p(z)]^t = \mathrm{Re}\left(r^t e^{i\theta t}\right) = r^t \cos(\theta t)$$

elde edilir. $-1 \leq t \leq 1$ için $t\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $r^t > 0$ olduğundan $\mathrm{Re}q(z) > 0$ bulunur. Ayrıca $q(0) = 1$ olur ve $q(z) \in \mathcal{P}$ dir.

2.3. Teorem. $\mathcal{P}$ sınıfı konveks ve kompakttır.

İspat. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olsun. $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ olmak üzere,

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \tag{2.2}$$

fonksiyonu için $\mathrm{Re}p > 0$ ve $p(0) = 1$ olduğundan $p \in \mathcal{P}$dir. Dolayısıyla, $\mathcal{P}$ sınıfı konvekstir.

$\mathcal{P}$ sınıfının kompakt olduğunu ispatlamak için kapalı olduğunu göstermek gerekir. Bunun için $\mathbb{U}$ birim diskinde lokal düzgün $p_n \to p$ özelliğinde $\mathcal{P}$ sınıfına ait her (p_{n}) dizisi için, $p \in \mathcal{P}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Hurwitz teoremi gereği p limit fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde sıfırı yoktur ya da özdeş olarak sıfırdır. $p(0) = \lim_{n\to\infty} p_{\mathrm{n}}(0) = 1$ olduğundan $p \in \mathcal{P}$ dir.

(2.2) fonksiyonu sonlu toplama ve her k için $t_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 1$ olmak üzere

$$p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k p_k(z)$$

şeklinde sonsuz toplama genişletilebilir.

2.4 Tanım. f ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ diskinde analitik olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ için $w(0) = 0$, $f(z) = g(w(z))$ ve $|w(z)| \leq 1$ şartlarını sağlayan $\mathbb{U}$ da analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna *sabordinedir* denir.

2.5 Tanım. $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olsun. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik $f(z)$ fonksiyonu için $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$ şartları sağlanıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\mathbb{U}$ diskinde $g(z)$ fonksiyonuna *sabordinedir* denir ve $f(z) \prec g(z)$ şeklinde gösterilir.

2.6 Teorem. $\mathbb{U}$ birim diskinde f fonksiyonu analitik, g fonksiyonu da analitik ve yalınkat olsun. $f(z) \prec g(z)$ olması için gerek ve yeter şart $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik bir $w(z)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. $f(z) \prec g(z)$ ve $g(\mathbb{U}) = A$ olsun. Dolayısıyla, g^{-1} ters fonksiyonu A da analitik, $g^{-1}(A) = \mathbb{U}$ ve $g^{-1}(a_0) = 0$ olduğundan $w(z) = g^{-1}\big(f(z)\big)$ bileşke fonksiyonunun $\mathbb{U}$

bölgesini kendi içine resmeden, $w(0) = 0$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olduğu ve Schwarz Lemmanın şartlarını sağladığı görülür. Burada, $f(z) = g(w(z))$ dir.

Tersine $f(z) = g\big(w(z)\big)$ olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu mevcut olsun. Bu takdirde, her $z \in \mathbb{U}$ için $|w(z)| \leq |z|$ ve $w(0) = 0$ dır. Buradan, $f(0) = g(w(0)) = g(0)$ ve $f(w(\mathbb{U})) \subset g(\mathbb{U})$ olur ve $f(z) \prec g(z)$ elde edilir.

$f(z) \prec g(z)$ ifadesinde $g(z)$ fonksiyonu yalınkattır. Fakat Teorem 2.6 göz önüne alınırsa sabordinasyon tanımı yalınkat olmayan fonksiyonlara da genişletilebilir.

2.7 Teorem. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f \prec g$ olsun. O zaman, her $0 \leq r \leq 1$ için $f(D_r) \subset g(D_r)$ dir.

İspat. $f \prec g$ ise $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan $w(z)$ analitik fonksiyonu vardır. Buradan, $f(D_r) = g(w(D_r))$ dir. $w(D_r) \subset D_r$ olduğundan $f(D_r) = g\big(w(D_r)\big) \subset g(D_r)$ elde edilir.

2.8 Sonuç. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f \prec g$ olsun. Bu takdirde, her $r \in (0,1)$ için

$$\max_{|z| \leq r}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r}(1 - |z|^2)|g'(z)|$$

dir.

İspat. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f \prec g$ ise her $r \in (0,1)$ için

$$\max_{|z| \leq r}|f(z)| \leq \max_{|z| \leq r}|g(z)|$$

olur. Schwarz-Pick Lemma gereği

$$\max_{|z| \leq r}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r}(1 - |z|^2)|g'(z)|$$

elde edilir.

2.9 Teorem. $p \in \mathcal{P}$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} = L(z)$$

olmasıdır.

İspat. $L(z) = \frac{1+z}{1-z}$ olsun. $p \prec L$ ise

$$p(z) = L(w(z)) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. Dolayısıyla, her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\mathrm{Re}p(z) = \frac{\mathrm{Re}\left[\left(1+w(z)\right)\left(1-\overline{w(z)}\right)\right]}{|1-w(z)|^2} = \frac{1-|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2} > 0$$

dir. Böylece, $p(0) = 1$ ve $p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olduğundan $p \in \mathcal{P}$ elde edilir.

Tersine, $p \in \mathcal{P}$ olsun. Bu takdirde, $L(0) = p(0) = 1$, $p(\mathbb{U}) \subset L(\mathbb{U})$ dır ve L fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat olduğundan $p \prec L$ dir.

2.10 Lemma. $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde g fonksiyonunun yıldızıl fonksiyon olduğu varsayılsın. Eğer $\frac{f'(z)}{g'(z)} \prec H(z)$ bağıntısında f fonksiyonu analitik ve H fonksiyonu konveks yalınkat ise o zaman $\frac{f(z)}{g(z)} \prec H(z)$ dir. (Brown 1984)

$\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini elde etmek için Herlogtz (1911) un temsil teoreminden faydalanılacaktır. Bu integral temsilleri Lebesgue integrali yardımıyla elde edilebileceği gibi aşağıdaki teoremde olduğu gibi Poisson çekirdeği yardımıyla da elde edilebilir.

2.11 Tanım. $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde tanımlı $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ veya $\int_{|\eta|=1} d\mu(\eta)=1$ özelliğinde azalmayan μ fonksiyonlarına $X=\{\eta : |\eta|=1\}$ üzerinde bir *olasılık ölçümü* denir. X üzerindeki olasılık ölçümlerinin kümesi $\wp$ ile gösterilir.

2.12 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olsun. Bu takdirde, $\mathrm{Re}f(z)\geq 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t)+i\mathrm{Im}f(0) \tag{2.3}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde tanımlı $\mu(2\pi)-\mu(0)=\mathrm{Re}f(0)=1$ özelliğinde azalmayan bir μ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. f fonksiyonu (2.3) bağıntısını sağlasın. $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde tanımlı μ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon ve integrali alınan fonksiyonun reel kısmı pozitif olduğundan

$$\mathrm{Re}f(z)=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t)\geq 0$$

elde edilir.

Tersine, $\mathbb{U}$ da $\mathrm{Re}f(z)\geq 0$ olsun. Bu ifadeyi $\mathrm{Re}f(z)>0$ şeklinde almak genelliği bozmaz. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ olmak üzere $b_n=\mathrm{Re}a_n$ ve $c_n=\mathrm{Im}a_n$ olsun. $0<r<1$ ve $0\leq t\leq 2\pi$ olmak üzere

$$\mu(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{Re}f(re^{i\theta})d\theta$$

şeklinde tanımlanırsa bu fonksiyon $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan ve $\mu(r,2\pi)=b_0$ özelliğinde olur. Basit bir hesaplamayla

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(r,t) = \begin{cases} a_n \dfrac{r^n}{2}, & n = 1,2,\dots \\ \quad b_0, & n = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece

$$f(z) = \int_0^{2\pi} d\mu(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(r,t) z^n + ic_0$$

olur. $|z| < r$ için integral içindeki seri düzgün yakınsak olduğundan bu fonksiyon

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ze^{-it}}{r} \right)^n \right] d\mu(r,t) + ic_0$$

şeklinde yazılabilir. Serinin toplamı göz önüne alınırsa

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} d\mu(r,t) + ic_0 \tag{2.4}$$

elde edilir.

Şimdi $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$ özelliğinde $(0,1)$ aralığında artan bir (ρ_n) dizisi ele alınsın. Ayrıca, $t \in [0,2\pi]$ için $\mu_n(t) = \mu(\rho_n, t)$ olsun. Bu durumda (μ_n), $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon dizisidir. Teorem 1.29 gereği, $k \to \infty$ iken $\mu_{n_k} \to \mu$ olacak biçimde (μ_n) dizisinin bir (μ_{n_k}) alt dizisi ve $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu bulunabilir. Ayrıca $[0,2\pi]$ aralığında her bir sürekli h fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t) d\mu_{n_k}(t) = \int_0^{2\pi} h(t) d\mu(t)$$

dir. Dolayısıyla, sabit z değeri ve $k \to \infty$ için

$$\frac{\rho_{n_k}e^{it}+z}{\rho_{n_k}e^{it}-z} \to \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$$

yakınsaması t ye göre düzgündür. Buradan

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_{n_k}e^{it}+z}{\rho_{n_k}e^{it}-z}d\mu_{n_k}(t)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (2.4) bağıntısından (2.3) bağıntısı elde edilir ve ispat tamamlanır.

$\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini veren ve Herglotz Temsil Teoremi olarak bilinen sonuç, Teorem 2.12 nin doğrudan bir sonucudur.

2.13 Sonuç (Herglotz Temsil Teoremi). f, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ve $f(0)=1$ olsun. O zaman $f\in\mathcal{P}$ olması için gerek ve yeter şart $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ ve $\mathbb{U}$ birim diskinde

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t) \tag{2.5}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde tanımlı azalmayan bir μ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

Herglotz Temsil Teoremi, reel kısmı pozitif fonksiyonlar için distorsiyon sonuçlarının elde edilmesinde kullanılır.

2.14 Teorem. $p\in\mathcal{P}$ ve $|z|=r<1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r}\le|p(z)|\le\frac{1+r}{1-r} \tag{2.6}$$

$$\frac{1-r}{1+r}\le Rep(z)\le\frac{1+r}{1-r} \tag{2.7}$$

$$|p'(z)| \leq \frac{2Rep(z)}{1-r^2} \leq \frac{2}{(1-r)^2} \tag{2.8}$$

dir. Eşitlik $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $p \in \mathcal{P}$ olduğundan $|z| = r < 1$ için $p(z) \prec L(z)$ dir. O halde

$$p(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. Böylece, $z \in \mathbb{U}$ için $|w(z)| \leq |z|$ olduğundan

$$|p(z)| = \left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right| \leq \frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{1+r}{1-r} \tag{2.9}$$

elde edilir. Teorem 2.2 gereği $p \in \mathcal{P}$ iken $1/p \in \mathcal{P}$ olduğundan (2.9) eşitsizliği $1/p$ fonksiyonu için de geçerlidir. Buradan, $|1/p(z)| \leq (1+r)/(1-r)$ veya buna denk olarak

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |p(z)| \tag{2.10}$$

bulunur. Böylece, (2.9) ve (2.10) dan (2.6) bağıntısı elde edilir.

(2.7) bağıntısı, (2.6) dan veya (2.5) bağıntısının her iki yanının reel kısmı alınarak elde edilir.

(2.8) bağıntısını elde etmek için (2.5) in z ye göre türevi alınırsa

$$|p'(z)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{2d\mu(t)}{|1-ze^{-it}|^2} = \frac{2}{1-r^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t)$$

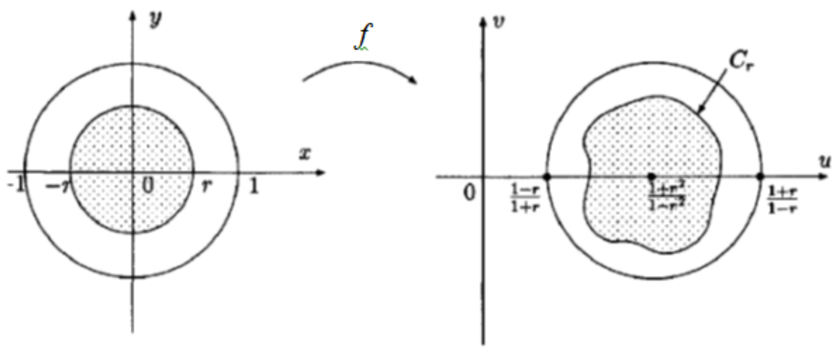
$$= \frac{2\mathrm{Re}p(z)}{1-r^2} \leq \frac{2}{(1-r)^2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.15 Uyarı. $p \in \mathcal{P}$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{U}$ için (2.6) bağıntısının her iki tarafından $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ ifadesi çıkarılırsa

$$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2} \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.11) eşitsizliği, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir p fonksiyonunun $p(\mathbb{U})$ görüntü kümesinin merkezi $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ ve yarıçapı $\frac{2r}{1-r^2}$ olan kapalı diskin içinde kaldığını gösterir. Bu durum Şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 $C_r, \partial\mathbb{U}_r$ görüntüsü

2.16 Tanım. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ serileri, $\mathbb{U}_r = \{z: |z| < r\}$ diskinde yakınsak olsunlar. O zaman, her $n \geq 0$ tamsayısı için $|a_n| \leq A_n$ ise, f fonksiyonuna F ile domine edilmiştir denir ve $f(z) \ll F(z)$ ile gösterilir.

Aşağıda verilen, domine edilmiş fonksiyonlarla ilgili bazı sonuçlar $\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini bulmada önemli rol oynar.

2.17 Teorem. $f(z) \ll F(z)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $n = 0,1,2, \ldots$ için $\mathrm{A_n} \geq 0$ dır.

(ii) $0 \leq |z| = r < R$ için $|f(z)| \leq F(r)$ dir.

(iii) $f'(z) \ll F'(z)$ dir.

(iv) $\int_0^{2\pi} f(\xi)d\xi \ll \int_0^{2\pi} F(\xi)d\xi$ dır.

İspat. (iii) $f(z) \ll F(z)$ olsun. $z \in D_r$ için

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \text{ ve } F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}z^n$$

dir. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $|a_n| \leq A_n$ olduğundan $(n+1)|a_n| \leq (n+1)A_n$ olur. Böylece $f'(z) \ll F'(z)$ elde edilir.

2.18 Teorem. $p \in \mathcal{P}$ ve $n \geq 0$ için

$$|p^n(z)| \leq \frac{2(n!)}{(1-r)^{n+1}}$$

dir. Eşitlik $p(z) = L(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $p \in \mathcal{P}$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $p(z) \ll L(z)$ dir. Teorem 2.17 gereği $n = 0,1,2, \ldots$ için $p^{(n)}(z) \ll L^{(n)}(z)$ olur. $|z| = r < 1$ için

$$|p^{(n)}(z)| \leq L^{(n)}(r) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)|_{z=r} = \frac{2(n!)}{(1-r)^{n+1}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.19 Teorem. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P}$ ise $n = 1,2,\ldots$ için $|a_n| \leq 2$ dir. Eşitlik $p(z) = L(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir. (Hayami ve Owa 2009)

İspat. Teorem 2.18 de $z = 0$ alınırsa, her $n \geq 1$ için $|p^{(n)}(0)| = n!|a_n| \leq 2(n!)$ olur. Buradan, $|a_n| \leq 2$ elde edilir.

Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların yüksek mertebeden türevlerinin hesabını elde etmek için Teorem 1.31 in benzer uygulamaları sıradaki iki teoremde ifade edilir.

2.20 Teorem. $p: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}p(z) > 0$ olsun. O zaman

$$|p^n(z)| \leq \frac{n!\,\mathrm{Re}p(z)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} \tag{2.12}$$

olur.

İspat. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}p(z) > 0$ iken

$$|a_n| \leq 2 \ \ (n = 1,2,3,\ldots)$$

olduğu biliniyor ve bu eşitsizlik yardımıyla teorem kolayca ispatlanır.

Basit bir örnek şu şekilde ifade edilebilir. $L(z) = \frac{1+z}{1-z}$ olsun. $L(z)$ bir analitik fonksiyon ve $\mathrm{Re}L(z) > 0$ olduğu biliniyor. Hesaplamalardan, $L^n(z) = \frac{2n!}{(1-z)^{n+1}}$ elde edilir. Buradan,

$$|L^n(z)| = \frac{2n!}{|1-z|^{n+1}}$$

olur. Dolayısıyla, her x $(0 \leq x \leq 1)$ reel sayısı için $z = x$ alınırsa

$$|L^n(x)| = \frac{2n!}{|1-x|^{n+1}}$$

olur.

Sıradaki teorem, (2.12) eşitsizliğinin asimptotik olarak birim diskin her sınır noktasında doğru olduğunu gösterir.

2.21 Teorem. $p\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{U}$ için $Rep(z) > 0$ olsun. $r = |z|$, $z = re^{i\theta}$ ve her θ için,

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{n+1}|p^n(z)| = 2n! \lim_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}\mathrm{Re}p(z)$$

dir.

2.22 Tanım. Herhangi bir $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P}$ ve $\delta \geq 0$ için, p nin δ komşuluğu şu şekilde ifade edilir;

$$N_\delta(p) = \left\{ q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - c_n| \leq \delta \right\}.$$

(Walker 1990, Owa ve ark. 1993)

2.23 Lemma. $\mathbb{U}$ birim diskinde, $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ kuvvet serileri $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyona yakınsaktır ancak ve ancak $a_{-n} = \bar{a}_n$ iken

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{-1} & 2 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & 2 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

Toeplitz determinantlarının hiçbiri negatif değildir.

$L(z) = \frac{1+z}{1-z}, \rho_n > 0, t_n$ reel ve $n \neq j$ için $t_n \neq t_j$ şartları altında $p(z) = \sum_{n=1}^{m} \rho_n L(e^{it_n} z)$ fonksiyonları hariç bütün değerleri kesinlikle pozitiftir. Bu durumda $n < m$ için $D_n > 0$ ve $n \geq m$ için $D_n = 0$ dır. (Hayami ve Owa 2009)

Libera ve Zlotkiewicz (1982) in çalışmalarında, Lemma 2.23 kullanılarak $n = 2,3$ için aşağıdaki lemma elde edilir.

2.24 Lemma. $p(z) \in \mathcal{P}$ ise ζ ve η $(|\zeta| \leq 1, |\eta| \leq 1)$ kompleks sayıları için,

$$2a_2 = a_1^2 + (4 - a_1^2)\zeta$$

$$4a_3 = a_1^3 + (4 - a_1^2)a_1\zeta - (4 - a_1^2)a_1\zeta^2 + 2(4 - a_1^2)(1 - |\zeta|^2)\eta$$

eşitlikleri elde edilir. (Hayami ve Owa 2009)

2.25 Lemma. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \lim\max_{n\to\infty} |z^n|^{1/n} < 1$ şartını sağlayan her $\{z_n\}$ kompleks sayı dizisi için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left| 2z_j + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_{n+j} \right|^2 - \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z_{n+j} \right|^2 \right\} \geq 0$$

dir. (Ravichandran ve Verma 2015)

2.26 Lemma. α, β, γ ve c değerleri, $0 < \alpha < 1, 0 < c < 1$ ve

$$\begin{aligned} &8c(1-c)[(\alpha\beta - 2\gamma)^2 + (\alpha(c+\alpha) - \beta)^2] + \alpha(1-\alpha)(\beta - 2c\alpha)^2 \\ &\leq 4\alpha^2(1-\alpha)^2 c(1-c) \end{aligned} \tag{2.13}$$

eşitsizliklerini sağlasın. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P}$ ise

$$\left|\gamma a_1^4 + ca_2^2 + 2\alpha a_1 a_3 - \frac{3}{2}\beta a_1^2 a_2 - a_4\right| \leq 2$$

dir. (Ravichandran ve Verma 2015)

İspat. $\{z_n\}$ kompleks sayı dizisi, $z_0 = \alpha a_3 - \beta a_1 a_2 + \gamma a_1^3$, $z_1 = ca_2 - \delta a_1^2$, $z_2 = ba_1$, $z_3 = -1$ ve her $n \geq 4$ için $z_n = 0$ olsun. $\{z_n\}$ dizisinin bu seçimi ile

$$v = \frac{\delta(1-c) + c(b-\delta)}{c(1-c)}$$

olmak üzere Lemma 2.25 den

$$\begin{aligned}
&|\gamma a_1^4 + ca_2^2 + (c+b)a_1 a_3 - (\beta+\delta)a_1^2 a_2 - a_4|^2 \\
&\qquad \leq |(2\alpha-1)a_3 + (c+b-2\beta)a_1 a_2 + (2\gamma-\delta)a_1^3|^2 \\
&\qquad + |(2c-1)a_2 + (b-2\delta)a_1^2|^2 - |(c+b)a_1 a_2 - \delta a_1^3 - a_3|^2 \\
&\qquad + (2b-1)^2|a_1|^2 - |ba_1^2 - a_2|^2 + 4 - |a_1|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\alpha(\alpha-1)\left|a_3 + \frac{\alpha(c+b) + \beta(1-2\alpha)}{2\alpha(\alpha-1)}a_1 a_2 + \frac{\alpha(\gamma-\delta) + \gamma(\alpha-1)}{2\alpha(\alpha-1)}a_1^3\right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}|(\alpha\delta-\gamma)a_1^3 + (\alpha(c+b)-\beta)a_1 a_2|^2 \\
&\quad + \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}(\alpha\delta-\gamma)^2|a_1|^6 + \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}(\alpha(c+b)-\beta)^2|a_1|^2|a_2|^2 \\
&\quad + 4c(c-1)\left|a_2 - \frac{v}{2}a_1^2\right|^2 + \frac{(\delta-cb)^2}{c(1-c)}|a_1|^4 + 4b(b-1)|a_1|^2 + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}(\alpha\delta-\gamma)^2|a_1|^6 + \frac{8}{\alpha(\alpha-1)}(\alpha(c+b)-\beta)^2|a_1|^2 + \frac{(\delta-cb)^2}{c(1-c)}|a_1|^4 \\
&\quad + 4b(b-1)|a_1|^2 + 4
\end{aligned}$$

elde edilir. $b = \alpha,\ \delta = \beta/2$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik

$$\left|\gamma a_1^4 + c a_2^2 + 2\alpha a_1 a_3 - \frac{3}{2}\beta a_1^2 a_2 - a_4\right|^2$$

$$\leq \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\left(\frac{\alpha\beta}{2} - \gamma\right)^2 |a_1|^6 + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\left(\frac{\beta}{2} - c\alpha\right)^2 |a_1|^4$$

$$+ \left(\frac{8}{\alpha(\alpha-1)}(\alpha(c+\alpha)-\beta)^2 + 4\alpha(\alpha-1)\right)|a_1|^2 + 4$$

$$= px^3 + qx^2 + rx + 4$$

olur ve burada $x = |a_1|^2 \in [0,4]$ ve

$$p = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\left(\frac{\alpha\beta}{2} - \gamma\right)^2$$

$$q = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\left(\frac{\beta}{2} - c\alpha\right)^2$$

$$r = \left(\frac{8}{\alpha(\alpha-1)}(\alpha(c+\alpha)-\beta)^2 + 4\alpha(\alpha-1)\right)|a_1|^2$$

dir. $p \geq 0$ ve $q \geq 0$ olduğundan (2.13) bağıntısı kullanılarak

$$px^2 + qx + r \leq 16p + 4q + r$$

$$= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)c(1-c)}\big(8c(1-c)\big)[(\alpha\beta-2\gamma)^2 + (\alpha(c+\alpha)-\beta)^2]$$

$$+ \alpha(\alpha-1)(\beta-2c\alpha)^2 - 4\alpha^2(1-\alpha)^2 c(1-c) \leq 0$$

elde edilir ve buradan

$$px^3 + qx^2 + rx + 4 \leq 4$$

bulunur.

2.27 Lemma. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P}$ ise

a) $|a_1^4 + a_2^2 + 2a_1a_3 - a_1^2a_2 - a_4| \leq 2;$

b) $\left|a_1^5 + 3a_1a_2^2 + 3a_1^2a_3 - 4a_1^3a_2 - 2a_1a_4 - 2a_2a_3 + a_5\right| \leq 2;$

c) $|a_1^6 + 6a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_3 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 - a_2^3 - 5a_1^4a_2 - 3a_1^2a_4 - 6a_1a_2a_3 - a_6| \leq 2;$

d) $|a_k| \leq 2 \ (k \geq 1)$

dir. (Ravichandran ve Verma 2015)

İspat. Bütün eşitsizlikler Lemma 2.25 de farklı $\{z_n\}$ seçimleriyle elde edilir.

(a) eşitsizliği için $\{z_n\}$ dizisi $z_0 = a_3 - 2a_1a_2 + a_1^3, z_1 = a_2 - a_1^2, z_2 = a_1, z_3 = -1$ ve her $n \geq 4$ için $z_n = 0$ şeklinde seçilir.

(b) eşitsizliği için $\{z_n\}$ dizisi $z_0 = a_1^4 + a_2^2 + 2a_1a_3 - 3a_1^2a_2 - a_4,\ z_1 = -a_3 + 2a_1a_2 - a_1^3, z_2 = -a_2 + a_1^2, z_3 = -a_1, z_4 = 1$ ve her $n \geq 5$ için $z_n = 0$ şeklinde seçilir.

(c) eşitsizliği için $\{z_n\}$ dizisi $z_0 = a_5 + a_1^5 + 3a_1a_2^2 + 3a_1^2a_3 - 4a_1^3a_2 - 2a_1a_4 - 2a_2a_3, z_1 = -a_1^4 - a_2^2 - 2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_4, z_2 = a_3 - 2a_1a_2 + a_1^3, z_3 = -a_1^2 + a_2,$ $z_4 = a_1, z_5 = -1$ ve her $n \geq 6$ için $z_n = 0$ şeklinde seçilir.

Son olarak, (d) eşitsizliği için $\{z_n\}$ dizisi $z_{k-1} = 1$ ve her $n \neq k-1$ için $z_n = 0$ seçimiyle ispat tamamlanır.

2.28 Lemma. $p \in \mathcal{P}$ ise her $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\mu a_i a_j - a_{i+j}\right| \leq \begin{cases} 2, & 0 \leq \mu \leq 1; \\ 2|2\mu - 1|, & \text{diğer} \end{cases}$$

dir. (Ravichandran ve Verma 2015)

İspat. $i \leq j$ durumunu ispatlamak yeterlidir. Sabit $i, j \in \mathbb{N}$ için $\{z_n\}$ kompleks sayı dizisi $z_{i-1} = \mu a_j$, $z_{i+j} = -1$ ve her $n \neq i-1, i+j-1$ için $z_n = 0$ şeklinde seçilsin. Lemma 2.25 den

$$\left|\mu a_i a_j - a_{i+j}\right|^2 \leq \left|(2\mu - 1)a_j\right|^2 + \left|a_j\right|^2 + 4$$

$$= 4\mu(\mu - 1)\left|a_j\right|^2 + 4$$

$$\leq \begin{cases} 4, & 0 \leq \mu \leq 1; \\ 4(2\mu - 1)^2, & \text{diğer} \end{cases}$$

elde edilir. Eğer $0 \leq \mu \leq 1$ ise eşitsizlik $p(z) = \left(1 + z^{i+j}\right)/\left(1 - z^{i+j}\right)$ fonksiyonu için ve diğer durumlar da $L(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonu için sonuç kesindir.

2.29 Sonuç. $p \in \mathcal{P}$ ise $\mu \leq 1$ için

$$|\mu a_i a_{2i} - a_i{}^3| \leq 4(2 - \mu)$$

ve

$$|\mu a_i{}^2 a_{2i} - a_i{}^4| \leq 8(2 - \mu)$$

dir. Eşitsizlikler $L(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonu için kesindir. (Ravichandran ve Verma 2015)

İspat. $\mu = 0$ için ispat açık olduğundan $\mu \neq 0$ olduğu varsayılsın. Lemma 2.28 in uygulanmasından

$$|\mu a_i a_{2i} - a_i{}^3| = |\mu||a_i|\left|a_{2i} - \frac{1}{\mu}a_i{}^2\right| \leq 4(2-\mu)$$

ve

$$|\mu a_i{}^2 a_{2i} - a_i{}^4| = |\mu||a_i|^2\left|a_{2i} - \frac{1}{\mu}a_i{}^2\right| \leq 8(2-\mu)$$

elde edilir. Eşitsizlikler $L(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonu için kesindir.

3. $\mathcal{P}$ SINIFININ BAZI ALT SINIFLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları tanıtılacak ve bu sınıfların sabordinasyon, komşuluk ve distorsiyon gibi özellikleri incelenecektir.

3.1 $\mathcal{P}'$ Sınıfı ve Özellikleri

Bu kısımda, Walker (1990) tarafından çalışılan $\mathcal{P}'$ sınıfı tanıtılıp sabordinasyon, komşuluk ve Hadamard çarpımı özellikleri verilecektir.

3.1.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde seri açılımına sahip ve

$$\mathrm{Re}[zp(z)]' > 0$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}'$ ile gösterilir.

3.1.2 Teorem. $\mathcal{P}'$ sınıfı $\mathcal{P}$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

İspat. Teorem 2.6 dan,

$$p \in \mathcal{P} \iff p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} = L(z) \tag{3.1}$$

ve

$$p \in \mathcal{P}' \iff [zp(z)]' \prec \frac{1+z}{1-z} \tag{3.2}$$

olduğu görülür. Şimdi $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ olduğu gösterilsin. (3.2) bağıntısından $p \in \mathcal{P}'$ ise

$$[zp(z)]' \prec \frac{1+z}{1-z}$$

olur ve buradan

$$\frac{[zp(z)]'}{[z]'} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

yazılabilir.

$L(z)$ fonksiyonu konveks ve yalınkat olduğundan Lemma 2.10 gereği $\frac{zp(z)}{z} \prec \frac{1+z}{1-z}$ elde edilir ve buradan $p(z) \prec L(z)$ bulunur. Dolayısıyla, (3.1) bağıntısından $p \in \mathcal{P}$ olduğu görülür ve böylece $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ elde edilir.

3.1.3 Uyarı. $q \in \mathcal{P}$ olması için gerek ve yeter şartın $q(z) \prec L(z)$ olduğu biliniyor. $L(z)$ fonksiyonu yalınkat olduğundan

$$q \in \mathcal{P} \Leftrightarrow q(z) \neq \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \; (0 < \theta < 1, |z| < 1\,)$$

olur. Yani,

$$q \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \left(1-e^{i\theta}\right)q(z) - \left(1+e^{i\theta}\right) \neq 0 \; (0 < \theta < 2\pi, |z| < 1) \qquad (3.3)$$

dir.

Diğer yandan, Tanım 1.38 den

$$\left(1-e^{i\theta}\right)q(z) - \left(1+e^{i\theta}\right) = \left(1-e^{i\theta}\right)\left[\frac{1}{1-z} * q(z)\right] - \left(1+e^{i\theta}\right) * q(z)$$

$$= \left(\frac{1 - e^{i\theta}}{1 - z} - \left(1 + e^{i\theta}\right) \right) * q(z)$$

şeklinde yazılabilir. $h_\theta(z)$ fonksiyonu $h_\theta(z) = -\frac{1}{2e^{i\theta}}\left[\frac{1-e^{i\theta}}{1-z} - \left(1 + e^{i\theta}\right)\right]$ şeklinde tanımlanırsa $h_\theta(0) = 1$ olur ve

$$q \in \mathcal{P} \Leftrightarrow h_\theta(z) * q(z) \neq 0 \ (0 < \theta < 2\pi, |z| < 1) \tag{3.4}$$

olduğu görülür.

3.1.4 Lemma. $p \in \mathcal{P}'$ ise $z(p * h_\theta)$ fonksiyonu her $0 < \theta < 2\pi$ için yalınkattır.

İspat: $0 < \theta < 2\pi$ için

$$[z(p * h_\theta)]' = \left[\frac{-z}{2e^{i\theta}} \left((1 - e^{i\theta})p(z) - \left(1 + e^{i\theta}\right) \right) \right]'$$

$$= \frac{-1}{2}\left[zp(z) - \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} z\right]' \frac{1 - e^{i\theta}}{e^{i\theta}}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\left(zp(z)\right)' - \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right](1 - e^{i\theta})e^{-i\theta} \tag{3.5}$$

elde edilir. Tanım 3.1.1 den görülür ki $\mathbb{U}$ birim diskinin $\left(zp(z)\right)'$ fonksiyonunun altındaki görüntüsü $\mathrm{Re}(z) > 0$ bölgesinde ve $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ fonksiyonunun altındaki görüntüsü de sanal eksen üzerindedir. Dolayısıyla,

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}[z(p * h_\theta)(z)]'\right\} > 0 \ \ (|z| < 1\,)$$

olacak şekilde bir $\alpha = \arg\{-\left(1 - e^{i\theta}\right)^{-1} e^{i\theta}\}$ seçilebilir. Teorem 1.39 dan her θ $(0 < \theta < 2\pi)$ için $z(p * h_\theta)$ fonksiyonunun yalınkat olduğu görülür.

3.1.5 Lemma. $p \in \mathcal{P}'$ ise her θ $(0 < \theta < 2\pi)$ ve $|z| = r < 1$ için

$$|[z(p * h_\theta)]'| > \frac{1-r}{1+r}$$

dir.

İspat: $|[z(p * h_\theta)]'|$ ifadesi için (3.5) bağıntısı kullanılarak $F(w)$ fonksiyonu

$$F(w) = e^{-i\theta}(1-e^{i\theta})\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} - w\right)\left(w = \frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}, 0 \le \theta \le 2\pi\right)$$

biçiminde tanımlanır ve ayrıca

$$F(w) = e^{-i\theta}\{(1+e^{i\theta}) - (1-e^{i\theta})w\} \; (0<\theta<2\pi)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan,

$$|F(w)| = |1+w|\left|\frac{1-w}{1+w} + e^{i\theta}\right|$$

$$= |1+w||e^{i\theta} - re^{it}|$$

$$= |1+w||1 - re^{i(t-\theta)}|$$

$$\ge (1-r)|1+w|$$

elde edilir. $|1+w| = \left|1 + \frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right| = \left|\frac{2}{1-re^{it}}\right| \ge \frac{2}{1+r}$ olduğundan, $|F(w)| \ge 2\frac{1-r}{1+r}$ olduğu görülür. Son olarak, $w = [zp(z)]'$ seçilirse istenilen eşitsizlik yani

$$|[z(p * h_\theta)]'| > \frac{1-r}{1+r}$$

elde edilir.

3.1.6 Lemma. $p \in \mathcal{P}'$ ise $|p * h_\theta| \geq \delta = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\, dt = 2\ln 2 - 1$ dir.

İspat: $p \in \mathcal{P}'$ olsun. Bu takdirde, Lemma 3.1.4 gereği $z(p * h_\theta)$ fonksiyonu yalınkattır.

$$\min_{|z|=r} |z(p * h_\theta)| = |z_0(p * h_\theta)(z_0)|$$

olacak şekilde bir z_0, $|z_0| = r\ (0 < r < 1)$, seçilsin. $z(p * h_\theta)$ fonksiyonu yalınkat olduğundan, 0 ve $z_0[(p * h_\theta)(z_0)]$ noktaları arasındaki doğru parçasının L ters görüntüsü $|z| \leq r$ içerisinde bir yaydır. Dolayısıyla, $|z| \leq r$ için

$$|z(p * h_\theta)| \geq |z_0(p * h_\theta)|$$

$$= \int_L |[z(p * h_\theta)]'||dz|$$

$$\geq \int_0^r |[z(p * h_\theta)]'||dz|$$

elde edilir. Benzer şekilde Lemma 3.1.5 uygulanarak

$$|[p * h_\theta](z)| \geq \frac{1}{r}\int_0^r |[z(p * h_\theta)]'||dz|$$

$$\geq \frac{1}{r}\int_0^r \frac{1-t}{1+t} dt$$

$$= \frac{2}{r}\ln(1+r) - 1$$

bulunur.

$g(r) = 2\ln(1+r)/r - 1$ fonksiyonu $r > 0$ için $g'(r) = \frac{-2}{r^2}\ln(1+r) + \frac{2}{r(1+r)} < 0$ ise azalandır. $r \geq 0$ için $r - (1+r)\ln(1+r) \leq 0$ olduğundan $g'(r) < 0$ dır.Böylece, $|p * h_\theta| \geq 2\ln 2 - 1$ olur.

3.1.7 Teorem: $p \in \mathcal{P}'$ olsun bu takdirde $\delta = 2\ln 2 - 1 = 0.3862944$ ise $N_\delta(p) \subset \mathcal{P}$ dir. Bu sonuç kesindir.

İspat. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P}'$ ve $\delta = 2\ln 2 - 1 = 0.3862944$ olsun. Tanım 2.22 den, her $q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in N_\delta(p)$ fonksiyonunun $\mathcal{P}$ sınıfına ait olduğu gösterilmelidir. Burada, $q(z)$ fonksiyonu keyfi fakat $N_\delta(p)$ komşuluğunda belli bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - c_n| \leq \delta$ olur. Buradan,

$$|h_\theta * q| = |(h_\theta * q) + h_\theta * (q - p)|$$

$$\geq |(h_\theta * p)| - |h_\theta * (q - p)|$$

$$\geq \delta - \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{i\theta}}{2} (a_n - c_n)\, z^n\right|$$

$$> \delta - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - c_n| \geq \delta - \delta = 0$$

bulunur. Böylece, $|z| < 1$ için $h_\theta * q \neq 0$ olur ve (3.4) bağıntısından $q \in \mathcal{P}$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $N_\delta(p) \subset \mathcal{P}$ dir.

Şimdi bu sonucun kesin olduğunu ispatlayalım. $p(z)$ fonksiyonu $\left(zp(z)\right)' = (1+z)/(1-z)$ şeklinde tanımlansın. Böylece,

$$p(z) = -1 - \frac{2}{z}\ln(1-z)$$

olur. $q(z) = p(z) + \delta z = -1 - \frac{2}{z}\ln(1-z) + \delta z$ alınırsa $q \in N_\delta(p)$ olduğu açıktır. Ancak, $z \to -1$ iken $q(z) \to -1 + 2\ln 2 - \delta = q(-1)$ olur. Dolayısıyla, $\delta > 2\ln 2 - 1$ iken $q(-1) < 0$ dir ve sonuç olarak, $z \to -1$ iken $\mathrm{Re}q(z) < 0$ olur. Ancak bu durum $\mathrm{Re}q(z) > 0$ ($|z| < 1$) olmasıyla çelişir ve ispat tamamlanır.

3.2 $\mathcal{P}_b(\alpha)$ ve $\mathcal{P}'_a(\alpha)$ Sınıfları ve Özellikleri

Bu bölümde McCarty (1972) tarafından çalışılan $\mathcal{P}_b(\alpha)$ ve $\mathcal{P}'_a(\alpha)$ sınıfları tanımlanacaktır. Distorsiyon sınırlarını ve kapsama özelliklerini elde etmek için b ve α ya bağlı bazı eşitsizlikler ifade edilecektir.

3.2.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + b(1-\alpha)z + \cdots$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $\alpha \in [0,1), b \in [0,2]$ iken her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\mathrm{Re}p(z) > \alpha$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}_b(\alpha)$ ile gösterilir.

Lemma 1.35 ve aşağıdaki lemma, $\mathcal{P}_b(\alpha)$ sınıfı için ifade edilecek teoremlerin ispatlarında gereklidir.

3.2.2 Lemma. $p(z) \in \mathcal{P}_b(0)$ olsun. O zaman

(i) $|p(z)| \leq \frac{1+b|z|+|z|^2}{1-|z|^2}$,

(ii) $\quad \operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1-|z|^2}{1+b|z|+|z|^2}$

dir. (Tepper 1970)

Lemma 3.2.2, daha sonra kullanılmak üzere aşağıdaki sonuca genişletilebilir.

3.2.3 Sonuç. $p(z) \in \mathcal{P}_b(\alpha)$ ise

(i) $\quad |p(z)| \leq \frac{1+b(1-\alpha)|z|+(1-2\alpha)|z|^2}{1-|z|^2}$,

(ii) $\quad \operatorname{Re} p(z) \geq \frac{1+b\alpha|z|-(1-2\alpha)|z|^2}{1+b|z|+|z|^2}$

dir ve sonuç kesindir.

İspat. $H(z) = \frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}$ olsun. O zaman $H(z) \in \mathcal{P}_b(0)$ ve $p(z) = (1-\alpha)H(z) + \alpha$ dır. Lemma 3.2.2 (i)

$$|p(z)| \leq (1-\alpha)|H(z)| + \alpha$$

denklemine ve Lemma 3.2.2 (ii)

$$\operatorname{Re} p(z) = (1-\alpha)\operatorname{Re} H(z) + \alpha$$

denklemine uygulanıp sadeleştirilsin. Ayrıca, her $b \in [0,2]$ iken (i) için

$$p_1(z) = \frac{1+b(1-\alpha)z+(1-2\alpha)z^2}{1-z^2}$$

ve (ii) için

$$p_2(z) = \frac{1 - b\alpha z - (1 - 2\alpha)z^2}{1 - bz + z^2}$$

fonksiyonları ele alınırsa sonuç kesindir.

3.2.4 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_b(0)$ ise

$$|p'(z)| \leq \frac{\operatorname{Re} p(z)}{1 - |z|^2} \left\{ \frac{b|z|^2 + 4|z| + b}{|z|^2 + b|z| + 1} \right\}$$

dır.

İspat. $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ve $p(0) = 1$ olduğundan, $p(z)$ fonksiyonu $L(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna sabordinedir. Dolayısıyla,

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} = 1 + bz + \cdots \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir $w(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu mevcuttur. Hesaplamalardan $w(z) = \frac{bz}{2} + \cdots$ olduğu görülür. Ayrıca, $w(0) = 0$ ve $|w(z)| \leq 1$ olduğundan $w(z) = z\phi(z)$ olacak şekilde bir $\phi(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu mevcuttur ve (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$p(z) = \frac{1 + z\phi(z)}{1 - z\phi(z)} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinin iki tarafının da z ye göre türevi ve mutlak değeri alınırsa

$$|p'(z)| = \frac{2|z\phi'(z) + \phi(z)|}{|1 - z\phi(z)|^2}$$

$$= \frac{2|z\phi'(z) + \phi(z)|}{1 - |z\phi(z)|^2} \frac{1 - |z\phi(z)|^2}{|1 - z\phi(z)|^2}$$

$$= \frac{2|z\phi'(z) + \phi(z)|}{1 - |z\phi(z)|^2} \operatorname{Re} p(z) \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) denkleminin sağ tarafına önce üçgen eşitsizliği sonra Lemma 1.35 (i) uygulanırsa

$$|p'(z)| \leq \frac{2 \operatorname{Re} p(z)}{1 - |z|^2} \left\{ \frac{|\phi(z)|(1 - |z|^2) + |z|(1 - |\phi(z)|^2)}{1 - |z|^2 |\phi(z)|^2} \right\}$$

$$= \frac{2 \operatorname{Re} p(z)}{1 - |z|^2} \left\{ \frac{|\phi(z)| + |z|}{1 + |z||\phi(z)|} \right\} \tag{3.9}$$

bulunur ve (3.9) eşitsizliğinin sağında bulunan büyük parantezin içindeki ifade $|\phi(z)|$ ye göre monoton artandır. Gerçekten de, $r = |z|$, $x = |\phi(z)|$, ve $g(x) = (x + r)/(1 + xr)$ alınırsa $r = [0,1)$ ve $x \in [0,1]$ olduğu için $g'(x) = \frac{1-r^2}{(1+xr)^2} > 0$ olur. Son olarak, $\phi(z) = w(z)/z = b/2 + \cdots$ ve $z_0 = b/2$ olmak üzere Lemma 1.35 (ii), (3.9) eşitsizliğinin sağ tarafına uygulanırsa

$$|p'(z)| \leq \frac{2 \operatorname{Re} p(z)}{1 - |z|^2} \left\{ \frac{\frac{2|z| + b}{2 + b|z|} + |z|}{1 + \frac{|z|(2|z| + b)}{2 + b|z|}} \right\}$$

$$= \frac{\operatorname{Re} p(z)}{1 - |z|^2} \left\{ \frac{b|z|^2 + 4|z| + b}{|z|^2 + b|z| + 1} \right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.2.5 Sonuç. $p(z) \in \mathcal{P}_b(\alpha)$ ise

$$|p'(z)| \leq \frac{\operatorname{Re} p(z) - \alpha}{1 - |z|^2} \left\{ \frac{b|z|^2 + 4|z| + b}{|z|^2 + b|z| + 1} \right\} \tag{3.10}$$

dır.

İspat. $H(z)=\frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}$ alınırsa $H(z)\in\ \mathcal{P}_b(0)$ olur. Teorem 3.2.4 kullanılarak $\frac{|p'(z)|}{1-\alpha}\leq$ $\operatorname{Re}\left\{\frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}\right\}\frac{1}{1-|z|^2}\left\{\frac{b|z|^2+4|z|+b}{|z|^2+b|z|+1}\right\}$ elde edilir ve bu ifadenin (3.10) eşitsizliğine denk olduğu görülür.

$b\leq 2$ olması $\frac{b|z|^2+4|z|+b}{|z|^2+b|z|+1}\leq 2$ eşitsizliğini verir ve dolayısıyla sıradaki iki sonuç kolayca elde edilir.

3.2.6 Sonuç. $p(z)\in\mathcal{P}(\alpha)$ ise

$$|p'(z)|\leq\frac{\operatorname{Re}p(z)-\alpha}{1-|z|^2}$$

dır.

3.2.7 Sonuç. $p(z)\in\mathcal{P}(\alpha)$ ve $p'(0)=0$ ise

$$|p'(z)|\leq\frac{4|z|}{(1-|z|^4)(\operatorname{Re}p(z)-\alpha)}$$

dır.

3.2.8 Teorem. $p(z)\in\ \mathcal{P}_b(\alpha)$ ise

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|\leq\frac{1-\alpha}{1-|z|^2}\left\{\frac{b|z|^2+4|z|+b}{(1-2\alpha)|z|^2+b(1-\alpha)|z|+1}\right\}$$

dır.

İspat. $H(z)=\frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}$ alınırsa $H(z)\in\ \mathcal{P}_b(0)$ ve $p(z)=(1-\alpha)H(z)+\alpha$ olur. Böylece,

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| = \left|\frac{(1-\alpha)H'(z)}{(1-\alpha)H(z)+\alpha}\right| = \left|\frac{H'(z)}{H(z)+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\right|$$

elde edilir ve bu eşitliğin sağ tarafının payına Teorem 3.2.4 uygulanırsa

$$\left|\frac{H'(z)}{H(z)+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\right| \leq \frac{1}{1-|z|^2}\left\{\frac{b|z|^2+4|z|+b}{|z|^2+b|z|+1}\right\}\frac{\operatorname{Re} H(z)}{\left|H(z)+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right|}$$

$$\leq \frac{1}{1-|z|^2}\left\{\frac{b|z|^2+4|z|+b}{|z|^2+b|z|+1}\right\}\frac{1}{1+\left[\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right]/\operatorname{Re} H(z)}$$

elde edilir. $\operatorname{Re} H(z) \leq |H(z)|$ olduğundan, son eşitsizlikte $\operatorname{Re} H(z)$ için Lemma 3.2.2 (i) uygulanırsa teorem ispatlanır. Ayrıca,

$$p(z) = \frac{1+b(1-\alpha)z+(1-2\alpha)z^2}{1-z^2}$$

fonksiyonu için sonuç kesindir.

3.2.9 Tanım. $p'(z) \in \mathcal{P}_{2a}(\alpha)$ şartını sağlayan

$$p(z) = z + a(1-\alpha)z^2 + \cdots$$

fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}'_a(\alpha)$ ile gösterilir.

3.2.10 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}'_a(\alpha)$ ise

(i) $|p'(z)| \leq \frac{1+2a(1-\alpha)|z|+(1-2\alpha)|z|^2}{1-|z|^2}$

(ii) $\quad \mathrm{Re}p'(z) \geq \frac{1+2a\alpha|z|-(1-2\alpha)|z|^2}{|z|^2+2a|z|+1}$

(iii) $\quad |p(z)| \leq -(1-2\alpha)|z| + (1-\alpha)[(1-a).\log(1+|z|)$
$$-(1+a).\log(1-|z|)]$$

(iv) $\quad a \neq 1$ için

$$|p(z)| \geq -(1-2\alpha)|z| + a(1-\alpha).\log(|z|^2+2a|z|+1)$$

$$\geq +2(1-\alpha)\sqrt{1-a^2}\left\{\frac{\arctan(|z|+a)}{\sqrt{1-a^2}} - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right\}$$

$a = 1$ için

$$|p(z)| \geq -(1-2\alpha)|z| + 2(1-\alpha).\log(1+|z|)$$

dır ve sonuç kesindir.

İspat. (i) ve (ii), Sonuç 3.2.3 ten kolayca elde edilir. (iii) ve (iv)

$$p(z) = \int_0^z p'(\xi)\,d\xi = \int_0^{|z|} p'\left(te^{i\theta}\right)e^{i\theta}\,dt$$

fonksiyonundan elde edilir. Sonuç 3.2.3 ten (i) ve (ii) kesindir. (iii) eşitsizliğinin kesinliği için

$$p(z) = -(1-2\alpha)z + (1-\alpha)[(1-a).\log(1+z) - (1+a).\log(1-z)]$$

fonksiyonu ele alınmalıdır. Son olarak, (iv) aşağıdaki şartlar altında kesindir;

$a \neq 1$ için

$$p_1(z) = -(1-2\alpha)z + a(1-\alpha).\log(z^2 + 2az + 1)$$
$$+ 2(1-\alpha)\sqrt{1-a^2}\left\{\frac{\arctan(z+a)}{\sqrt{1-a^2}} - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right\}$$

dir ve $a = 1$ için

$$p_2(z) = -(1-2\alpha)z + 2(1-\alpha).\log(1+z)$$

dir.

3.2.11 Sonuç. $\mathcal{P'}_a(\alpha)$ sınıfındaki her fonksiyon $|z| < 1$ bölgesini aşağıdaki diski kapsayan bölgeye dönüştürür;

$a \neq 1$ için

$$|w| < a(1-\alpha).\log(2+2a) + 2(1-\alpha)\sqrt{1-a^2}\left\{\frac{\arctan(1+a)}{\sqrt{1-a^2}} - \arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right\}$$
$$-(1-2\alpha)$$

ve $a = 1$ için

$$|w| < 2(1-\alpha).\log(2) - (1-2\alpha).$$

Sonuç kesindir.

İspat: Teorem 3.2.10 da, $|z| \to 1$ iken (iv) eşitsizliğinin sağ tarafından istenilen sonuç elde edilir. Teorem 3.2.10 un ispatında bulunan $p_1(z)$ fonksiyonundan bu sonuç kesindir.

3.3 $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ Sınıfı ve Özellikleri

Bu bölümde, Bernardi (1974) tarafından çalışılan $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ sınıfı tanımlanacak ve bu sınıfla ilgili distorsiyon teoremleri verilecektir.

3.3.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + a_n z^n + \cdots \quad (n \geq 1)$$

şeklinde seri açılımına sahip ve

$$\mathrm{Re}p(z) > \alpha \; (0 \leq \alpha < 1)$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ ile gösterilir.

3.3.2 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_{\alpha,n}$ olsun. O zaman $|z| = r < 1$ ve $n = 1,2,3, \ldots$ için,

$$|zp'(z)| \leq \frac{2nr^n \mathrm{Re}[p(z) - \alpha]}{1 - r^{2n}} \tag{3.11}$$

dir. Eşitlik her n ve her α için

$$p(z) = \alpha + \left[\frac{(1-\alpha)(1-z^n)}{1+z^n}\right] = 1 - 2(1-\alpha)z^n + \cdots$$

fonksiyonunda $z = r$ de elde edilir.

İspat. $\alpha = 0$ olduğu varsayılırsa $p(z) \to \frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}$ dönüşümü genel sonucu verir. $p(z) \in \mathcal{P}_{0,n}$ ise $k(z) = \frac{1-p(z)}{1+p(z)} = d_n z^n + \cdots$ fonksiyonu $|z| < 1$ için analitiktir ve $|k(z)| < 1$ dir. Dolayısıyla, Lemma 1.35 (i) den faydalanarak $|z| = r$ olmak üzere $z^n \phi(z) = \frac{1-p(z)}{1+p(z)}$ fonksiyonu için

(a) $|\phi(z)|^2 = \frac{1}{r^{2n}}\left|\frac{1-p(z)}{1+p(z)}\right|^2$

(b) $|\phi'(z)| = \frac{1}{r^{n+1}}\left|\frac{2zp'(z)+n\left(1-p^2(z)\right)}{\left(1+p(z)\right)^2}\right|$

elde edilir. (a) ve (b), Lemma 1.35 (i) de yerine yazılıp $|1+p(z)|^2$ile çarpılırsa

$$\left|2zp'(z)+n\left(1-p^2(z)\right)\right| \leq \frac{r^{2n}|1+p(z)|^2-|1-p(z)|^2}{(1-r^2)r^{n-1}}$$

$$|2zp'(z)| \leq n|1-p^2(z)| + \frac{r^{2n}|1+p(z)|^2-|1-p(z)|^2}{(1-r^2)r^{n-1}}$$

bulunur. Böylece, $\alpha = 0$ durumunda (3.11) i ispatlamak için

$$n|1-p^2(z)| + \frac{r^{2n}|1+p(z)|^2-|1-p(z)|^2}{(1-r^2)r^{n-1}} \leq \frac{4nr^n\mathrm{Re}p(z)}{1-r^{2n}} \tag{3.12}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $|1+p(z)|^2, |1-p(z)|^2$ ve $\mathrm{Re}p(z)$ ifadeleri $|1-p^2(z)|$ türünden yazılsın.

$$z^n\phi(z) = \frac{1-p(z)}{1+p(z)}$$

fonksiyonundan faydalanarak

(c) $|1-p(z)|^2 = |1-p^2(z)||z^n\phi(z)|,$

(d) $|1+p(z)|^2|z^n\phi(z)| = |1-p^2(z)|$

elde edilir. (c) ve (d) den

(e) $4\text{Re}p(z) = |1+p(z)|^2 - |1-p(z)|^2 = |1-p^2(z)|\left[\frac{1-|z^n\phi(z)|^2}{|z^n\phi(z)|}\right]$

elde edilir. (c), (d) ve (e), (3.12) eşitsizliğinde yerine yazılıp $|1-p^2(z)|$ değerleri sadeleştirilirse

$$(1-|\phi(z)|)r^{2n-1}[-n(1-r^2)(1+|\phi(z)|r^{2n}) + r(1-r^{2n})(1+|\phi(z)|)] \leq 0$$

bulunur. Dolayısıyla, $0 \leq r < 1, |\phi| \leq 1$ ve $n = 1,2,3, \dots$ için

$$r(1-r^{2n})(1+|\phi(z)|) - n(1-r^2)(1+|\phi(z)|r^{2n}) \leq 0 \qquad (3.13)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.13) eşitsizliği

$$\frac{r(1-r^{2n})}{n(1-r^2)} \leq \frac{1+|\phi(z)|r^{2n}}{1+|\phi(z)|} = 1 - \frac{(1-r^{2n})|\phi(z)|}{1+|\phi(z)|} \qquad (3.14)$$

eşitsizliğine denktir.

Belli bir r için $|\phi| = 1$ iken (3.14) eşitsizliğinin sağ tarafı minumumdur. Dolayısıyla, (3.13) eşitsizliğinde $|\phi| = 1$ alınırsa

$$n(1-r^2)(1+r^{2n}) - 2r(1-r^{2n}) \geq 0 \ (0 \leq r < 1; n = 1,2,3, \dots)$$

gerekli şartı elde edilir ve bu $(1-r^2)M(n,r) \geq 0$ eşitsizliğine denktir. Burada,

$$M(n,r) = n + nr^{2n} - 2r\{1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2(n-1)}\}$$

dir. Şimdi $0 \leq r < 1$ ve $n \geq 1$ için $M(n,r) > 0$ olduğu gösterilecektir. $M(1,r) = (1-r)^2 > 0$ olduğu biliniyor. $n = 2,4,6, \dots$ için

$$M(n,r) = 2[(1-r)(1-r^{2n-1}) + (1-r^3)(1-r^{2n-3}) + (1-r^5)(1-r^{2n-5}) + \cdots + (1-r^{n-1})(1-r^{n+1})]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n/2}(1-r^{2k-1})\,(1-r^{2n-2k+1}) > 0$$

bulunur. $n = 3,5,7,...$ için

$$M(n,r) = (1-r^n)^2 + 2[(1-r)(1-r^{2n-1}) + (1-r^3)(1-r^{2n-3}) + (1-r^5)(1-r^{2n-5}) + \cdots + (1-r^{n-2})(1-r^{n+2})]$$

$$= (1-r^n)^2 + 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}(1-r^{2k-1})\,(1-r^{2n-2k+1}) > 0$$

elde edilir. Böylece (3.11) eşitsizliği $z = r$ de elde edilir.

3.3.3 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_{\alpha,n}$ olsun. O zaman, $|z| = r, 0 \leq r < 1, n = 1,2,3, ...$ ve $\text{Re}\mu = \beta \geq 0$ özellliğindeki herhangi bir μ kompleks sayısı için

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z) - \alpha + (1-\alpha)\mu}\right| \leq \frac{2nr^n}{(1-r^n)[1+\beta+(1-\beta)r^n]} \tag{3.15}$$

dir.

İspat. $\alpha = 0$ olduğu varsayılırsa $p(z) \to \frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}$ dönüşümü genel sonucu verir. $\alpha = 0$ için (3.11) eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)+\mu}\right| \leq \frac{|zp'(z)|}{\text{Re}p(z)+\beta} \leq \frac{2nr^n\text{Re}p(z)}{1-r^{2n}}\frac{1}{\text{Re}p(z)+\beta} \leq \frac{2nr^n}{1-r^{2n}}\frac{1}{1+\beta/|p(z)|}$$

elde edilir. $|p(z)| = \left|\frac{1-z^n\phi(z)}{1+z^n\phi(z)}\right| \leq \frac{1+r^n}{1-r^n}$ eşitsizliği yerine yazılıp, Teorem 3.3.3 de $\mu = \frac{\alpha-c}{1-\alpha}$ seçilirse, $p(z) \in \mathcal{P}(\alpha), |z| = r, 0 \leq r < 1$ ve $\gamma = \mathrm{Re}c \leq \alpha$ için

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)-c}\right| \leq \frac{2n(1-\alpha)r^n}{(1-r^{2n})[1-\gamma+(1-2\alpha+\gamma)r^n]}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.3.4 Sonuç. Teorem 3.3.3 teki hipotezden

$$\left|\log\frac{p(z)-\alpha+(1-\alpha)\mu}{(1-\alpha)(1+\mu)}\right| \leq \log\frac{1+\beta+(1-\beta)r^n}{(1+\beta)(1-r^n)}$$

ve

$$\left|\frac{p(z)-\alpha+(1-\alpha)\mu}{(1-\alpha)(1+\mu)}\right| \leq \frac{1+\beta+(1-\beta)r^n}{(1+\beta)(1-r^n)}$$

elde edilir. $\mu = (\alpha-c)/(1-\alpha)$ şeklinde seçilirse $\mathrm{Re}c \leq \alpha$ için

$$|p(z)-c| \leq \frac{1-\mathrm{Re}c+(1-2\alpha+\mathrm{Re}c)r^n}{(1-\mathrm{Re}c)(1-r^n)}$$

bulunur.

3.4 $\mathcal{P}_n(\alpha)$ ve $Q_n(\alpha)$ Sınıfları ve Özellikleri

Bu bölümde, Owa ve ark. (1993) tarafından çalışılan $\mathcal{P}_n(\alpha)$ ve $Q_n(\alpha)$ sınıfları tanımlanacak ve komşuluk bilgileri verilecektir. Sabordinasyon ve OWA Çarpımı gibi özellikler kullanılarak bazı teoremler ispatlanacaktır.

3.4.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\operatorname{Re} p(z) > \alpha$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}_n(\alpha)$ ile gösterilir.

3.4.2 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik q fonksiyonları $q(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$ şeklinde olmak üzere, herhangi $p(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$ fonksiyonunun $\delta_n \geq 0$ komşuluğu

$$N_{\delta_n}\big(p(z)\big) = \left\{ q(z) \colon \sum_{k=n}^{\infty} |a_k - c_k| \leq \delta_n \right\}$$

olarak tanımlanır.

3.4.3 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\})$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\operatorname{Re}\big(zp(z)\big)' > \alpha$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $Q_n(\alpha)$ ile gösterilir.

3.4.5 Teorem. $Q_n(\alpha)$ sınıfı $\mathcal{P}_n(\alpha)$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

İspat. Tanım 3.4.1, Tanım 3.4.3 ve Tanım 2.4 ten, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$p(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha) \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1-(2\alpha-1)z^n}{1-z^n}$$

ve

$$p(z) \in Q_n(\alpha) \Leftrightarrow \big(zp(z)\big)' \prec \frac{1-(2\alpha-1)z^n}{1-z^n} \tag{3.16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\big(zp(z)\big)'}{(z)'} \prec \frac{1-(2\alpha-1)z^n}{1-z^n}$$

elde edilir. Lemma 2.10, (3.16) ya uygulanırsa $p(z) \in Q_n(\alpha)$ iken

$$p(z) \prec \frac{1-(2\alpha-1)z^n}{1-z^n} (z \in \mathbb{U})$$

olduğundan $Q_n(\alpha) \subset \mathcal{P}_n(\alpha)$ olduğu görülür. $\frac{1-(2\alpha-1)z^n}{1-z^n}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat olduğundan $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$q(z) \in Q_n(\alpha) \Leftrightarrow q(z) \neq \frac{1-(2\alpha-1)e^{in\theta}}{1-e^{in\theta}}$$

veya

$$q(z) \in Q_n(\alpha) \Leftrightarrow \left(1-e^{in\theta}\right)q(z) - \left\{1-(2\alpha-1)e^{in\theta}\right\} \neq 0$$

elde edilir. Ayrıca, Tanım 1.38 kullanılarak

$$\begin{aligned}&\left(1-e^{in\theta}\right)q(z) - \left\{1-(2\alpha-1)e^{in\theta}\right\} \\ &\qquad = \left(1-e^{in\theta}\right)\left(\frac{z}{1-z} * q(z)\right) - \left\{1-(2\alpha-1)e^{in\theta}\right\} * q(z)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - z} - \{1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}\}\right) * q(z)$$

bulunur. Dolayısıyla, $h_\theta(z)$ fonksiyonu

$$h_\theta(z) = \frac{1}{2(\alpha - 1)e^{in\theta}}\left(\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - z} - \{1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}\}\right)$$

şeklinde tanımlanırsa $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ için $h_\theta(z) = 1$ dir. Buradan, $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$q(z) \in \mathcal{P}(\alpha) \Leftrightarrow 2(\alpha - 1)e^{in\theta}\big(h_\theta(z) * q(z)\big) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \big(h_\theta(z) * q(z)\big) \neq 0$$

elde edilir.

3.4.6 Lemma. $p(z) \in Q_n(\alpha)$ ise her $0 < \theta < 2\pi/n$ için $z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)$ fonksiyonu yalınkattır.

İspat. Belli $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ için

$$\big[z\big(p(z) * \ h_\theta(z)\big)\big]' = \left[z\left(\frac{1}{2(\alpha - 1)e^{in\theta}}\left(\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - z} - [1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}]\right)\right) * p(z)\right]'$$

$$= \left(\frac{z}{2(\alpha - 1)e^{in\theta}}\big((1 - e^{in\theta})p(z) - [1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}]\big)\right)'$$

$$= \frac{1 - e^{in\theta}}{2(\alpha - 1)e^{in\theta}}\left(zp(z) - \frac{1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}}{1 - e^{in\theta}}z\right)'$$

$$= \frac{1 - e^{in\theta}}{2(\alpha - 1)e^{in\theta}} \left(\left(zp(z)\right)' - \frac{1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}}{1 - e^{in\theta}} \right)$$

$$= \frac{e^{-i\Theta}}{2(\alpha - 1)A} \left(\left(zp(z)\right)' - \frac{1 - (2\alpha - 1)e^{in\theta}}{1 - e^{in\theta}} \right)$$

elde edilir. Burada

$$A = \left| \frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta} - 1} \right| = 1/\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

ve

$$\Theta = \arg\left(\frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta} - 1} \right) = n\theta - \tan^{-1}\left(\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta - 1} \right)$$

dir. Sonuç olarak $p(z) \in Q_n(\alpha)$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\left\{ Ae^{i\Theta} \left(z\left(p(z) * \ h_\theta(z)\right) \right)' \right\} > 0 \ (z \in \mathbb{U}) \tag{3.17}$$

elde edilir. Teorem 1.39 un uygulanmasıyla her $0 < \theta < 2\pi/n$ için $z\left(p(z) * h_\theta(z)\right)$ fonksiyonu yalınkat olduğu görülür.

3.4.7 Lemma. $p(z) \in Q_n(\alpha)$ ise $|z| = r < 1$ ve $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ için

$$\left| \left(z\left(p(z) * \ \mathrm{h}_\theta(z)\right) \right)' \right| \geq \frac{1 - r^n}{1 + r^n}$$

dır.

İspat. (3.17) den

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\left(z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right)'\right\} > 0 \quad \left(0 < \theta < \frac{2\pi}{n};\ z \in \mathbb{U}\right)$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\left|e^{i\theta}\left(z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right)'\right| = \left|\left(z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right)'\right| \geq \frac{1-r^n}{1+r^n}$$

dir.

3.4.8 Lemma. $p(z) \in Q_n(\alpha)$ ise $\delta_n = \int_0^1 \frac{2}{(1+t^n)}dt - 1$ için

$$\left|\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right| \geq \delta_n$$

dir.

İspat. Lemma 3.4.6 da, $p(z) \in Q_n(\alpha)$, her $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)$ fonksiyonunun yalınkat olduğu gösterildi. $z_0 \in \mathbb{U}$ noktası belli r $(0 < r < 1)$ için

$$\min_{|z|=r}\left|z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right| = \left|z_0\left(p(z_0) * h_{\theta}(z_0)\right)\right|$$

olacak şekilde seçilsin. Dolayısıyla, 0 ve $z_0\left(p(z_0) * h_{\theta}(z_0)\right)$ noktaları arasındaki doğru parçasının L ters görüntüsü $|z| \leq r$ içerisinde bir yaydır. Böylece, $|z| \leq r$ için,

$$\begin{aligned}\left|z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right| &\geq \left|z_0\left(p(z_0) * h_{\theta}(z_0)\right)\right| \\ &= \int_L \left|\left(z\left(p(z) * h_{\theta}(z)\right)\right)'\right| |dz|\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.4.7 den

$$|p(z) * h_\theta(z)| \geq \frac{1}{r}\int_0^r \frac{1-t^n}{1+t^n}dt$$

$$= \frac{1}{r}\int_0^r \frac{2}{(1+t^n)}dt - 1$$

bulunur. $g(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{2}{(1+t^n)}dt - 1$ fonksiyonu $r(0 < r < 1)$ için azalan olduğundan

$$\left|\left(p(z) * h_\theta(z)\right)\right| \geq \delta_n = \int_0^1 \frac{2}{(1+t^n)}dt - 1$$

dır ve ispat tamamlanır.

3.4.9 Teorem. $p(z) \in Q_n(\alpha)$ ise $\delta_n = \int_0^1 \frac{2}{(1+t^n)}dt - 1$ için

$$N_{(1-\alpha)\delta_n}\left(p(z)\right) \subset \mathcal{P}_n(\alpha)$$

dir.

İspat. $q(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$ olsun. Tanım 3.4.2 den, $p(z) \in Q_n(\alpha)$ olmak üzere $q(z) \in N_{(1-\alpha)\delta_n}\left(p(z)\right)$ ise $q(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$ olduğu ispatlanmalıdır.

Lemma 3.4.8 ve $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - c_k| \leq \delta_n$ eşitsizliğini kullanarak

$$|h_\theta(z) * q(z)| \geq |h_\theta(z) * p(z)| - \left|h_\theta(z) * \left(p(z) - q(z)\right)\right|$$

$$\geq \delta_n - \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1-e^{in\theta}}{2(\alpha-1)e^{in\theta}}(a_k - c_k)z^k\right|$$

$$\geq \delta_n - \frac{1}{\alpha - 1}\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - c_k|$$

$$\geq \delta_n - \delta_n = 0$$

elde edilir. $h_\theta(z) * q(z) \neq 0$ $\left(0 < \theta < \frac{2\pi}{n};\ z \in \mathbb{U}\right)$ olduğundan, $q(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{P}_n(\alpha)$ sınıfına ait olduğu yani $N_{(1-\alpha)\delta_n}(p(z)) \subset \mathcal{P}_n(\alpha)$ olduğu görülür. Ayrıca,

$$p(z) = 2\alpha - 1 + \frac{2(\alpha - 1)}{z}\int_0^z \frac{1}{(1 - t^n)}dt$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ele alınırsa

$$\big(zp(z)\big)' = \frac{1 - (2\alpha - 1)z^n}{1 - z^n}$$

elde edilir. Eğer $q(z) = p(z) + (1 - \alpha)\delta_n z^n$ şeklinde tanımlanırsa $q(z) \in N_{(1-\alpha)\delta_n}\big(p(z)\big)$ dir. $z \to e^{i\pi/n}$ iken $q(z) \to q\big(e^{i\pi/n}\big) = \alpha$ olduğu görülür. Buradan, $\delta_n > \int_0^1 \frac{2}{(1+t^n)}dt - 1$ iken $q\big(e^{i\pi/n}\big) < \alpha$ dır. Dolayısıyla, $z \to e^{i\pi/n}$ iken $\mathrm{Re}q(z) < \alpha$ olur ki bu $q(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha)$ olmasıyla çelişir.

3.5 $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ ve $\mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ Sınıfları ve Özellikleri

Bu bölümde, Owa ve ark. (2006) tarafından çalışılan $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ ve $\mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ sınıfları tanıtılacak bazı özellikleri verilecektir.

3.5.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $m \leq \alpha < m+n$, $m \in \mathbb{N}_0 = 0,1,2,3,\ldots$, $n \in \mathbb{N} = 1,2,3,\ldots$ için

$$\mathrm{Re}p(z) > \frac{\alpha - \mathrm{m}}{n}$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}\right)$ ile gösterilir.

3.5.2 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik $q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ fonksiyonları için herhangi $p(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}\right)$ fonksiyonunun $\delta_{\mathrm{n}} \geq 0$ komşuluğu

$$N_\delta(p(z)) = \left\{ q(z) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - \mathrm{c_k}| \leq \delta_{\mathrm{n}} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.5.3 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}\right)$ ise $|z| = r < 1, m \leq \alpha < m+n, m \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|zp'(z)| \leq \frac{2r}{1-r^2} \mathrm{Re}\left\{ p(z) - \frac{\alpha - m}{n} \right\} \tag{3.18}$$

dir. Her $m \leq \alpha < m+n$ ve

$$p(z) = \frac{\alpha - m}{n} + \left(1 - \frac{\alpha - m}{n}\right) \frac{1-z}{1+z} = 1 - \frac{2}{n}(n - \alpha + m)z + \cdots$$

fonksiyonu için eşitlik $z = r$ de elde edilir.

İspat. $p(z) \in \mathcal{P}(0)$ ise $k(z) = \frac{1+p(z)}{1-p(z)} = \eta_1 z + \eta_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $|k(z)| < 1$ dir. Dolayısıyla, $k(z) = z\phi(z)$ olacak şekilde Lemma 1.35 (i) şartlarını sağlayan analitik bir $\phi(z)$ fonksiyonu mevcuttur. $z\phi(z) = \frac{1-p(z)}{1+p(z)}$ eşitliğinden $|z| = r$ için,

(i) $\quad |\phi(z)|^2 = \frac{1}{r^2}\left|\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\right|^2,$

(ii) $\quad |\phi'(z)| = \frac{1}{r^2}\left|\frac{2zp\prime(z)+1-p^2(z)}{(1+p(z))^2}\right|$

elde edilir. (i) ve (ii) denklemleri Lemma 1.35 (i) de yerine yazılıp $|1 + p(z)|^2$ ile çarpılırsa

$$|2zp'(z) + 1 - p^2(z)| \leq \frac{r^2|1 + p(z)|^2 - |1 - p(z)|^2}{1 - r^2}$$

bulunur ve buradan

$$|2zp'(z)| \leq |1 - p^2(z)| + \frac{r^2|1 + p(z)|^2 - |1 - p(z)|^2}{1 - r^2}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, $\alpha = m$ durumunda (3.18) eşitsizliğini ispatlamak için

$$|1 - p^2(z)| + \frac{r^2|1 + p(z)|^2 - |1 - p(z)|^2}{1 - r^2} \leq \frac{4r\mathrm{Re}p(z)}{1 - r^2} \tag{3.19}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $|1 + p(z)|^2, |1 - p(z)|^2$ ve $\mathrm{Re}p(z)$ ifadeleri $|1 - p^2(z)|$ türünden yazılsın.

$$z\phi(z) = \frac{1 - p(z)}{1 + p(z)}$$

fonksiyonundan faydalanarak

(iii) $\quad |1-p(z)|^2 = |1-p^2(z)||z\phi(z)|$

ve

(iv) $\quad |1+p(z)|^2|z\phi(z)| = |1-\mathrm{Re}^2(z)|$

elde edilir. (iii) ve (iv) den

(v) $\quad 4\mathrm{Re}p(z) = |1+p(z)|^2 - |1-p(z)|^2 = |1-p^2(z)|\left[\frac{1-|z\phi(z)|^2}{|z\phi(z)|}\right]$

bulunur. (iii), (iv), ve (v) ifadeleri (3.18) de yerine yazılıp $|1-p^2|$ değerleri sadeleştirilirse

$$|1-p^2(z)| + \frac{r^2\frac{|1-p^2(z)|}{|z\phi(z)|} - |1-p^2(z)||z\phi(z)|}{1-r^2}$$
$$= \frac{4\mathrm{Re}p(z) + (1-r^2)|1-p^2(z)|\left(1-\frac{1}{|z\phi(z)|}\right)}{1-r^2} \leq \frac{4\mathrm{Re}p(z)}{1-r^2}$$

elde edilir ve $\alpha = m$ için (3.16) eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $\alpha \neq m$ durumu için

$$w(z) = \frac{p(z) - \left(\frac{\alpha-m}{n}\right)}{1-\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)}$$

fonksiyonu ele alınırsa ispat tamamlanır.

3.5.4 Lemma. $w(z) = \frac{1-\frac{1}{n}\{2\alpha-(2m+n)\}z}{1-z}$ şeklinde tanımlı $w(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat, $w(0) = 1$ ve $m < \alpha < m+n, m \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{Re}w(z) > \frac{\alpha-m}{n}$ dir.

3.5.5 Lemma. $p(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ olsun. O zaman $p(z)$ fonksiyonu $|z| \leq r < 1$ diskini $|p(z) - \eta(A)| \leq \xi(A)$ diskine dönüştürür. Burada

$$\eta(A) = \frac{1 + Ar^2}{1 - r^2}, \qquad \xi(A) = \frac{r(1 + A)}{1 - r^2}, \qquad A = \frac{2m + n - 2\alpha}{n}$$

dır.

3.5.6 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$, $k \geq 0$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\{p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z) + k}\right\} \\
&\qquad > \left(\frac{\alpha - m}{n}\right) + \frac{(k+1) + 2\left(2 - \frac{\alpha - m}{n}\right)r + \left((1-k) - 2\left(\frac{\alpha - m}{n}\right)\right)r^2}{(k+1) - 2\left(1 - \frac{\alpha - m}{n}\right)r + \left((1-k) - 2\left(\frac{\alpha - m}{n}\right)\right)r^2} \\
&\qquad \times \mathrm{Re}\left[p(z) - \left(\frac{\alpha - m}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

dır.

İspat. Lemma 3.5.5 ten

$$|p(z) + k| \geq |\eta(A) + k| - \xi(A) = \frac{1 + Ar^2}{1 - r^2} + k - \frac{r(1 + A)}{1 - r^2}$$

olduğu görülür. Böylece Teorem 3.5.3 ün uygulanmasıyla

$$\operatorname{Re}\left\{p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)+k}\right\} \geq \operatorname{Re}p(z)-\left|\frac{zp'(z)}{p(z)+k}\right|$$

$$\geq \operatorname{Re}p(z)-\frac{\frac{2r}{1-r^2}}{\frac{1+Ar^2+k(1-r^2)-r(1+A)}{1-r^2}}\operatorname{Re}\left[p(z)-\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)\right]$$

$$>\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)-\left\{1-\frac{2r}{1+Ar^2+k(1-r^2)-r(1+A)}\right\}$$

$$\times \operatorname{Re}\left[p(z)-\frac{\alpha-m}{n}\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.5.7 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $m \leq \alpha < m+n$, $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\big(zp(z)\big)' > \frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-\mathrm{m}}{n}\right)$ ile gösterilir.

3.5.8 Teorem. $\mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ sınıfı $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

İspat. Tanım 3.5.1, Tanım 3.5.7 ve Tanım 2.4 ten, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$p(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right) \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1-\frac{1}{n}\big(2\alpha-(2m+n)\big)z}{1-z} \tag{3.20}$$

ve

$$p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha - m}{n}\right) \Leftrightarrow \big(zp(z)\big)' \prec \frac{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m+n)\big)z}{1 - z} \qquad (3.21)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\big(zp(z)\big)'}{(z)'} \prec \frac{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m+n)\big)z}{1 - z}$$

elde edilir. Lemma 2.10, (3.21) e uygulanırsa $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha - m}{n}\right)$ iken

$$p(z) \prec \frac{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m+n)\big)z}{1 - z}$$

olduğundan $\mathcal{P}'^{\left(\frac{\alpha - m}{n}\right)} \subset \mathcal{P}\left(\frac{\alpha - m}{n}\right)$ olduğu görülür. $\frac{1 - \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right)z}{1 - z}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat olduğundan $0 < \theta < 2\pi$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$q(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha - m}{n}\right) \Leftrightarrow q(z) \neq \frac{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m+n)\big)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

veya

$$q(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha - m}{n}\right) \Leftrightarrow \left(1 - e^{i\theta}\right)q(z) - \left\{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m+n)\big)e^{i\theta}\right\} \neq 0$$

elde edilir. Ayrıca Tanım 1.38 den,

$$\begin{aligned}
&\left(1 - e^{i\theta}\right)q(z) - \left\{1 - \frac{1}{n}[2\alpha - (2m+n)]e^{i\theta}\right\} \\
&\qquad = \left(1 - e^{i\theta}\right)\left(\frac{1}{1 - z} * q(z)\right) - \left\{1 - \frac{1}{n}[2\alpha - (2m+n)]e^{i\theta}\right\} * q(z) \\
&\qquad = \left\{\frac{1 - e^{i\theta}}{1 - z} - \left[1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m+n)\big)e^{i\theta}\right]\right\} * q(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $h_\theta(z)$ fonksiyonu

$$h_\theta(z) = \frac{n}{2(\alpha - m - n)e^{i\theta}}\left\{\frac{1 - e^{i\theta}}{1 - z} - \left[1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m + n)\big)e^{i\theta}\right]\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa $0 < \theta < 2\pi$ için $h_\theta(0) = 1$ olur. Buradan, $0 < \theta < 2\pi$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$q(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha - m}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{n}(\alpha - m - n)e^{i\theta}\{h_\theta(z) * q(z)\} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow h_\theta(z) * q(z) \neq 0$$

elde edilir.

3.5.9 Lemma. $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ ise her $\theta\ (0 < \theta < 2\pi)$ için $z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)$ fonksiyonu yalınkattır.

İspat. Belli $\theta\ (0 < \theta < 2\pi)$ için

$$\big[z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)\big]'$$

$$= \left[\frac{zn}{2(\alpha - m - n)e^{i\theta}}\left(\frac{1 - e^{i\theta}}{1 - z} - \left\{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m + n)\big)e^{i\theta}\right\}\right) p(z)\right]'$$

$$= \left[\frac{zn}{2(\alpha - m - n)e^{i\theta}}\left(\big(1 - e^{i\theta}\big)p(z) - \left\{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m + n)\big)e^{i\theta}\right\}\right)\right]'$$

$$= \left[\frac{zn}{2(\alpha - m - n)e^{i\theta}}\big(1 - e^{i\theta}\big)\left(p(z) - \frac{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m + n)\big)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)\right]'$$

$$= \frac{\big(1 - e^{i\theta}\big)}{e^{i\theta}}\left[\frac{n}{2(\alpha - m - n)e^{i\theta}}\left(zp(z) - \frac{1 - \frac{1}{n}\big(2\alpha - (2m + n)\big)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} z\right)\right]'$$

$$= \frac{n}{2(\alpha - m - n)} \left(\left(zp(z)\right)' - \frac{1 - \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \frac{1 - e^{i\theta}}{e^{i\theta}}$$

bulunur. Tanım 3.5.7 den, $|z| < 1$ için $\left(zp(z)\right)'$ fonksiyonunun görüntüsü $\mathrm{Re}(w) > \frac{\alpha - m}{n}$ üzerindedir. Ayrıca,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 - \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \frac{1 + \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right)}{2}$$

olur. Böylece,

$$\left[z\left(p(z) * h_\theta(z)\right)\right]'$$
$$= \frac{n}{2(\alpha - m - n)} \frac{e^{-i\phi}}{K} \left(\left(zp(z)\right)' - \frac{1 - \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \quad (3.22)$$

yazılabilir ve burada

$$K = \left| \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2(1 - cos\,\theta)}}$$

ve

$$\phi = \arg\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} \right) = \theta - \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1} \right)$$

dir. Sonuç olarak, $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha - m}{n}\right)$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\left(Ke^{i\phi}\left[z\left(p(z) * h_\theta(z)\right)\right]' \right) > 0 \ (z \in \mathbb{U})$$

elde edilir. Teorem 1.39 un uygulanmasıyla her $0 < \theta < 2\pi$ için $z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)$ fonksiyonunun yalınkat olduğu görülür.

3.5.10 Lemma. $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ ise $|z| = r < 1$ ve $0 < \theta < 2\pi$ için

$$\left|\left\{z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)\right\}'\right| \geq \frac{1-r}{1+r}$$

dir.

İspat. (3.22) fonksiyonu kullanılarak $w = \frac{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)re^{it}}{1-re^{it}}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ olmak üzere

$$F(w) = e^{-i\theta}\big(1-e^{i\theta}\big)\left(\frac{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} - w\right)$$

fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca, $F(w)$ fonksiyonu şu şekilde de yazılabilir;

$$F(w) = e^{-i\theta}\left\{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)e^{i\theta} - \big(1-e^{i\theta}\big)w\right\}$$

$$= e^{-i\theta}\left\{(1-w) + \left[\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right]e^{i\theta}\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right]e^{-i\theta}\left\{\frac{1-w}{\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w} + e^{i\theta}\right\}.$$

Buradan,

$$|F(w)| = \left|\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right| \left|\frac{1-w}{\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w}+e^{i\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right| \left|e^{i\theta}-re^{it}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right| \left|1-re^{i(t-\theta)}\right|$$

$$\geq \left|\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right|(1-r)$$

bulunur. Ayrıca

$$\left|\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+w\right| = \left|\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)+\frac{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)re^{it}}{1-re^{it}}\right|$$

$$= \left|\frac{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)}{1-re^{it}}\right| \geq \frac{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)}{1+r}$$

olduğundan

$$|F(w)| \geq \frac{1-r}{1+r}\left[1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)\right]$$

olduğu görülür. $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ olduğundan ve (3.22) sağlandığından $w = [zp(z)]'$ alınırsa istenilen eşitsizlik yani

$$|[zp(z)]'| \geq \frac{n}{2(m+n-\alpha)}\,\frac{1+\frac{1}{n}(2m+n-2\alpha)}{1+r}(1-r) = \frac{1-r}{1+r}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.5.11 Lemma. $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ ise $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{U}$ ve

$$\delta = \int_0^1 \frac{2}{1+t}\,dt - 1 = 2\ln 2 - 1$$

için

$$|p(z) * h_\theta(z)| \geq \delta$$

dir.

İspat. Lemma 3.5.9 da, $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$, her $0 < \theta < 2\pi$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)$ fonksiyonunun yalınkat olduğu gösterildi. $z_0 \in \mathbb{U}$ noktası, belli r $(0 < r < 1)$ için

$$\min_{|z|=r}\left|z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)\right| = \left|z_0\big(p(z_0) * h_\theta(z_0)\big)\right|$$

olacak şekilde seçilsin. Dolayısıyla, 0 ve $z_0\big(p(z_0) * h_\theta(z_0)\big)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının L ters görüntüsü $|z| \leq r$ bölgesi içinde bir yaydır. Dolayısıyla, $|z| \leq r$ için

$$\left|z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)\right| \geq \left|z_0\big(p(z_0) * h_\theta(z_0)\big)\right|$$

$$= \int_L \left|\Big(z\big(p(z) * h_\theta(z)\big)\Big)'\right| |dz|$$

elde edilir. Lemma 3.5.10 den

$$|p(z) * h_\theta(z)| \geq \frac{1}{r}\int_0^r \frac{1-t}{1+r}\,dt = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{2}{1+r}\,dt - 1$$

bulunur. $g(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{2}{1+r}dt - 1$ fonksiyonu r $(0 < r < 1)$ için azalan olduğundan

$$|p(z) * h_\theta(z)| \geq \delta = \int_0^1 \frac{2}{1+t}dt - 1 = 2\ln 2 - 1$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.5.12 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ ise $\delta = \int_0^1 \frac{2}{1+t}dt - 1 = 2\ln 2 - 1$ ve $\beta = \frac{m+n-\alpha}{n}$ olmak üzere

$$N_{\beta\delta}\big(p(z)\big) \subset \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$$

dir. Sonuç kesindir.

İspat. $q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ olsun. Tanım 3.5.2 den, $p(z) \in \mathcal{P}'\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ olmak üzere $q(z) \in N_{\beta\delta}\big(p(z)\big)$ ise $q(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ olduğu ispatlanmalıdır.

Lemma 3.5.11 ve $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - \mathrm{c_k}| \leq \delta$ eşitsizliği kullanılarak

$$|h_\theta(z) * q(z)| \geq |h_\theta(z) * p(z)| - \left|h_\theta(z) * \big(p(z) - q(z)\big)\right|$$

$$\geq \delta - \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n\big(1-e^{i\theta}\big)}{2(\alpha-m-n)e^{i\theta}}(a_k - \mathrm{c_k})z^k\right|$$

$$> \delta - \frac{n}{m+n-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k - c_k|$$

$$> \delta - \frac{n}{m+n-\alpha}\left(\frac{m+n-\alpha}{n}\right)\delta$$

$$\geq \delta - \delta = 0$$

elde edilir. $0 < \theta < 2\pi$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $h_\theta(z) * q(z) \neq 0$ olduğundan, $q(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ sınıfına ait olduğu yani $N_{\beta\delta}(p(z)) \subset \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ olduğu görülür. Ayrıca,

$$p(z) = \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right) + \frac{\frac{2}{n}(m+n-\alpha)}{z}\left(\int_0^z \frac{1}{1-t}dt\right)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ele alınırsa

$$\left(zp(z)\right)' = \frac{1 - \frac{1}{n}\left(2\alpha - (2m+n)\right)z}{1-z}$$

elde edilir. Eğer $q(z) = p(z) + \left(\frac{m+n-\alpha}{n}\right)\delta z$ şeklinde tanımlanırsa $q(z) \in N_{\beta\delta}(p(z))$ olur. $z = e^{i\pi}$ iken $q(z) = q\left(e^{i\pi}\right) = \frac{\alpha-m}{n}$ olduğu görülür. Buradan, $\delta > \int_0^1 \frac{2}{1+t}dt - 1$ ise $q\left(e^{i\pi}\right) < \frac{\alpha-m}{n}$ dir. Dolayısıyla, $z \to e^{i\pi}$ iken $\mathrm{Re}\,q(z) > \frac{\alpha-m}{n}$ olur ki bu $q(z) \in \mathcal{P}\left(\frac{\alpha-m}{n}\right)$ olmasıyla çelişir.

3.6 $\mathcal{P}_\alpha$ ve $\mathcal{P}_\alpha(n)$ Sınıfları ve Özellikleri

Bu bölümde, Shaffer (1973) tarafından çalışılan $\mathcal{P}_\alpha$ ve $\mathcal{P}_\alpha(n)$ sınıfları tanıtılacak ve ilgili distorsiyon teoremleri verilecektir.

3.6.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \; (z \in \mathbb{U})$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\left|p(z) - \frac{1}{2}\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\alpha \tag{3.23}$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}_\alpha$ ile gösterilir.

$c = 1 - 2\alpha$ ve $-1 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere $p^0(0) = 1$ özelliğindeki $p^0(z) = \frac{1-z}{1+cz}$ yalınkat fonksiyonu birim diskin içini $\left|w - \frac{1}{2}\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\alpha$ diskinin içine dönüştürür. (3.23) şartını sağlayan $p(z)$ fonksiyonu $p^0(z)$ fonksiyonuna sabordinedir ve böylece $|g(z)| \leq |z|$ olmak üzere $p(z) = \frac{1-g(z)}{1+cg(z)}$ şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

3.6.2 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_\alpha$ ise $|z| < 1$ için $c = 1 - 2\alpha$ olmak üzere

$$\frac{1-|z|}{1+c|z|} \leq \mathrm{Re}p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-c|z|}$$

dir.

3.6.3 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_\alpha$ ise $|z| \leq \sqrt{2} - 1$ için

$$|p'(z)| \leq \frac{|1+cp(z)|^2}{1+c}$$

dir ve $|z| > \sqrt{2} - 1$ için

$$|p'(z)| \leq \frac{|1+cp(z)|^2(1+|z|^2)^2}{4(1+c)|z|(1-|z|^2)}$$

dir.

3.6.4 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_\alpha$ ise $|z| < 1$ için

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| \leq \frac{1+c}{(1-|z|)(1+c|z|)} \tag{3.24}$$

dır.

İspat. $h(z) = 1/p(z)$ şeklinde seçilirse $|z| < 1$ için $h(z)$ analitik ve $h(0) = 1$ dir. (3.23) eşitsizliğinden Re$h(z) > \alpha$ ve $\frac{h'(z)}{h(z)} = -\frac{p'(z)}{p(z)}$ olduğu görülür.

3.6.5 Teorem. $0 \leq \alpha \leq 1/2$ için $p(z) \in \mathcal{P}_\alpha$ ve

$$cx^3 + x^2(1-2c) + x(2-c) - 1 = 0 \tag{3.25}$$

denkleminin en büyük pozitif kökü ρ olmak üzere $|z| \leq \rho$ için

$$|p'(z)| \leq \frac{1+c}{(1-c|z|)^2} \tag{3.26a}$$

dir ve $|z| > \rho$ için

$$|p'(z)| \leq \frac{(1+c)(1+|z|^2)^2}{4|z|(1-c)(1-|z|^2)(1+c|z|^2)} \tag{3.26b}$$

dir.

İspat. $p(z)$ fonksiyonunun seri açılımından

$$p'(z) = \frac{-g'(z)(1+c)}{\left(1+cg(z)\right)^2}$$

elde edilir. $\alpha \leq 1/2$ olduğundan $c \geq 0$ olur. $|\phi(z)| \leq 1$ olmak üzere

$$g'(z) = \frac{(1-|g(z)|^2)\phi(z)}{1-|z|^2}$$

bulunur (Carathéodory 1954). $|\phi(0)| = a$ yerine yazılırsa

$$|p'(z)| \leq \frac{(1+c)(1-a|z|)(a+|z|)}{(1-ac|z|)^2(1-|z|^2)} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.27) eşitsizliğinin a ya göre türevi alınırsa sağ taraf maksimum değerini

$$a = \frac{1+2|z|^2c-|z|^2}{|z|\big(2-c(1-|z|^2)\big)} \tag{3.28}$$

için alır. $a \leq 1$ olması

$$c|z|^3 + |z|^2(1-2c) + |z|(2-c) - 1 \geq 0$$

eşitsizliğini verir. $a = 1$ yerine yazılırsa (3.26a) eşitsizliğini ve (3.28) denkleminin sağ tarafı (3.26b) eşitsizliğini verir.

3.6.6 Sonuç. $\mathrm{Re}p(z) > 0$ ise $|z| < 1$ için

$$|p'(z)| \leq 2/(1-|z|)^2$$

dır.

3.6.7 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots \, (n \geq 1)$$

şeklinde seri açılımına sahip ve $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\left|p(z) - \frac{1}{2}\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\alpha$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}_\alpha(n)$ ile gösterilir.

$g(z) = \frac{1-p(z)}{1+cp(z)} = b_n z^n + \cdots$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Teorem 1.16 dan

$$|g(z)| \leq |z|^n \tag{3.29}$$

elde edilir. Tanım 2.4 ten sıradaki teoremin sınırları elde edilir.

3.6.8 Teorem. $\frac{1-|z|^n}{1+c|z|^n} \leq \mathrm{Re}p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|^n}{1-c|z|^n}$ dir.

3.6.9 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_\alpha(n)$ ise $|z| \leq \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}$ için

$$|p'(z)| \leq \frac{|1+cp(z)|^2 n|z|^{n-1}}{1+c}$$

dir veya $|z| > \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}$ için

$$|p'(z)| \leq \frac{|z|^{n-2}[4|z|^2 + n^2(1-|z|^2)^2]|1+cp(z)|^2}{4(1-|z|^2)1+c}$$

dir.

İspat. (3.29) eşitsizliğini sağlayan $g(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki sınırlar elde edilir.

$|z| \leq \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}$ için

$$|g'(z)| \leq n|z|^{n-1} \tag{3.30a}$$

ve $|z| > \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}$ için

$$|g'(z)| \leq \frac{|z|^{n-2}[4|z|^2 + n^2(1-|z|^2)^2]}{4(1-|z|^2)} \tag{3.30b}$$

olur. (3.30a) ve (3.30b) eşitsizlikleri

$$p'(z) = \frac{-g'(z)\big(1 + cp(z)\big)^2}{1 + c}$$

denkleminde yerine yazılırsa teorem ispatlanır. $n = 1$ durumu Teorem 3.6.3 e karşılık gelir.

3.6.10 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}_\alpha(n)$ ise $|z| < 1$ için

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| \leq \frac{(1+c)n|z|^{n-1}}{(1+c|z|^n)(1-|z|^n)} \tag{3.31}$$

dir.

İspat. $|g(z)| \leq |z|^n$ olmak üzere $\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{-g'(z)(1+c)}{[1+cg(z)][1-g(z)]}$ dir. Teorem 3.6.5 te verilen ifadeler ve yöntemler tekrar kullanılarak

$$\frac{(1-|z|^2)|g'(z)|}{|z|^{n-1}} \leq -a^2|z| + an(1-|z|^2) + |z|$$

eşitsizliği elde edilir. $\phi(0) = a \leq 1$ iken $g(z) = z^n\phi(0)$ yazılabilir.

$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|$ ifadesinin üst sınırını bulabilmek için $D = |[1 + cg(z)][1 - g(z)]|$ denkleminin en küçük değerinin bulunması gerekir. $c \geq 0$ için $D = |1 - g(z)(1-c) - cg^2(z)|$ denkleminin $g(z)$ yi içeren terimlerinin katsayıları sıfırdan küçük veya eşittir. D nin en küçük değeri $|g(z)| = a|z|^n > 0$ için elde edilir. $c < 0$ için D de $g(z)$ fonksiyonunu içeren iki terim de $g(z) > 0$ için minimize edilir. Böylece, her c için ve $A = n(1-|z|^2)$, $B = |z|^n(1-c)$, $C = c|z|^{2n}$, $A > 0, B \geq 0,\ -1 < C < 1$ olmak üzere

$$\frac{(1-|z|^2)}{(1+c)|z|^{n-1}}\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right| \le \frac{-a^2|z|+an(1-|z|^2)+|z|}{1-a|z|^n(1-c)-a^2c|z|^{2n}}$$

$$= \frac{-a^2|z|+aA+|z|}{1-aB-a^2C} = F(a) \qquad (3.32)$$

elde edilir. Şimdi $F(a)$ fonksiyonunun $0<a<1$ için monoton artan olduğu gösterilmelidir. $x^2(|z|B+AC)-2x|z|(1-C)+A+B|z|=0$ denkleminin kökleri $F(a)$ fonksiyonunun kritik noktalarıdır. x^2 nin katsayısı $|z|^{n+1}(1-c)+n(1-|z|^2)c|z|^{2n}$, $|z|<1$ ve $-1<c\le 1$ için pozitiftir ve çarpımları $\frac{A+B|z|}{AC+B|z|}>1$ olan iki pozitif kökü verir. 1 den büyük olan küçük kök için

$$2|z|^{n+1}(1-c)+n(1-|z|^2)(1+c|z|^{2n})-2|z|(1-c|z|^{2n})>0 \qquad (3.33)$$

eşitsizliği elde edilir. $c=-1$ için

$$(1-|z|^n)[-2|z|(1-|z|^n)+n(1-|z|^2)(1+|z|^n)]>0$$

bulunur. $\phi(|z|,n)=[-2|z|(1-|z|^n)+n(1-|z|^2)]$, $\phi(|z|,1)>0$ ve $\phi(|z|,n+1)>\phi(|z|,n)$ olsun. Buradan, $\phi(|z|,n)+n|z|^n(1-|z|^2)>0$ olduğu görülür ve (3.33) eşitsizliği sağlanır. Benzer bir ispat $c=1$ için yapılabilir. (3.33) eşitsizliği c de doğrusal olduğundan $-1<c<1$ için sağlanır ve $0<a<1$ için $F(a)<F(1)$ olur. (3.32) eşitsizliğinde $a=1$ alınırsa (3.31) sağlanır ve bu sınırın $p(z)=\frac{1-z^n}{1+cz^n}$ fonksiyonu için kesin olduğu görülür. $n=1$ için Teorem 3.6.4, Teorem 3.6.10 dan elde edilir. $h(z)=\frac{1}{p(z)}$ için $\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|=\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|$ olduğundan, (3.31) eşitsizliği $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ sınıfındaki fonksiyonlar için de sağlanır.

3.7 $\mathcal{P}(\alpha)$ Sınıfı ve Özellikleri

Bu bölümde, Lecko (2000) tarafından çalışılan $\mathcal{P}(\alpha)$ sınıfı tanıtılacak ve katsayı hesaplamalarıyla bazı özellikleri verilecektir.

3.7.1 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ve $0 \leq \alpha < 1$, $z \in \mathbb{U}$ için

$$\mathrm{Re}p(z) > \alpha$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}(\alpha)$ ile gösterilir.

3.7.2 Lemma. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$q(z) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n \; (z \in \mathbb{U}) \tag{3.34}$$

şeklinde seri açılımına sahip q fonksiyonları, $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q(z) > \alpha$ şartını sağlıyorsa

$$|q_n| \leq 2(\mathrm{Re}q_0 - \alpha) \;\; (n \in \mathbb{N}) \tag{3.35}$$

dir. (3.35) eşitsizliği kesindir.(3.34) te eşitliği sağlayan bir ekstremal fonksiyon

$$q(z) = \frac{q_0 + (\overline{q_0} - 2\alpha)z}{1 - z} \; (z \in \mathbb{U}\,)$$

dir.

3.7.3 Uyarı. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $\mathrm{Re}q(z) > 0$ şartını sağlayan ve (3.34) de verilen q fonksiyonunun q_n $(n \in \mathbb{N})$ katsayıları için $\alpha = 0$ iken $|q_n| \leq 2\mathrm{Re}q_0$ dir.

3.7.4 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $\xi \in \overline{\mathbb{U}}$ olsun. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ ise $z \in \mathbb{U}$ için

$$q(z) = q(\xi; z) = \frac{\xi - \bar{\xi}z[(1-2\alpha)z + \alpha\xi]}{z} + \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}{z}p(z) \tag{3.36}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir ve

$$\mathrm{Re}q(\xi; z) \geq \alpha \tag{3.37}$$

dır. (3.37) denkleminde eşitlik sadece $|\xi| = 1$ ve

$$p(z) = p(\alpha, \xi; z) = \frac{1 + (1-2\alpha)\bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} \ (z \in \mathbb{U}) \tag{3.38}$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat.

$$q(\xi; 0) = \lim_{z\to 0} q(\xi; z) = 1 + (1-\alpha)|\xi|^2 - \xi a_1$$

olduğundan (3.36) fonksiyonunun $z = 0$ noktasında kaldırılabilir singüleritesi vardır. p fonsiyonunun ve dolayısıyla q fonksiyonunun da $\partial\mathbb{U}$ üzerinde analitik olduğu varsayılırsa $z = e^{i\theta}$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$q(\xi; e^{i\theta}) = 2i\mathrm{Im}(\xi e^{-i\theta}) - \alpha|\xi|^2 + 2\alpha\bar{\xi}e^{i\theta} + [1 + |\xi|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi e^{-i\theta})]p(e^{i\theta})$$

elde edilir. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}q(\xi; e^{i\theta}) &= -\alpha|\xi|^2 + 2\alpha\mathrm{Re}(\bar{\xi}e^{i\theta}) + [1 + |\xi|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi e^{-i\theta})]\mathrm{Re}p(e^{i\theta}) \\ &\geq \alpha + 2\alpha[\mathrm{Re}(\bar{\xi}e^{i\theta}) - \mathrm{Re}(\xi e^{-i\theta})] = \alpha \end{aligned} \tag{3.39}$$

dır. Teorem 1.41 den (3.39) eşitsizliği $\overline{\mathbb{U}}$ üzerinde sağlanır ve $z \in \overline{\mathbb{U}}$ için $\mathrm{Re}q(\xi; z) \geq \alpha$ dır. Eğer p fonksiyonu $\partial\mathbb{U}$ üzerinde analitik değilse, $r \in (0,1)$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $p_r(z) = p(rz)$ fonksiyonları ele alınır. (3.36) denkleminin sağ tarafında p yerine p_r yazılırsa $q_r(\xi; z)$ fonksiyonu bulunur. Yukarıdaki işlemler tekrar yapılırsa $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q_r(\xi; z) > \alpha$ eşitsizliği elde edilir. $r \to 1$ iken $p_r \to p$ ve $q_r \to q$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q_r(\xi; z) \geq \alpha$ dir.

$|\xi| < 1$ ise (3.36) denkleminden $q(\xi; \xi) = 1 - (1 - \alpha)|\xi|^2 > \alpha$ elde edilir. Dolayısıyla, $z \in \mathbb{U}$ ve $|\xi| < 1$ için $\mathrm{Re}q(\xi; z) > \alpha$ bulunur.

$|\xi| = 1$ ise (3.36) denkleminden her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}q(\xi; 0) - \alpha &= (1 - \alpha)(1 + |\xi|^2) - \mathrm{Re}(\xi a_1)\\ &\geq (1 - \alpha)(1 + |\xi|^2) - |\xi a_1|\\ &\geq (1 - \alpha)(1 - |\xi|^2) = 0\end{aligned}$$

bulunur. Eşitlik sadece $\mathrm{Re}(\xi a_1) = \xi a_1$ ve $|a_1| = 2(1 - \alpha)$ için sağlanır. Dolayısıyla, sadece (3.38) fonksiyonu için $a_1 = 2(1 - \alpha)\bar{\xi}$ olur. Böylece, her $z \in \mathbb{U}$ ve $\xi \in \partial\mathbb{U}$ için $q(\xi; z) = \alpha$ dır.

Şimdi $\xi \in \mathbb{U}$ için Teorem 3.7.4 ün tersi ifade edilecektir.

3.7.5 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $\xi \in \mathbb{U}$ olsun. q fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q(z) > \alpha$ ve

$$q(\xi) = 1 - (1 - \alpha)|\xi|^2 \qquad (3.40)$$

olduğu varsayılırsa $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(z) = p(\xi; z) = \frac{z}{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}\left(q(z) - \frac{\xi - \bar{\xi}z[(1-2\alpha)z + \alpha\xi]}{z}\right) \quad (3.41)$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir ve $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ dır.

İspat.

$$p(\xi;\xi) = \lim_{z\to\xi} p(\xi; z) = \frac{1 + (1-2\alpha)|\xi|^2 - \xi q'(\xi)}{1 - |\xi|^2}$$

olduğundan p fonksiyonu $z = \xi$ noktasında kaldırılabilir singüleriteye sahiptir. Ayrıca, her $\xi \in \mathbb{U}$ için $p(\xi; 0) = 1$ dir. Böylece, p fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitiktir ve $\xi \in \mathbb{U}$ için (2.1) şeklinde seri açılımına sahiptir.

Şimdi $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ olduğu ispatlanacaktır. İlk olarak, q fonksiyonunun $\partial\mathbb{U}$ üzerinde analitik olduğunu kabul edelim. (3.41) fonksiyonundan ve $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ için

$$p(\xi; e^{i\theta}) = \frac{1}{1 + |\xi|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi e^{-i\theta})}\left(q(e^{i\theta}) + \alpha|\xi|^2 - 2\alpha\bar{\xi}e^{i\theta} - 2i\mathrm{Im}(\bar{\xi}e^{i\theta})\right)$$

bulunur. $z \in \partial\mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q(z) \geq \alpha$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}p(\xi; e^{i\theta}) &= \frac{1}{1 + |\xi|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi e^{-i\theta})}\left(\mathrm{Re}q(e^{i\theta}) + \alpha|\xi|^2 - 2\alpha\mathrm{Re}(\bar{\xi}e^{i\theta})\right) \\ &\geq \frac{1 + |\xi|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{\xi}e^{i\theta})}{1 + |\xi|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi e^{-i\theta})}\alpha = \alpha \qquad (4.42)\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 1.41 den (3.42) eşitsizliği $\overline{\mathbb{U}}$ üzerinde sağlanır ve $z \in \overline{\mathbb{U}}$ için $\mathrm{Re}p(\xi; z) \geq \alpha$ dır.

q fonksiyonu $\partial\mathbb{U}$ üzerinde analitik değilse, Teorem 3.7.4 te p_r ile verilen hesaplamalar ele alınırsa $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}p(\xi; z) \geq \alpha$ bulunur.

Son olarak, her $\xi \in \mathbb{U}$ için $p(\xi;0)=1$ olduğundan $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}p(\xi;z) > \alpha$ dır ve dolayısıyla $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ olur.

Teorem 3.7.4 ve Teorem 3.7.5 ten $\alpha = 0$ için sıradaki sonuçlar elde edilir.

3.7.6 Sonuç. $\xi \in \overline{\mathbb{U}}$ olsun. $p \in \mathcal{P}$ ise $z \in \mathbb{U}$ için

$$q(z) = q(\xi;z) = \frac{\xi - \bar{\xi}z^2}{z} + \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}{z} p(z)$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}p(\xi;z) \geq \alpha$ dir. Eşitlik sadece $|\xi| = 1$ ve

$$p(z) = p(\xi;z) = \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z} \ (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu için sağlanır.

3.7.7 Sonuç. $\xi \in \mathbb{U}$ olsun. q fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da analitik olduğu, $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q(z) > \alpha$ ve $q(\xi) = 1 - |\xi|^2$ olduğu varsayılırsa

$$p(z) = p(\xi;z) = \frac{z}{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)} \left(q(z) - \frac{\xi - \bar{\xi}z^2}{z} \right)$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir ve $p \in \mathcal{P}$ dir.

Şimdi Teorem 3.7.4 kullanılarak $\mathcal{P}(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların katsayı eşitsizlikleri ifade edilecektir.

3.7.8 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $\xi \in \overline{\mathbb{U}}$ olsun. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ ve p fonksiyonu (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ise $n = 2,3, \ldots$ için

$$\left|\xi a_2 - (1+|\xi|^2)a_1 + 2(1-\alpha)\bar{\xi}\right| \leq 2\big((1-\alpha)(1+|\xi|^2) - \mathrm{Re}(\xi a_1)\big), \qquad (3.43)$$

$$\left|\xi a_{n+1} - (1+|\xi|^2)a_n + \bar{\xi}a_{n-1}\right| \leq 2\big((1-\alpha)(1+|\xi|^2) - \mathrm{Re}(\xi a_1)\big) \qquad (3.44)$$

ve

$$\Big|\left||\xi|a_{n+1} - a_n\right| - |\xi|\left||\xi|a_n - a_{n-1}\right|\Big| \leq 2\big((1-\alpha)(1+|\xi|^2) - |\xi|\mathrm{Re}a_1\big) \qquad (3.45)$$

dir. Sonuçlar kesindir.

İspat. Teorem 3.7.4 ten, (3.36) ile tanımlı q fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q(\xi; z) \geq \alpha$ olduğu biliniyor. q fonksiyonunun (3.34) formunda olduğu varsayılırsa (3.36) denkleminden

$$zq(\xi; z) = [1 + (1-\alpha)|\xi|^2 - \xi a_1]z + \left[-\xi a_2 + (1+|\xi|^2)a_1 - 2(1-\alpha)\bar{\xi}\right]z^2 + \cdots$$
$$+ \left[-\xi a_n + (1+|\xi|^2)a_{n-1} - \bar{\xi}a_{n-2}\right]z^n + \cdots$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$q_0 = 1 + (1-\alpha)|\xi|^2 - \xi a_1, \qquad (3.46)$$

$$q_1 = -\xi a_2 + (1+|\xi|^2)a_1 - 2(1-\alpha)\bar{\xi}$$

ve $n = 2,3, \dots$ için

$$q_n = -\xi a_n + (1+|\xi|^2)a_{n-1} - \bar{\xi}a_{n-2}$$

dir. (3.35) eşitsizliği ve (3.46) denklemi kullanılarak (3.43) ve (3.44) eşitsizlikleri elde edilir.

(3.45) eşitsizliğini ispatlamak için $\varphi \in [0,2\pi)$ olmak üzere $\xi = |\xi|e^{i\varphi}$ olduğu varsayılsın. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ olduğundan, $z \in \mathbb{U}$ için $p\left(e^{-i\varphi}z\right)$ fonksiyonu da $\mathcal{P}(\alpha)$ sınıfına aittir. (3.44) eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\left||\xi|a_{n+1} - a_n\right| - |\xi|.\left||\xi|a_n - a_{n-1}\right|\right| = \left|\left|\xi e^{-i\varphi}a_{n+1} - a_n\right| - \left|\bar{\xi}\right|\left|\xi e^{-i\varphi}a_n - a_{n-1}\right|\right|$$

$$\leq \left|\xi e^{-i\varphi}a_{n+1} - (1 + |\xi|^2)a_n + \bar{\xi}e^{i\varphi}a_{n-1}\right|$$

$$\leq 2\left((1-\alpha)(1+|\xi|^2) - \mathrm{Re}(\xi e^{-i\varphi}a_1)\right)$$

$$= 2\left((1-\alpha)(1+|\xi|^2) - |\xi|\mathrm{Re}a_1\right)$$

bulunur. $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(\alpha,1;z) = \frac{1+(1-\alpha)z}{1-z} = 1 + 2(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{3.47}$$

fonksiyonu $\mathcal{P}(\alpha)$ sınıfındadır ve (3.43), (3.44) ve (3.45) deki eşitlikleri sağlar.

$\alpha = 0$ için sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.9 Sonuç. $\xi \in \overline{\mathbb{U}}$ olsun. $p \in \mathcal{P}$ ve p fonksiyonu (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ise $n = 2,3,\ldots$ için

$$\left|\xi a_2 - (1+|\xi|^2)a_1 + 2\bar{\xi}\right| \leq 2\left(1 + |\xi|^2 - \mathrm{Re}(\xi a_1)\right), \tag{3.48}$$

$$\left|\xi a_{n+1} - (1+|\xi|^2)a_n + \bar{\xi}a_{n-1}\right| \leq 2\left(1 + |\xi|^2 - \mathrm{Re}(\xi a_1)\right) \tag{3.49}$$

ve

$$\left||\xi|a_{n+1}-a_n\right|-|\xi|.\left||\xi|a_n-a_{n-1}\right|\le 2(1+|\xi|^2-|\xi|\mathrm{Re}a_1) \qquad (3.50)$$

dir.

3.7.10 Sonuç. $p\in\mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip olsun. $n=2,3,\ldots$ için

$$\begin{gathered}|a_2-2a_1+2|\le 2\mathrm{Re}(2-a_1),\\ |a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}|\le 2(2-\mathrm{Re}a_1),\end{gathered} \qquad (3.51)$$

$$\begin{gathered}|a_2+2a_1+2|\le 2(2+\mathrm{Re}a_1),\\ |a_{n+1}+2a_n+a_{n-1}|\le 2(2+\mathrm{Re}a_1),\end{gathered} \qquad (3.52)$$

$$\begin{gathered}|a_2+2ia_1-2|\le 2(2+\mathrm{Im}a_1),\\ |a_{n+1}+2ia_n-a_{n-1}|\le 2(2+\mathrm{Im}a_1),\end{gathered} \qquad (3.53)$$

$$\begin{gathered}|a_2-2ia_1-2|\le 2(2-\mathrm{Im}a_1),\\ |a_{n+1}-2ia_n-a_{n-1}|\le 2(2-\mathrm{Im}a_1),\end{gathered} \qquad (3.54)$$

dir. Tüm hesaplamalar kesindir.

İspat. (3.48) ve (3.49) eşitsizliklerinde, $\xi=1$ seçilirse (3.51) ve $\xi=-1$ seçilirse (3.52) elde edilir. Benzer şekilde, (3.48) ve (3.49) eşitsizliklerinde $\xi=i$ ve $\xi=-i$ seçilirse sırasıyla (3.53) ve (3.54) eşitsizlikleri elde edilir.

(3.50) denkleminde $|\xi|=1$ seçilirse sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.11 Sonuç. $p\in\mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip olsun. $n=2,3,\ldots$ için

$$||a_{n+1}-a_n|-|a_n-a_{n-1}||\le 2(2-\mathrm{Re}a_1)$$

dir. Sonuç kesindir.

(3.49) eşitsizliğinde $n=2,3,\ldots$ için $\xi=1/n$ seçilirse sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.12 Sonuç. $p \in \mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip olsun. $n = 2,3, \dots$ için

$$\left|a_{n+1} - \left(n + \frac{1}{n}\right)a_n + a_{n-1}\right| \leq 2\left(n + \frac{1}{n} - \mathrm{Re}a_1\right)$$

dir. Sonuç kesindir.

(3.49) eşitsizliğinde $n = 2,3, \dots$ için $\xi = 1 - 1/n$ seçilirse sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.13 Sonuç. $p \in \mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip olsun. $n = 2,3, \dots$ için

$$\left|a_{n+1} - \left(\frac{n}{n-1} + \frac{n-1}{n}\right)a_n + a_{n-1}\right| \leq 2\left(\frac{n}{n-1} + \frac{n-1}{n} - \mathrm{Re}a_1\right)$$

dir. Sonuç kesindir.

3.7.14 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $\xi \in \overline{\mathbb{U}}$ olsun. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ise $n = 2,3, \dots$ için

$$|\xi a_{n+1} - a_n| \leq \begin{cases} 2\dfrac{1-|\xi|^n}{1-|\xi|}[(1-\alpha)(1+|\xi|^2) - \mathrm{Re}(\xi a_1)] + |2(1-\alpha) - \xi a_1|.|\xi|^n, & |\xi| < 1 \\ (2n+1)|2(1-\alpha) - \xi a_1|, & |\xi| = 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

ve

$$\big||\xi a_{n+1}| - |a_n|\big| \leq \begin{cases} 2\dfrac{1-|\xi|^n}{1-|\xi|}[(1-\alpha)(1+|\xi|^2) - |a_1|\mathrm{Re}\xi] + \big|2(1-\alpha) - \xi|a_1|\big|.|\xi|^n, & |\xi| < 1 \\ (2n+1)\big|2(1-\alpha) - \xi|a_1|\big|, & |\xi| = 1 \end{cases} \quad (3.56)$$

dir. Sonuçlar her $\xi \in [0,1]$ için kesindir.

İspat. Teorem 3.7.4 ten, (3.36) ile tanımlı q fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir ve $z \in \mathbb{U}$ için $\mathrm{Re}q(\xi; z) \geq \alpha$ dir. q fonksiyonunun (3.34) şeklinde seri açılımına sahip olduğu varsayılırsa (3.36) fonksiyonundan

$$\begin{aligned}\frac{q(z)}{1-\bar{\xi}z} &= \frac{\xi - \bar{\xi}z[(1-2\alpha)z + \alpha\xi]}{z(1-\bar{\xi}z)} + \frac{z-\xi}{z}p(z) \\ &= 1 - 2\alpha + \frac{\xi}{z} - [(1-\alpha)(1-|\xi|^2) - \alpha]\frac{1}{1-\bar{\xi}z} + \left(1 - \frac{\xi}{z}\right)p(z) \\ &= [1 + (1-\alpha)|\xi|^2 - \xi a_1] + \left[a_1 - \xi a_2 - \left((1-\alpha)(1-|\xi|^2) - \alpha\right)\bar{\xi}\right]z \\ &+ \cdots + \left[a_n - \xi a_{n+1} - \left((1-\alpha)(1-|\xi|^2) - \alpha\right)\bar{\xi}^n\right]z^n + \cdots \qquad (3.57)\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat

$$\frac{q(z)}{1-\bar{\xi}z} = q_0 + \left[q_1 + q_0\bar{\xi}\right]z + \cdots + \left[q_n + q_{n-1}\bar{\xi} + \cdots + q_1\bar{\xi}^{n-1} + q_0\bar{\xi}^n\right]z^n + \cdots \quad (3.58)$$

dir. (3.57) ve (3.58) denklemlerinden

$$q_0 = 1 + (1-\alpha)|\xi|^2 - \xi a_1,$$

$$q_1 + q_0\bar{\xi} = a_1 - \xi a_2 - \left((1-\alpha)(1-|\xi|^2) - \alpha\right)\bar{\xi}$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$q_n + q_{n-1}\bar{\xi} + \cdots + q_1\bar{\xi}^{n-1} + q_0\bar{\xi}^n = a_n - \xi a_{n+1} - \left((1-\alpha)(1-|\xi|^2) - \alpha\right)\bar{\xi}^n$$

bulunur. (3.35) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}|\xi a_{n+1} - a_n| &\leq \left|q_n + q_{n-1}\bar{\xi} + \cdots + q_1\bar{\xi}^{n-1}\right| + |q_0 + (1-\alpha)(1-|\xi|^2) - \alpha|.|\xi|^n \\ &\leq 2(\mathrm{Re}q_0 - \alpha)(1 + |\xi| + \cdots + |\xi|^{n-1}) + |2(1-\alpha) - \xi a_1|.|\xi|^n\end{aligned}$$

elde edilir ve bu (3.55) eşitsizliğini verir.

(3.56) eşitsizliğini ispatlamak için ilk olarak $\psi \in [0,2\pi)$ olmak üzere $a_1 = |a_1|e^{i\psi}$olduğu varsayılsın ve $|\xi| = 1$ olsun. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ olduğundan $z \in \mathbb{U}$ için $p\left(e^{-i\psi}z\right)$ fonksiyonu da $\mathcal{P}(\alpha)$ sınıfına aittir ve (3.55) eşitsizliği uygulanırsa

$$\left||\xi a_{n+1}| - |a_n|\right| \leq \left|\xi e^{-i\psi} a_{n+1} - a_n\right|$$

$$\leq (2n+1)\left|2(1-\alpha) - \xi e^{-i\psi} a_1\right|$$

$$= \left|2(1-\alpha) - \xi |a_1|\right|$$

elde edilir. (3.56) eşitsizliği $|\xi| < 1$ için de benzer şekilde ispatlanır.

Eğer $\xi \in [0,1)$ ise (3.55) ve (3.56) eşitsizlikleri (3.47) fonksiyonunun katsayılarıdır.

Her $\alpha \in [0,1)$, $\theta \in [0,2\pi)$ ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$p_{\alpha,\theta}(z) = \frac{1 - 2\alpha z \cos\theta - (1-2\alpha)z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = 1 + 2(1-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n\theta)\, z^2$$

fonksiyonundan, (3.55) ve (3.56) eşitsizliklerinin ($\xi = 1$) sağ tarafında bulunan $2n+1$ çarpanının daha küçük bir değerle değiştirilemeyeceği görülür. Buradan, $\xi = 1$ ve her $\theta \in [0,2\pi)$ için

$$|p_{n+1} - p_n| = 2(1-\alpha)\left|\cos\left((n+1)\theta\right) - \cos(n\theta)\right|$$

$$= 4(1-\alpha)\left|\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\leq 4(1-\alpha)(2n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

elde edilir. θ yeteri kadar küçük alınırsa $2n+1$ çarpanının en iyi seçim olduğu görülür.

Teorem 3.7.14 te $\alpha = 0$ alınırsa sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.15 Sonuç. $\xi \in \overline{\mathbb{U}}$ olsun. $p \in \mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ise $n = 2,3,\ldots$ için

$$\begin{aligned}&|\xi a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \begin{cases} 2\dfrac{1-|\xi|^n}{1-|\xi|}[(1+|\xi|^2) - \mathrm{Re}(\xi a_1)] + |2-\xi a_1||\xi|^n, & |\xi| < 1 \\ (2n+1)|2-\xi a_1|, & |\xi| = 1 \end{cases}\end{aligned} \tag{3.59}$$

ve

$$\begin{aligned}&\big||\xi a_{n+1}| - |a_n|\big| \\ &\leq \begin{cases} 2\dfrac{1-|\xi|^n}{1-|\xi|}[(1+|\xi|^2) - |a_1|\mathrm{Re}\xi] + \big|2-\xi|a_1|\big||\xi|^n, & |\xi| < 1 \\ (2n+1)\big|2-\xi|a_1|\big|, & |\xi| = 1 \end{cases}\end{aligned} \tag{3.60}$$

dir. $\xi \in [0,1]$ için sonuçlar kesindir.

Sonuç 3.7.15 te $n = 2,3,\ldots$ için $\xi = 1/n$ seçilirse sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.16 Sonuç. $p \in \mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ise $n = 2,3,\ldots$ için

$$|a_{n+1} - na_n| \leq 2\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^n}{n-1}(n^2+1-n\mathrm{Re}a_1) + \left(\frac{1}{n}\right)^n|2n - a_1|$$

dir. Sonuç kesindir. Özel olarak $n = 2$ ve $n = 3$ için

$$|a_3 - 2a_2| \leq \frac{15}{2} - 3\mathrm{Re}a_1 + \left|1 - \frac{a_1}{4}\right|$$

ve

$$|a_4 - 3a_3| \leq \frac{1}{27}(260 - 78\mathrm{Re}a_1 + |6 - a_1|)$$

elde edilir.

Sonuç 3.7.15 te $n \in \mathbb{N}$ için $\xi = 1 - \frac{1}{n+1}$ seçilirse sıradaki sonuç elde edilir.

3.7.17 Sonuç. $p \in \mathcal{P}$ ve (2.1) şeklinde seri açılımına sahip ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} &|na_{n+1} - (n+1)a_n| \\ &\qquad \leq 2\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)(2n^2 + 2n + 1 - n(n+1)\mathrm{Re}a_1) \\ &\qquad + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |2(n+1) - na_1| \end{aligned}$$

dir. Sonuç kesindir. Özel olarak $n = 1$ ve $n = 2$ için

$$|a_2 - 2a_1| \leq 5 - 2\mathrm{Re}a_1 + \left|2 - \frac{a_1}{2}\right|$$

ve

$$|2a_3 - 3a_2| \leq \frac{1}{27}(260 - 78\mathrm{Re}a_1 + |6 - a_1|)$$

elde edilir.

3.7.18 Teorem. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[1 + (1 - 2\alpha)ze^{-i\theta}]}{[1 - ze^{-i\theta}]} d\mu(\theta)$$

olmak üzere $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1$ özelliğinde azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ ve $z \in \mathbb{U}$ için $q(z) = \frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}$ şeklinde tanımlanırsa $q(0) = 1$ ve $\mathrm{Re}q(z) > 0$ olur ve böylece $q \in \mathcal{P}$ dir. Sonuç 2.13 gereği

$$q(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[1 + ze^{-i\theta}]}{[1 - ze^{-i\theta}]} d\mu(\theta)$$

olacak şekilde istenilen özelliğe sahip $\mu(\theta)$ fonksiyonu mevcuttur. Böylece,

$$p(z) = \alpha + \frac{1-\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[1 + e^{-i\theta}]}{[1 - ze^{-i\theta}]} d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[1 + (1 - 2\alpha)]}{[1 - ze^{-i\theta}]} d\mu(\theta)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.8 $\mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ve $\mathcal{P}_M$ Sınıfları ve Özellikleri

Bu bölümde, Libera ve Livingston (1972) tarafından çalışılan $\mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ve $\mathcal{P}_M$ sınıfları tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

Sağ yarı düzlemde bulunan ϱ $(\varrho > 0)$ yarıçaplı ve $(\varrho + \alpha) + it$ merkezli disk $\alpha + it$ noktasında $w = \alpha + iv$ $(\alpha \geq 0, v$ reel$)$ doğrusuna teğettir. (1,0) noktasının bu disk içinde kalması için $|1 - (\varrho + \alpha + it)| < \varrho$ veya

$$D = D(\alpha, t, \varrho) = 2\varrho(1 - \alpha) + \alpha(2 - \alpha) - (1 - t^2) > 0 \tag{3.61}$$

olması gerekir. Ayrıca, (3.61) diskinde (1,0) yerine (0,0) noktası alındığında elde edilen yeni diskin üzerine $\mathbb{U}$ birim diskinin lineer dönüşümü, rotasyonu hariç,

$$T(z) = \frac{Az + \varrho}{Bz + \varrho}$$

dir. Burada

$$A = A(\alpha, t, \varrho) = \varrho(1 - 2\alpha) + \alpha(1 - \alpha) - t^2 + it \tag{3.62a}$$

ve

$$B = B(\alpha, t, \varrho) = 1 - \varrho - \alpha + it \tag{3.62b}$$

dir. Ayrıca, $T(z)$ dönüşümünün diskriminantı $\varrho(A - B) = \varrho D$ dır.

3.8.1 Tanım. $0 \leq \alpha < 1$, t reel, $\varrho > \frac{1}{2}$ ve $D(\alpha, t, \varrho) > 0$ olmak üzere $p(z) \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ dir ancak ve ancak (3.62) den ve $z \in \mathbb{U}$ için

$$p(z) = \frac{\varrho + Aw(z)}{\varrho + Bw(z)} \text{ ve } |w(z)| \leq |z| \tag{3.63}$$

olacak şekilde $\mathbb{U}$ birim diskinde bir analitik $w(z)$ fonksiyonu mevcuttur.

Tanım 2.4 ten, her $p(z) \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ fonksiyonunun $T(z)$ fonksiyonuna sabordine olduğu görülür. Dolayısıyla, $p(\mathbb{U})$, $(\varrho + \alpha + it)$ merkezli ϱ yarıçaplı açık diskin içindedir.

3.8.2 Teorem. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ise $k = 1,2, \ldots$ için

$$|a_k| \leq 2(1 - \alpha) + \frac{\alpha(2 - \alpha) - (t^2 + 1)}{\varrho} \tag{3.64}$$

olur. Bu sonuçlar her uygun α, t ve ϱ için kesindir.

İspat. (3.63)

$$[A - Bp(z)]w(z) = \varrho[p(z) - 1]$$

veya

$$\left[A - B\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right] w(z) = \varrho \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \,, a_0 = 1$$

denklemlerine denktir ve

$$\left[(A - B) - B\sum_{n=1}^{n-1} a_n z^n\right] w(z) = \varrho \sum_{n=1}^{k} a_n z^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n z^n \qquad (3.65)$$

şekilinde de yazılabilir. Ayrıca, (3.65) denkleminin son terimi $\mathbb{U}$ birim diskinin kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. $z = re^{i\theta}$ ve her $z \in \mathbb{U}$ için $|w(z)| \le |z| < 1$ olduğundan

$$|A - B|^2 + |B|^2 \sum_{n=1}^{k-1} |a_n|^2 \, r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|(A - B) + B\sum_{n=1}^{k-1} a_n r^n e^{in\theta}\right|^2 d\theta$$

$$\ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\left((A - B) + B\sum_{n=1}^{k-1} a_n r^n e^{in\theta}\right) w\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta$$

$$\ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\varrho\sum_{n=1}^{k} a_n r^n e^{in\theta} + \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}\right|^2 d\theta$$

$$\geq \varrho^2 \sum_{n=1}^{k} |a_n|^2 r^{2n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} |b_n|^2 r^{2n}$$

elde edilir. Son terim negatif değildir ve $r < 1$ dir. Dolayısıyla,

$$|A-B|^2 + |B|^2 \sum_{n=1}^{k-1} |a_n|^2 \geq \sum_{n=1}^{k} \varrho^2 |a_n|^2$$

veya

$$\varrho^2 |a_n|^2 \leq |A-B|^2 + (|B|^2 - \varrho^2) \sum_{n=1}^{k-1} |a_n|^2$$

bulunur. Bazı hesaplamalardan sonra $|B|^2 - \varrho^2 = -D(\alpha, t, \varrho)$ elde edilir ve bu (3.61) den görüleceği gibi negatiftir. Buradan,

$$|a_n| \leq \frac{|A-B|}{\varrho} = \frac{D(\alpha, t, \varrho)}{\varrho} \tag{3.66}$$

elde edilir ve (3.64) eşitsizliğine denktir. Eğer $w(z) = z^n$ ise

$$p(z) = 1 + \frac{D(\alpha, t, \varrho)}{\varrho} z^n + \cdots$$

olur ve (3.64) ün kesin olduğu görülür.

Uyarı 3.8.3. $p(z) \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ise

$$q(z) = \frac{p\left[\dfrac{z+\xi}{1+\bar{\xi}z}\right] - i\mathrm{Im}p(\xi)}{\mathrm{Re}p(\xi)} = 1 + \frac{p'(\xi)(1-|\xi|^2)}{\mathrm{Re}p(\xi)} z + \cdots$$

fonksiyonu her $\xi \in \mathbb{U}$ için $\mathcal{P}$ sınıfındadır. Ayrıca, $q(\mathbb{U})$, $\varrho/\mathrm{Re}p(\xi)$ yarıçaplı $\frac{(\alpha+\varrho)-i(t-\mathrm{Im}p(\xi))}{\mathrm{Re}p(\xi)}$ merkezli diskin içindedir. Sonuç olarak,

$$q(z) \in \mathcal{P}\left[\frac{\alpha}{\mathrm{Re}p(\xi)}, \frac{t-\mathrm{Im}p(\xi)}{\mathrm{Re}p(\xi)}, \frac{\varrho}{\mathrm{Re}p(\xi)}\right]$$

dir ve bu durumda (3.66) dan

$$\frac{|p'(\xi)|}{\mathrm{Re}p(\xi)}(1-|\xi|^2) \leq \frac{\mathrm{Re}p(\xi)}{\varrho} D\left(\frac{\alpha}{\mathrm{Re}p(\xi)}, \frac{t-\mathrm{Im}p(\xi)}{\mathrm{Re}p(\xi)}, \frac{\varrho}{\mathrm{Re}p(\xi)}\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden sıradaki sonuç elde edilir.

3.8.4 Sonuç. $p(z) \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ve $z \in \mathbb{U}$ ise

$$|p'(z)|(1-|z|^2) \leq 2(\mathrm{Re}p(z)-\alpha) - \frac{(\mathrm{Re}p(z)-\alpha)^2 + \big(t-\mathrm{Im}p(z)\big)^2}{\varrho}$$

dır.

3.8.5 Teorem. $p(z) \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ise $|z| \leq r$ ve $D = D(\alpha, t, \varrho)$ için

$$\begin{aligned}\frac{|(1-r^2)\varrho^2 + r^2(\varrho+\alpha)D + ir^2tD| - r\varrho D}{(1-r^2)\varrho^2 + r^2 D} &\leq |p(z)| \\ &\leq \frac{|(1-r^2)\varrho^2 + r^2(\varrho+\alpha)D + ir^2tD| + r\varrho D}{(1-r^2)\varrho^2 + r^2 D}\end{aligned} \tag{3.67}$$

ve

$$1 - \frac{r[r(1-\alpha)+\varrho(1-r)]D}{(1-r^2)\varrho^2 + r^2 D} \leq \mathrm{Re}p(z) \leq 1 - \frac{r[r(1-\alpha)-\varrho(1+r)]D}{(1-r^2)\varrho^2 + r^2 D} \tag{3.68}$$

dır. Bu sınırlar her $0 < r < 1$ ve her uygun α, t ve ϱ için kesindir.

İspat. Bazı hesaplamalardan sonra $T(z)$ dönüşümünün $\overline{D}_r$ diskini

$$w_0 = \frac{A}{B} - \frac{\varrho^2(A-B)}{B[\varrho^2 - |B|^2 r^2]}$$

merkezli ve

$$R = \frac{r\varrho|A-B|}{|\varrho^2 - |B|^2 r^2|}$$

yarıçaplı diske dönüştürdüğü görülür. (3.61) ve (3.62) den

$$|\varrho^2 - |B|^2 r^2| = (1-r^2)\varrho^2 + r^2 D > 0$$

elde edilir. Buradan

$$w_0 = \frac{\varrho^2 - A\bar{B}r^2}{\varrho^2 - |B|^2 r^2} = 1 - \frac{r^2 \bar{B} D}{(1-r^2)\varrho^2 + r^2 D}$$

ve

$$R = \frac{r\varrho D}{(1-r^2)\varrho^2 + r^2 D}$$

bulunur. Eğer $p(z) \in \mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ ise $|z| \leq r$ için Tanım 2.4 ten

$$|w_0| - R \leq |p(z)| \leq |w_0| + R$$

ve

$$\mathrm{Re}w_0 - R \leq \mathrm{Re}p(z) \leq \mathrm{Re}w_0 + R$$

dir ve bu eşitsizlikler sırasıyla (3.67) ve (3.68) eşitsizliklerine denktir.

3.8.6 Uyarı. Uygun sınırlar alındığında $\mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ sınıfı için elde edilen sonuçlar, $\mathcal{P}(\alpha), 0 < \alpha < 1$ ve $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}$ sınıflarına genişletilebilir.

3.8.7 Sonuç. Eğer $p(z) \in \mathcal{P}(\alpha)$ ise

$$\frac{|zp'(z)|}{\mathrm{Re}(p(z)-\alpha)} \leq \frac{2r}{1-r^2},$$

$$\frac{1-2(1-\alpha)r+(1-2\alpha)r^2}{1-r^2} \leq |p(z)| \leq \frac{1+2(1-\alpha)r+(1-2\alpha)r^2}{1-r^2}$$

ve

$$\frac{1-2(1-\alpha)r+(1-2\alpha)r^2}{1-r^2} \leq \mathrm{Re}p(z) \leq \frac{1+2(1-\alpha)r+(1-2\alpha)r^2}{1-r^2}$$

dir.

3.8.8 Tanım. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde seri açılımına sahip, $z \in \mathbb{U}$ ve belli $M > \frac{1}{2}$ için

$$|p(z) - M| < M$$

şartını sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{P}_M$ ile gösterilir.

$\mathcal{P}[\alpha, t, \varrho]$ sınıfında $\alpha = t = 0$ ve $\varrho = M$ seçilirse $\mathcal{P}_M$ sınıfına denk olur.

3.8.9 Sonuç. $p(z) \in \mathcal{P}[0,0,M] = \mathcal{P}_M$ ise $z \in \mathbb{U}$ için

$$|a_n| \leq 2 - \frac{1}{M} \; (n = 1,2,\dots),$$

$$|p'(z)|(1 - |z|^2) \leq 2\mathrm{Re}p(z) - \frac{|p(z)|^2}{M},$$

$$\frac{M(1 - |z|)}{M + (M - 1)|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{M(1 + |z|)}{M - (M - 1)|z|}$$

ve

$$\frac{M(1 - |z|)}{M + (M - 1)|z|} \leq \mathrm{Re}p(z) \leq \frac{M(1 + |z|)}{M - (M - 1)|z|}$$

dır.

KAYNAKLAR

Bernardi, S.D. 1974. New distortion theorems for functions of positive real part and applications to the partial sums of univalent convex functions. *American Mathematical Society*, 45(1): 113-118.

Brown, J.E. 1984. Quasiconformal extensions for some geometric subclasses of univalent functions. *Internat. J. Math & Math Sci*,7(1): 187-195.

Carathéodory, C. 1954. Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 2. Chelsea, New York, 220 pp.

Conway, J.B. 1995. Functions of One Complex Variable II. Springer, New York, 384 pp.

Duren, P.L. 1983. Univalent Functions. Springer-Verlag, New York, 382 pp.

Gamelin, T.W. 2001. Complex Analysis. Springer-Verlag, New York, 480 pp.

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, I-II. Mariner Publ. Co., Florida, 246 pp, 311 pp.

Hayami, T., Owa, S. 2009. Hankel determinant for p-valently starlike and convex functions of order α. *General Math.*, 17(4): 29-44.

Hayami, T., Owa, S. 2010. Generalized hankel determinant for certain classes. *Int. Journal of Math. Analysis*, 4(52): 2573-2585.

Herlogtz, G. 1911. Über Potenzreihen mit Positivern, Reelen Teil im Einheitskreis. *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig*, 63: 501-511.

Lecko, A. 2000. On coefficient inequalities in the Caratheodory class of functions. *Annales Polonici Mathematici*, 125(1): 59-67.

Libera, R. J., Livingston, A.E. 1972. Bounded functions with positive real part. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 22 (2): 195-209.

Libera, R. J., Zlotkiewicz, E. J. 1982. Early coefficients of the inverse of a regular convex function. *Proc. Amer. Math. Soc*., 85(2): 225-230.

MacGregor, T. H. 1962. Functions Whose Derivative Has a Positive Real Part. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104: 532-537.

MacGregor, T. H. 1964. A Class of Univalent Functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15: 311-317.

McCarty, C.P. 1972. Functions with real part greater than α. *American Mathematical Society*, 35(1): 211-216.

Miller, S.S., Mocanu, P.T. 1978. Second order differential inequalities in the complex plane. *J. Math Anal. Appl.*, 65: 289-305.

Owa, S., Saitoh, H., Nunokawa, M. 1993. Neighborhoods of certain analytic functions. *Appl. Math. Lett.*, 6(4): 73-77.

Owa, S., Yildirim, N., Kamali, M. 2006. On neighborhoods of analytic functions having positive real part. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(3): 109.

Palka, B.P. 1991. An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag, New York, 560 pp.

Ponnusamy, S., Silverman, H. 2006. Complex Variables with Applications. Birkhauser, Boston, 513 pp.

Ravichandran, V., Verma, S. 2015. Bound for the fifth coefficient of certain starlike functions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 353(1): 505-510.

Riemann, B. 1851. Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Functionen einer ver anderlichen complexen Grosse. Göttingen.

Robertson, M.S. 1936. On the Theory of Univalent Functions. *Ann. of Math*., 37: 374-408.

Shaffer, D.B. 1973. Distortion theorems for a special class of analytic functions. *American Mathematical Society*, 39(2): 281-287.

Tepper, D.E. 1970. On the Radius of Convexity and Boundary Distortion of Schlicht Functions. *American Mathematical Society*, 150: 519-528.

Walker, J.B. 1990. A note on neighborhoods of analytic functions having positive real part. *Internat. J. Math & Math Sci.*, 13(3): 425-430.

Zill, D.G., Shanahan, P.D. 2003. A First Course in Complex Analysis. Jones and Barlett Publishers, Boston, 401 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Şükran KORKMAZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 05.04.1989
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Bursa Gazi Anadolu Lisesi, 2007
Lisans	: Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2011

İletişim	:korkmazzsukran@gmail.com