T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLUŞUM TÜRÜ DENKLEMLERİN SİMETRİ İNDİRGEMELERİ, KORUNUM KANUNLARI VE TAM ÇÖZÜMLERİ

İlker Burak GİRESUNLU

Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

(Danışman)

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2017

TEZ ONAYI

İlker Burak GİRESUNLU tarafından hazırlanan "Oluşum Türü Denklemlerin Simetri İndirgemeleri, Korunum Kanunları ve Tam Çözümleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy biriği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Üye: Prof. Dr. Filiz TAŞCAN — İmza
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Emrullah YAŞAR — İmza
Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Hüseyin OVALIOĞLU — İmza
Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Fizik Anabilim Dalı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nisa ÇELİK — İmza
Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sait SAN — İmza
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Ensititü Müdürü
12/12/2017

U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

08/12/2017

İmza

İlker Burak GİRESUNLU

ÖZET

Doktora Tezi

OLUŞUM TÜRÜ DENKLEMLERİN SİMETRİ İNDİRGEMELERİ,
KORUNUM KANUNLARI VE TAM ÇÖZÜMLERİ

İlker Burak GİRESUNLU

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Bu doktora tezinde, tam ve kesirli mertebeli oluşum türü denklemlerin simetri indirgemeleri, korunum kanunları ve tam çözümleri araştırılarak uygulamaları yapılmıştır.

Diferensiyel denklemlerin incelenmesinde oldukça önemli bir yere sahip olan Lie simetri grupları yöntemi varyant Boussinesq sistemine, Schamel-Korteweg-de Vries denklemine, Konopelchencho-Dubrovski sistemine, logaritmik KdV-benzeri ve logaritmik KP-benzeri denklemlerine ve zaman kesirli Schamel-Korteweg-de Vries denklemine uygulandı. Gözönüne alınan denklem veya sistemlerin simetri indirgemeleri, tam çözümleri ve korunum kanunlarına ulaşıldı. Bunun yanında tezde Lie nokta simetri ve korunum vektörleri arasındaki ilişkiler araştırıldı. Korunum vektörlerini sistematik olarak elde etmek için üç tip farklı yöntem ele alındı. Bunlar sırasıyla çarpan yöntemi, yerel olmayan korunum yöntemi ve eşlenik simetri yaklaşımıdır. Bu üç yöntem arasındaki ilişkiler tartışılarak logaritmik KdV-benzeri ve KP-benzeri denklemlerine uygulandı. Bununla birlikte elde edilen korunum kanunları ve elde edilen simetriler yardımıyla denklemin hem mertebesi hem de değişken sayısında indirgemeye olanak sağlayan "*çift indirgeme*" yöntemi kullanılarak kapalı çözüm formlarına ulaşıldı. Lie simetri grupları yönteminin kesirli mertebeli diferensiyel denklemlere uyarlanması ele alındı ve bu yeni yaklaşım kullanılarak zaman kesirli mertebeli Schamel-Korteweg-de Vries denkleminin Lie simetri grupları ve korunum kanunları elde edildi. Elde edilen simetri üreteçlerinin orijinal tam mertebeli denk- leme göre daha az üreteç kabul etmesine rağmen elde edilen simetri indirgemesinin özel integral operatörlerini içeren kesirli mertebeden adi diferensiyel denklemlere ulaşıldığı gözlemlendi. Lie simetri indirgemelerinin ilerleyen dalga tipindeki çözümlerine, bazı tam çözüm bulma algoritmaları kullanılarak ulaşıldı. Bu doktora tezinde elde edilen sonuçlar gözönüne alınan modellerin arkasındaki fiziksel olgunun açıklanmasında kullanılabilir. Bununla birlikte elde edilen tam çözümler kullanılarak sayısal simülasyonlar yapılabilir ve sayısal çözüm bulma şemalarında test fonksiyonu olarak kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler: Lie simetrileri, korunum kanunları, eşlenik denklem, eşlenik simetri, çarpan yöntemi, lineer olmayan kendi eşleniklik, çift indirgeme yöntemi, simetri indirgemeleri, özyineleme formülü.
2017, viii + 138 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

SYMMETRY REDUCTIONS, CONSERVATION LAWS AND EXACT SOLUTIONS OF THE EVOLUTION DIFFERENTIAL EQUATIONS

İlker Burak GİRESUNLU

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrullah YAŞAR

In this doctoral thesis, we study symmetry reductions, conservation laws and exact solutions of integer and fractional order evolution differential equations.

The Lie symmetry group method, which has a very important role in the study of the differential equations, is applied to variant Boussinesq system, Schamel-Korteweg-de Vries equation, Konopelchencho-Dubrovski system, logarithmic KdV-like and KP-like equations and time fractional Schamel-Korteweg-de Vries equation. The symmetry reductions, exact solutions and conservation laws of the considered equations or systems have been reached. In addition, relations between Lie point symmetry and conservation vectors were investigated. Three types of different methods have been dealt with in order to systematically obtain conservation laws. These are multiplier method, non-local conservation method and adjoint symmetry approaches respectively. Relations between these three methods are discussed and applied to KdV-like and KP-like equations with logarithmic structure. If the considered equation or system has relationship between symmetries and conservation laws one can construct closed solution forms exploiting by the ”double reduction” approach which allows the equation to be reduced both in the order and in the variable number. The adaptation of the Lie symmetry groups method to the fractional order differential equations was studied and the Lie symmetry groups and conservation laws of the time-fractional Schamel-Korteweg-de Vries equation were obtained. Though the obtained symmetry generators are less than the original integer-order equation, we have yield fractional order ordinary differential equation including special integral operators. In this thesis, traveling wave type solutions are reached by using some powerful algorithms. The results obtained in this thesis can be used to explain the physical phenomenas behind the models considered. Numerical simulations can be made using the exact solutions and can be used as test functions in numerical solution finding schemes.

Key Words: Lie symmetries, conservation laws, adjoint equation, adjoint symmetry, multiplier method, nonlinear self-adjointness, double reduction method, symmetry reductions, recursion formula.
2017, viii + 138 pages.

TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışmasının her aşamasında çok büyük sabır ve titizlik gösteren, çok değerli görüşlerinden faydalandığım, ilgisini asla ve asla üzerimden esirgemeyen, her konuda bana her zaman destek olan, zor dönemlerde bile benimle ilgilenen danışman hocam sayın Doç. Dr. Emrullah YAŞAR'a ve desteğini hep hissettiğim sayın Yrd. Doç. Dr. Elif YAŞAR hocama teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.

En zor dönemlerde bile yardımlarıyla beni destekleyen sayın Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ hocama teşekkür ederim.

Hayatımın her anında maddi manevi desteklerini, ilgilerini ve sevgilerini hissettiren ve her zaman yanımda olan abime, anneme ve babama sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İlker Burak GİRESUNLU

08/12/2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
div	Diverjans Operatörü
$\Gamma(z)$	Euler Gamma Fonksiyonu
$\frac{\delta}{\delta u}$	Euler-Lagrange Operatörü
∇	Gradient Operatörü
J	Jakobiyen Determinantı
$[,]$	Kamütatör Operatörü
$\mathcal{L}$	Lagrangian
N	Noether Operatörü
ξ, τ, η, ϕ	Sonsuz Küçükler
D	Total Türev Operatörü
V, X	Vektör Alanı

Kısaltmalar	**Açıklama**
ADD	Adi Diferensiyel Denklem
ADDS	Adi Diferensiyel Denklem Sistemi
KDD	Kısmi Diferensiyel Denklem
KDDS	Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemi
KdV	Korteweg-de Vries Denklemi
K-DS	Konopelchencho-Dubrovksi Sistemi
KMDD	Kesirli Mertebeli Diferensiyel Denklem
KP	Kadomtsev-Petriashvili Denklemi
OTDD	Oluşum Türü Diferensiyel Denklem
OTDDS	Oluşum Türü Diferensiyel Denklem Sistemi
R-L	Riemann-Liouville anlamında türev
S-KdV	Schamel Korteweg-de Vries Denklemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik ve doğa bilimlerinde, matematiksel modellemelerin oluşturulması, problemin çözümlerine ulaşabilmek için önemli bir yere sahiptir. Bu kapsamda lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin (veya sistemlerin) analitik çözümlerinin elde edilmesi matematikçiler için önemli konulardandır. Çoğunlukla fiziksel olayların matematiksel modellemesi diferensiyel denklemler ile ifade edilmektedir. Bu denklemlerin çözümlerinde kullanılmak üzere literatürde var olan birçok farklı yöntem geliştirilmiştir.

Diferensiyel denklemler ile ilgili ilk çalışmalar diferensiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra 17. yüzyılın sonlarında İngiliz bilim adamı Isaac Newton ve Alman bilim adamı Leibnitz tarafından yapılmıştır. 19. yüzyıldan itibaren kuvvet serileri ile çözüm yöntemleri, varlık teklik teoremi konularına önem verilmiştir. Belli tipteki diferensiyel denklemlerin, belirli şartlar altındaki çözümlerinin varlığının ispatı ilk olarak 1820-1830 yılları arasında Fransız matematikçi Cauchy tarafından yapılmıştır. 19. yüzyılın sonlarına doğru dönüşüm grupları teorisi Evariste Galois, Sophus Lie, Felix Klein, David Hilbert, Elie Cartan gibi birçok ünlü matematikçinin çalışma alanını oluşturmuştur. Bu konuda birçok gelişme adı geçen matematikçiler tarafından gerçekleştirilmiştir (Özceylan 2007, San 2011, Yakut 2012).

Norveçli matematikçi Sophus Lie, Galois'dan ilham alarak geometri ve diferensiyel denklemlerin integrasyon yöntemleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Gözönüne alınan diferensiyel denklemi -denklemin tanımlı olduğu manifold üzerinde- değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarını tanımlamıştır. Bu sayede diferensiyel denklemlerin çözümleri algoritmik yöntemler ile elde edilmiştir (Bluman ve Kumei 1989, Olver 1993, Ibragimov 2001). Ancak Sophus Lie'nin çalışmalarının önemi 1960'lı yıllara kadar anlaşılamamıştır. 1960'tan itibaren Lie grup teorisi diferensiyel denklemlere uygulanmaya başlanmıştır (Bluman ve Anco 2002, Ovsyannikov 1982).

Ovsyannikov, Bluman, Ibragimov ve Olver gibi bu alandaki önemli bilim adamları Lie grup teorisinin geliştirilmesinde, uygulanmasında öncülük etmişlerdir. Kuantum teorisi, sicim teorisi, hidrodinamik, elektrodinamik, istatistiksel mekanik ve tanecik fiziği gibi fizikteki birçok önemli alanda Lie grup teorisinin uygulamaları mevcuttur.

Son yıllarda diferensiyel denklemlerde simetri yöntemleri algoritmik yapısıyla denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde önemli rol oynar. Bu nedenle literatürdeki diğer teorilerden en önemli farklılığı, birçok yöntemin uygulamasında denklemlerin integrallenebilme koşulu veya bir takım kısıtlamalar gerekmemesidir. Ayrıca literatürde var olan tüm yöntemleri kapsayan bir genel yaklaşımdır. Bu farklılık sayesinde Lie grup teorisi son yıllardaki en popüler ve güçlü konulardandır.

Simetri grupları kullanılarak adi diferensiyel denklemlerin (ADD) mertebe düşürülmesi, kısmi diferensiyel denklemlerin (KDD) bağımsız değişken sayısının azaltılması ve ADD lere indirgenmesi yapılabilir.

Literatürde son zamanlarda Lie simetri üreteçlerinin katsayı fonksiyonlarının yapısına dayanarak Lie grup dönüşümleri nokta, kontakt, Bäcklund ve yerel olmayan simetriler olarak sınıflandırılmıştır. Bu bağlamda simetri üreteçlerinin katsayı fonksiyonlarının sadece bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren dönüşümlere *Lie nokta simetrisi* adı verilir. Nokta simetrilere ölçekleme, dönme ve öteleme dönüşümleri en bilinen örneklerdir. Eğer simetri üreteçlerinin katsayı fonksiyonları bağımlı ve bağımsız değişkenler haricinde birinci mertebeden türevli terimler içeriyorsa bu dönüşümlere *Lie kontakt simetri* denir. Diğer yandan simetri üreteçlerinin katsayı fonksiyonları bağımlı ve bağımsız değişkenler haricinde yüksek mertebeden türevli terimler içeriyorsa bu takdirde *Lie Bäcklund simetrisi* adını alırlar. *Yerel olmayan simetriler* ise simetri üretecinin katsayı fonksiyonlarının bazı integral terimlere sahip olması ile tanımlanır.

Korunum kanunları, diferensiyel denklemlerin incelenmesi, fiziksel özelliklerin çıkarılması, sınıflandırılması ve çözümlerinin araştırılmasında kısaca birçok alanda merkezi bir öneme sahiptir. Ayrıca kararlılık teorisinin incelenmesi, sayısal şemaların oluşturulması ve diferensiyel denklemlerin integrasyonu gibi birçok alanda kullanılabilirler (Yaşar 2009).

Literatürde korunum kanunlarının elde edilmesinde en etkili ve en temel yaklaşım Noether teoremidir (Noether 1918). Bu teorem sayesinde Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri için Lagrangian ile ilişkili olan her Noether simetrisine açıkça belirlenebilen bir korunum kanununun karşılık geldiği ifade edilmiştir. Dolayısıyla simetriler ile korunum kanunları arasında birebir bir ilişki kurulmuştur (Yaşar 2009).

Uygulamalı bilimler ve teorik fizikte en heyecan verici güncel gelişmelerden biri de lineer olmayan diferensiyel denklemler için tam çözüm bulmaya yönelik yöntemlerin geliştirilmesidir. Birçok matematiksel model lineer olmayan diferensiyel denklemler ile tanımlandığından bu durum oldukça önem arz etmektedir.

Ters saçılım dönüşümü (Gardner 1967) ve Hirota'nın (1971) "*doğrudan*" yöntemi diferensiyel denklemlerin çözümlerini araştırmak için bilinen başlıca ve etkili yöntemlerdir.

Son 30 yılda, lineer olmayan KDD'ler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Gardner ve arkadaşları (1974) KdV denklemi ve genelleştirmelerinin altı farklı yöntem ile tam çözümlerini elde etmişlerdir. Konno ve Wadati (1975) lineer olmayan OTDD'ler için ters yöntemin Riccati formundan Bäcklund dönüşümünü elde etmek için basit bir yöntem sunmuşlardır. Conte ve Musette (1989) Painleve testini, birçok ilginç sıvı hareketini modelleyen lineer olmayan Kuramoto-Sivashinsky denklemine uygulamışlardır. Malfliet ve Hereman (1996) $\tanh$ yönteminin özelleştirilmiş bir versiyonunu, bazı oluşum ve dalga denklemlerini çözmek için kullanmışlardır. Ma (2004) Wronskian çözümlerinden KdV denkleminin genelleştirilmiş Wronskian çözümlerine giden bir köprü oluşturmuştur. Kudryashov (2005) bazı lineer olmayan OTDD'lere en basit denklem yöntemini uygulayarak tam çözümlerini araştırmıştır. Wang ve arkadaşları (2008) KdV, mKdV, varyant Boussinesq denklemlerinin ve Hirota-Satsuma denklemlerinin (G'/G) genişleme yöntemi ile tam çözümlerini elde etmişlerdir.

Lineer olmayan oluşum denklemleri, yani bağımsız değişkenlerden biri t zaman olan kısmi diferansiyel denklemler, yalnızca birçok matematik alanında değil, aynı zamanda fizik, mekanik ve malzeme bilimleri gibi diğer bilim dallarında da ortaya çıkmaktadır. Akışkanlar mekaniğinde Navier-Stokes ve Euler denklemleri, ısı transferi ve biyolojik bilimlerde lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri, kuantum mekaniğinde Schrödinger denklemleri ve malzeme bilimlerinde Cahn-Hillard denklemleri lineer olmayan oluşum denklemlerine özel birkaç örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemlerinin lineer denklemlerdeki gibi genel bir teoriye sahip olmaması (çözümlerin lineer bağımsızlığı, süperpozisyonu, v.b.) birçok araştırmacının büyük ilgisini çekmiştir. Teorik çalışmada sorulması gereken ilk soru, verilen başlangıç koşullarına sahip lineer olmayan bir oluşum denklemi için yerel en az bir çözüm olup olmadığı ve gözönüne alınan sınıfta tek olup olmadığıdır. Genel olarak, bu problem lineer olmayan analizde iki güçlü yöntemle, yani daralma teoremi ve Leray-Schauder sabit nokta teoremi ile lineer olmayan oluşum denklemlerinin geniş bir sınıfı için incelenmiştir.

Bu çalışmanın amacı lineer olmayan oluşum türü denklemlerin (veya sistemlerin) Lie grup analizi ile simetrilerinin bulunması, korunum kanunlarının oluşturulması ve tam çözümlerinin elde edilmesidir. Bu bağlamda Lie grup teorisi, korunum kanunları ve bazı tam çözüm yöntemleri çalışılmıştır. Son 10 yıl içerisinde kesirli mertebeli denklemler yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Çünkü zaman kesirli mertebeden denklemlerin birçok fiziksel olayı daha iyi modellediği görülmüştür. Son yıllar içerisinde klasik Lie grup analizinin kesirli mertebeli denklemlere etkili bir şekilde uygulandığı gözlemlenmiştir (Sahadevan ve Bakkyaraj 2012, Wang ve ark. 2013, San 2016, Yaşar ve ark. 2016, Akbulut ve Taşcan 2017).

Tezin ikinci bölümünde Lie simetri analizi için gerekli temel kavramlar ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca Lie grup analizi zaman kesirli kısmi türevli mertebeli diferensiyel denklemlere uygulanmış halde verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde korunum kanunları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Çarpan yöntemi, varyasyonel yaklaşım, yeni korunum yöntemi, çift indirgeme yöntemi ve özyineleme formülü ifade edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde tam çözümlerin elde edilmesinde kullanılan literatürdeki en genel yöntemlerden genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, en basit denklem yöntemi ve $(G'/G, 1/G)$ genişleme yönteminin algoritmalarına yer verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde Varyant Boussinesq sistemi için Lie grup analizi yapılarak simetri indirgemeleri yapılmıştır. Ayrıca en basit denklem yöntemi ile tam çözümleri elde edilmiştir. Buna ek olarak sistemin korunum kanunları oluşturulmuştur.

Tezin altıncı bölümünde Schamel-Korteweg-de Vries denklemine Lie grup analizi uygulanarak simetrileri elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Kudryashov ve en basit denklem yöntemleri kullanılarak denklemin tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca denklem için çarpan yöntemi, yeni korunum yöntemi ile korunum kanunları oluşturulmuştur. Buna ek olarak elde edilen korunum kanunları kullanılarak çift indirgeme yöntemi ile tam çözümlere yer verilmiştir.

Tezin yedinci bölümünde Konopelchencho-Dubrovski sistemi ele alınarak $(G'/G, 1/G)$ genişleme yöntemi ile ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Çarpan yöntemi kullanılarak korunum kanunları oluşturulmuştur.

Tezin sekizinci bölümünde logaritmik KdV ve KP-benzeri denklemleri gözönüne alınmıştır. Bu denklemler için çarpan fonksiyonlar, eşlenik denklem ve lineer olmayan eşleniklik verilerek eşlenik simetriler bulunmuştur. Çift indirgeme yöntemi ile denklemin korunum kanunları kullanılarak çözümleri araştırılmıştır.

Tezin dokuzuncu bölümünde lineer olmayan kesirli mertebeli S-KdV denklemi için Lie simetri analizi incelenmiştir. Denklemin korunum kanunları formal Lagrangian kullanılarak oluşturulmuştur. Ayrıca lineer olmayan kendi eşleniklik ile denklemin korunum vektörleri elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde elde edilen sonuçlar sunularak gelecekte yapılması planlanan çalışma konularından bahsedilmiştir.

2. LİE GRUP ANALİZİ

Lie simetri (veya Lie simetrisi grubu), bir kısmi diferensiyel denklemin (KDD) Lie grup dönüşümleri altında değişmez kalması ile tanımlanır. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin tümünü içeren bu dönüşümler altında diferensiyel denklemi değişmez bırakan sonsuz küçük üreteçler ile ifade edilir. Bu sonsuz küçük üreteçler, KDD'lerin Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirini oluşturan bir bazın lineer birleşimidir. Bu baz ile değişmez çözümler elde edilir.

Bu bölümde genel olarak Lie simetrilerin temel özellikleri ve Lie simetrileri üzerinde durulacaktır. Teori, tam ve kesirli mertebeli uzay-zaman denklemleri için sunulacaktır. Bu bağlamda, Lie nokta üreteci, değişmezlik prensibi, diverjans prensibi gibi temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Teori, KDD için verilmesine rağmen kısmi diferensiyel denklem sistemleri (KDDS) için de benzer şekilde genelleştirilebilir.

Lie simetri analizinin uygulanması için Lie gruplarına ait temel kavramlar, teoremler ve özellikleri verilecektir.

2.1 Lie Grupları

Tanım 2.1.1 (Grup)

G boş olmayan bir küme ve $*$ sembolü G kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(G, *)$ ikilisine *grup* adı verilir.

Kapalılık Özelliği	**:**	$\forall f, g \in G$ için $f * g \in G$ dir.
Birleşme Özelliği	**:**	$\forall f, g, h \in G$ için $(f * g) * h = f * (g * h)$ dir.
Birim Elemanı Özelliği	**:**	$\forall f \in G$ için $f * e = e * f = f$ olacak biçimde bir tek $e \in G$ vardır.
Ters Eleman Özelliği	**:**	$\forall f \in G$ için $f * f^{-1} = f^{-1} * f = e$ olacak biçimde bir tek $f^{-1} \in G$ vardır.

Bu dört özelliğe ek olarak aşağıda verilen değişme özelliğine sahip $(G, *)$ grubuna *abelyen* *(değişmeli) grup* adı verilir. Yani;

Değişme Özelliği : $\forall f, g \in G$ için $f * g = g * f$ dir.

Tanım 2.1.2 (Dönüşüm Grupları)

x, $B \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin bir noktası olsun. $\varepsilon \in \mathbb{R}$ parametresine bağlı

$$\overline{x} = V(x; \varepsilon)$$

ile tanımlanan dönüşümleri ele alalım. $\theta(\varepsilon, \delta)$ dönüşümü, $P \subset \mathbb{R}$ bölgesindeki ε ve δ parametreleri ile tanımlı olsun. Bu durumda θ dönüşümü B bölgesinde aşağıdaki şartları sağlıyorsa *dönüşüm grubu* adını alır (Bluman ve Kumei 1989).

- Her bir $\varepsilon \in P$ için dönüşümler B bölgesinde birebirdir. Yani $\overline{x} \in B$ dir.
- P bölgesi θ dönüşümü ile yukarıda bahsedilen G grup yapısını sağlar.
- $\varepsilon = e$ ise $\overline{x} = x$ dir. Yani $V(x; \varepsilon) = x$ dir.
- $\overline{x} = V(x; \varepsilon)$ ve $\overline{\overline{x}} = V(\overline{x}; \delta)$ ise $\overline{\overline{x}} = V(x; \theta(\varepsilon, \delta))$ dir.

Şimdi dönüşüm grup aksiyomlarına ilave şartlar ekleyerek *Lie gruplarını* tanımlayalım.

Tanım 2.1.3 (Tek Parametreli Lie Grup Dönüşümleri)

Aşağıdaki özellikleri sağlayan dönüşüm gruplarına *tek parametreli Lie grup dönüşümü* adı verilir (Bluman ve Kumei 1989):

- ε sürekli bir parametre ise $\varepsilon = 0$ dir. Yani P bölgesi, $\mathbb{R}$ de bir aralık ise ε, e etkisiz elemana karşılık gelir.
- V, P bölgesinde ε parametresinin analitik fonksiyonudur ve x değişkenine göre B bölgesinde her mertebeden sürekli türevlere sahiptir.
- $\varepsilon, \delta \in P$ için $\theta(\varepsilon, \delta)$, ε ve δ parametrelerinin bir analitik fonksiyonudur.

Uyarı 2.1.4

ε parametresi yerine $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ parametreleri alınarak

$$\overline{x} = V(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$$

çok parametreli Lie grup dönüşümlerini tanımlamak mümkündür.

Tanım 2.1.5 (Sonsuz Küçük Dönüşümler)

ε parametreli

$$\overline{x} = V(x; \varepsilon) \tag{2.1.1}$$

Lie grup dönüşümü gözönüne alındığında, (2.1.1) dönüşümünün $\varepsilon = 0$ da seri açılımı

$$\begin{aligned} \overline{x} &= V(x; \varepsilon) \\ &= x + \varepsilon \left[\frac{\partial V(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] |_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 V(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right] |_{\varepsilon=0} + \ldots \\ &= x + \varepsilon \left[\frac{\partial V(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] |_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

olur. (2.1.2) açılımında ε parametresinin katsayı fonksiyonu

$$\xi(x) = \frac{\partial V(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} |_{\varepsilon=0}$$

ile ifade edilsin (hata terimleri gözardı edilmiştir).

$$\overline{x} = x + \varepsilon \xi(x)$$

dönüşümüne (2.1.1) ile verilen Lie grup dönüşümünün *sonsuz küçük dönüşümü* denir. $\xi(x)$ katsayı fonksiyonuna da *sonsuz küçük* adı verilir (Bluman ve Anco 2002).

Teorem 2.1.6 (Lie Birinci Temel Teoremi)

$\overline{x}(0) = x$ başlangıç değerli

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \xi(\overline{x})$$

birinci mertebeden adi diferensiyel denkleminin çözümü

$$\overline{x} = V(x;\varepsilon)$$

Lie grup dönüşümüne eşdeğer olacak şekilde $\tau(\varepsilon)$ parametrizasyonu ile yapılır.

Burada ε^{-1}, ε'un tersi olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tau(\varepsilon) &= \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon', \\
\tau(\varepsilon) &= \left(\frac{d}{db}\theta(a,b)\right)|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}, \\
\Gamma(0) &= 1
\end{aligned}$$

ifadeleri vardır.

Tanım 2.1.7 (Sonsuz Küçük Üreteçler)

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots\right)$ gradient operatörü ve $\xi^i(x) = (\xi^1(x), \xi^2(x), \ldots)$ sonsuz küçük olmak üzere

$$V = \xi^i(x)\nabla$$

veya

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

ile tanımlanan V operatörüne $\overline{x} = V(x;\varepsilon)$ tek parametreli Lie grup dönüşümünün *sonsuz küçük üreteci (simetrisi)* adı verilir. Burada ξ^i katsayı fonksiyonları

$$\xi^i(x) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0}$$

biçimindedir.

Teorem 2.1.8 (Bluman ve Anco 2002)

$\overline{x} = V(x;\varepsilon)$ tek parametreli Lie grup dönüşümleri için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= e^{\varepsilon V} x \\
&= \left(1 + \varepsilon V + \frac{\varepsilon^2}{2!} V^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} V^3 + \dots \right) x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} V^k x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^k &= V V^{k-1}, & k &= 1, 2, \dots \\
V^k F(x) &= V\left(V^{k-1} F(x)\right), & k &= 1, 2, \dots \\
V^0 F(x) &= F(x).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $F(x)$ fonksiyonu, her mertebeden sürekli türevlere sahip ise

$$F(\overline{x}) = F\left(e^{\varepsilon V} x\right) = e^{\varepsilon V} F(x)$$

olacaktır.

Örnek 2.1.9 (Bluman ve Anco 2002)

Aşağıdaki tek parametreli dönme dönüşümü

$$\overline{x} = xcos(\varepsilon) + ysin(\varepsilon),$$
$$\overline{y} = -xsin(\varepsilon) + ycos(\varepsilon)$$

gözönüne alındığında

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial \varepsilon} = -xsin(\varepsilon) + ycos(\varepsilon),$$
$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial \varepsilon} = -xcos(\varepsilon) - ysin(\varepsilon),$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (\xi_1(x,y), \xi_2(x,y)) \\ &= \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0}, \frac{\partial \overline{y}}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} \right) \\ &= (y, -x) \end{aligned}$$

sonsuz küçükleri elde edilir. Sonsuz küçüklere karşılık gelen üreteç ise

$$\begin{aligned} V =& \xi(x)\nabla \\ =& \sum_{i=1}^{2} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ =& \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \\ =& y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(e^{\varepsilon V}x, e^{\varepsilon V}y\right)$ olmak üzere

$$Vx = y\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial x}{\partial y} = y$$

$$V^2x = V(Vx) = y\frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial y}{\partial y} = -x$$

$$V^3x = V(V^2x) = y\frac{\partial(-x)}{\partial x} - x\frac{\partial(-x)}{\partial y} = -y$$

$$V^4x = V(V^3x) = y\frac{\partial(-y)}{\partial x} - x\frac{\partial(-y)}{\partial y} = x$$
$$\vdots$$

olur. Yukarıdaki ifadeleri genel olarak yazarsak $m = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$V^{4m}x = x, \quad V^{4m+1}x = y, \quad V^{4m+2}x = -x, \quad V^{4m+3}x = -y$$

olarak ifade edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\overline{x} = e^{\varepsilon V}x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}V^k x \\
&= x + \varepsilon y - \frac{\varepsilon^2}{2!}x - \frac{\varepsilon^3}{3!}y + \ldots \\
&= x\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \ldots\right) + y\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \ldots\right) \\
&= xcos(\varepsilon) - ysin(\varepsilon)
\end{aligned}$$

olduğu açıkça görülür.

Benzer işlemler y için yapılırsa

$$V y = y\frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial y}{\partial y} = -x,$$

$$V^2 y = y\frac{\partial(-x)}{\partial x} - x\frac{\partial(-x)}{\partial y} = -y,$$

$$V^3 y = y\frac{\partial(-y)}{\partial x} - x\frac{\partial(-y)}{\partial y} = x,$$

$$V^4 y = y\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial x}{\partial y} = y$$

olup $r = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$V^{4r} y = y, \qquad V^{4r+1} y = -x, \qquad V^{4r+2} y = -y, \qquad V^{4r+3} y = x$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\overline{y} = e^{\varepsilon V} y = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} V^k y \\
= & y - \varepsilon x - \frac{\varepsilon^2}{2!} y + \frac{\varepsilon^3}{3!} x + \ldots \\
= & -x\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \ldots\right) + y\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \ldots\right) \\
= & -x sin(\varepsilon) + y cos(\varepsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.10 (Total Türev)

$x = (x_i)$, $u = u(x)$ ve $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ olmak üzere *total türev operatörü*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{is} \frac{\partial}{\partial u_s} + \ldots + u_{ij_1, j_2, \ldots, j_n} \frac{\partial}{\partial u_{j_1, j_2, \ldots, j_n}} + \ldots \tag{2.1.3}$$

biçiminde ifade edilir (Bluman ve Kumei 1989).

Tanım 2.1.11 (Sonsuz Küçük Üretecin r. Uzanımı)

Tek parametreli

$$\begin{aligned} \overline{x} =& V(x, u; \varepsilon) \\ \overline{u} =& U(x, u; \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Lie grup dönüşümlerine ait

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.1.5}$$

sonsuz küçük üreteci için birinci uzanım

$$V^{(1)} = V + \zeta_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \zeta_0 =& \eta, \\ \zeta_i =& D_i(\eta) - \sum_{r=1}^{n} u_r D_i(\xi_r) \end{aligned}$$

dir. (2.1.5) üretecinin ikinci uzanımı

$$V^{(2)} = V^{(1)} + \zeta_i^j \frac{\partial}{\partial u_i^j} + \zeta_{ir}^j \frac{\partial}{\partial u_{ir}^j}$$

olup burada

$$\zeta_{ir}^j = D_r(\eta_i^j) - \sum_{r=1}^{n} u_{ir}^j D_r(\xi_i)$$

dir. İkiden daha büyük uzanımlar için ise

$$pr(V^r) - pr(V^{r-1}) = \sum_{i_1\ldots i_r} \zeta^j_{i_1\ldots i_r} \frac{\partial}{\partial u^j_{i_1\ldots i_r}}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla (2.1.5) sonsuz küçük üretecinin r. uzanımı

$$\begin{aligned} V^r =& \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_k(x,u,u_k)\frac{\partial}{\partial u_k} \\ &+ \ldots + \zeta_{i_1,\ldots i_r}(x,u,u_i,\ldots,u_{i_1\ldots i_r})\frac{\partial}{\partial u_{i_1\ldots i_r}} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

biçimindedir. Buradaki sonsuz küçük fonksiyonları

$$\begin{aligned} \zeta_k =& D_k(\eta) - \sum_{k=1}^{n} u_i D_k(\xi^i), \\ \zeta_{i_1\ldots i_r} =& D_{i_r}(\zeta_{i_1\ldots i_{r-1}}) - \sum_{s=1}^{n} u_{i_1\ldots i_{r-1}s} D_{i_r}(\xi^s) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.12 (KDD in Değişmezliği - Değişmezlik Prensibi)

$x = (x_i)$, n bağımsız değişken, $u = u(x)$ bağımlı değişken, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ve $u_{i_1 i_2\ldots i_r} = \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_r}}$ kısmi türevleri olmak üzere

$$E(x,u,u_i,\ldots,u_{i_1 i_2\ldots i_r}) = 0 \tag{2.1.8}$$

formundaki r. mertebeden KDD i ele alalım.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= V(x,u;\varepsilon), \\ \overline{u} &= U(x,u;\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

tek parametreli Lie grup dönüşümlerine karşılık gelen simetri üreteci

$$V = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.1.10}$$

olsun. Buna göre (2.1.9) tek parametreli Lie grup dönüşümü (2.1.8) denkleminin bir nokta simetrisi olması için gerek ve yeter şart

$$V^{(r)}E(x,u,u_i,\ldots,u_{i_1 i_2 \ldots i_r}) \mid_{(2.1.8)} = 0 \tag{2.1.11}$$

olmasıdır (Olver 1991).

Uyarı 2.1.13

(2.1.11) kriterini uygularken dikkat edilmesi gereken kısım verilen (2.1.8) kısmi diferensiyel denklemin mertebesi ile (2.1.6) uzanımının aynı olma zorunluluğudur.

Lie grup üretecinin katsayıları olan ξ^i fonksiyonlarının değişkenlerine göre simetri dönüşümleri dört farklı gruba ayrılabilir: $n+1$ değişkenli uzay üzerinde;

Nokta Simetri :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

biçimindeki üreteçlere denir. Yani V üretecinin katsayıları sadece bağımsız ve bağımlı değişkenlere bağlı fonksiyonlardır.

Kontakt Simetri :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u,u_i)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u,u_i)\frac{\partial}{\partial u}$$

biçimindeki üreteçlere denir. Yani V üretecinin katsayıları bağımsız ve bağımlı değişkenlerin yanında birinci mertebeden türevleri de içeren fonksiyonlardır.

Bäcklund Simetri : V üretecinin katsayıları bağımsız ve bağımlı değişkenlerin yanında yüksek mertebeden türevleri de içeren fonksiyonlar olduğu durumdur. Bir bakıma kontakt simetrilerin genişletilmiş halidir.

Yerel Olmayan (non-local) Simetri : V üretecinin katsayıları bağımsız ve bağımlı değişkenlerin yanında çözümü olmayan integralleri içeren fonksiyonlar olduğu durumdur.

Ancak bu tezde sadece Lie nokta simetriler ele alınmıştır.

2.2 Lie Cebiri

Her tek parametreli Lie grup dönüşümü, bir V sonsuz küçük simetri üretecine karşılık gelir. n parametreli Lie grup dönüşümlerinin n-boyutlu sonsuz küçük üreteçleri bir Lie cebirine karşılık gelir (Gilmore 1974, 2008). Lie cebiri günümüz matematiğinin gelişmiş cisimlerindendir.
$x = (x_i)$ olmak üzere

$$\overline{x_i} = x_i + \varepsilon \xi_i(x)$$

formundaki sonsuz küçük dönüşümler geometrik olarak

$$\xi(x) = (\xi_i(x))$$

tanjant vektörüyle ifade edilir. Dolayısıyla $\xi(x)$, verilen dönüşümlerin bir tek parametreli Lie grubunun *tanjant vektör cismi* adını alır. Tanjant vektör cismi birinci mertebeden lineer diferensiyel operatörler ile gösterilir (Kiraz 2007):

$$V = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Tanım 2.2.1 (Kamütatör)

V_i, n parametreli Lie grup dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük simetri üreteci ve

$i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ parametresine bağlı olarak verilsin. $V_i = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $V_j = \xi_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ herhangi iki simetri üreteci olmak üzere $[,]$ kamütatörü

$$[V_i, V_j] = V_iV_j - V_jV_i \tag{2.2.1}$$

ile tanımlanır.

Burada

$$V_iV_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{l=1}^{n} \xi_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}\right\}$$

formundadır.

Tanım 2.2.2 (n-boyutlu Lie cebiri)

K bir cisim ve L, K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. L vektör uzayı $[,]$ kamutatör işlemine göre kapalı ve aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise L ye n-boyutlu *Lie cebiri* adı verilir ve L_n ile gösterilir.

Antisimetri Özelliği	:	Her $V_i, V_j \in L_n$ için $[V_i, V_j] = -[V_j, V_i]$,
Bilineerlik Özelliği	:	Her $a, b \in K$ ve $V_i, V_j, V_k \in \mathcal{L}_n$ için
		$[V_i, aV_j + bV_k] = a[V_i, V_j] + b[V_i, V_k]$
		$[aV_i + bV_j, V_k] = a[V_i, V_k] + b[V_j, V_k]$,
Jacobi Özdeşliği	:	Her $V_i, V_j, V_k \in \mathcal{L}_n$ için
		$[V_i, [V_j, V_k]] + [V_j, [V_k, V_i]] + [V_k, [V_i, V_j]] = 0.$

Uyarı 2.2.3

Yukarıdaki antisimetri özelliğinden her $V_i \in L_n$ için $[V_i, V_i] = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 2.2.4

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, parametrelerine bağlı olan

$$\overline{x} = (xcos(\varepsilon_1) - ysin(\varepsilon_1))\, e^{\varepsilon_4} + \varepsilon_2$$
$$\overline{y} = (xsin(\varepsilon_1) + ycos(\varepsilon_1))\, e^{\varepsilon_4} + \varepsilon_3$$

Lie grup dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük simetri üreteçleri

$$V_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad V_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$V_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad V_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

olup V_1, V_2, V_3, V_4 üreteçlerinin bir kamütatör tablosunu oluşturalım:

$$[V_1, V_1] = V_1V_1 - V_1V_1 = 0,$$

$$[V_2, V_2] = V_2V_2 - V_2V_2 = 0$$

$$[V_3, V_3] = V_3V_3 - V_3V_3 = 0$$

$$[V_4, V_4] = V_4V_4 - V_4V_4 = 0$$

$$\begin{aligned}[V_1, V_2] &= V_1V_2 - V_2V_1 \\ &= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} = -V_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_1, V_3] &= V_1V_3 - V_3V_1 \\
&= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \\
&= V_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_1, V_4] &= V_1V_4 - V_4V_1 \\
&= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_2, V_3] &= V_2V_3 - V_3V_2 \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_2, V_4] &= V_2V_4 - V_4V_2 \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \\
&= V_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_3, V_4] &= V_3V_4 - V_4V_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \\
&= V_3.
\end{aligned}$$

Diğer yandan Lie parantezinin antisimetri özelliğinden dolayı

$$[V_2, V_1] = V_3, \qquad [V_3, V_1] = V_2, \qquad [V_4, V_1] = 0$$

$$[V_3, V_2] = 0, \qquad [V_4, V_2] = -V_2, \qquad [V_4, V_3] = -V_3$$

eşitlikleri vardır. Yukarıdaki hesaplamaları içeren kamütatör tablosu aşağıdaki gibidir:

Çizelge 2.2.1. V_i simetrilerinin Lie kamütatör tablosu

$[V_i, V_j]$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	$-V_3$	V_2	0
V_2	V_3	0	0	V_2
V_3	$-V_2$	0	0	V_3
V_4	0	$-V_2$	$-V_3$	0

2.3 Grup Değişmez Çözümlerinin Sınıflandırılması

Genel olarak $p > s$ bağımsız değişkenli diferensiyel denklem sisteminin G tam simetri grubu olsun. G grubunun her bir $s-$parametreli H alt grubuna grup değişmez çözümleri ailesi karşılık gelir. Ancak bazı alt gruplar sonsuz çoklukta olduğundan grup değişmez çözümlerin listelenmesi mümkün olmayabilir. Bu nedenle grup değişmez çözümlerin sınıflandırılmasında etkili ve sistematik bir yönteme ihtiyaç vardır. Bu da herbir diğer çözümün türetilebileceği grup değişmez çözümlerin bir *optimal sistem*i ile mümkündür. $g \in G$ ve $g \notin H$ koşulunu sağlayan elemanlar, bir H değişmez çözümünü bazı diğer grup değişmez çözümlere dönüştüreceğinden sadece çok ilişkili olmayan çözümler optimal sistemde listelenmelidir.

Önerme 2.3.1 (Olver 1993)

G, bir Δ diferensiyel denklem sisteminin simetri grubu ve $H \subset G$, $s-$parametreli alt grup olsun. Eğer $u = f(x)$, Δ ya bir $H-$değişmez çözüm ve $g \in G$ herhangi bir grup elemanı ise o zaman $u = \tilde{f}(x) = g\,f(x)$ fonksiyonu bir $\tilde{H}-$değişmez çözümdür. Burada $\tilde{H} = gHG^{-1}$, g altında H'a eşlenik alt gruptur.

Sonuç olarak, grup değişmez çözümlerin sınıflandırılması, eşlenik altında G tam simetri grubunun alt gruplarının sınıflandırılmasına eşdeğerdir. Dolayısıyla, bir Lie grubundaki $h \to ghg^{-1}$ eşlenik dönüşümü ayrıntılı olarak incelenmeli ve sonra asıl sınıflandırma sorununa dönülmelidir.

2.3.1 Adjoint temsil

G, bir Lie grubu olsun. $h \in G$ olmak üzere her $g \in G$ için $K_g(h) \equiv ghg^{-1}$ grup eşlemesi G üzerinde bir difeomorfizm belirtir. Ayrıca $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}$, $K_e = \mathbb{1}_G$ olduğundan K_g, kendi üzerinde G nin bir global grup hareketini belirler. Her bir K_g eşlenik dönüşümü, bir grup homomorfizmidir:

$$K_g(hh') = K_g(h)K_g(h').$$

$d\,K_g : TG\mid_h \to TG\mid_{K_g(h)}$ diferensiyeli vektör alanlarının sağ değişmezliğini korumak için kolayca görülür. Dolayısıyla G'nin Lie cebiri üzerinde bir lineer dönüşüm belirtir ve bu diferensiyel, *adjoint temsil* adını alır:

$$Ad\;g(v) \equiv d\,K_g(v), \quad v \in g \tag{2.3.1}$$

Ayrıca adjoint temsilin, g üzerinde G'nin bir global lineer hareketini belirttiği unutulmamalıdır:

$$Ad(gg') = Ad\;g \circ Ad\;g', \quad Ad\;e = \mathbb{1}.$$

Eğer $v \in g$ tek parametreli $H = \{\exp(\epsilon v) : \epsilon \in \mathbb{R}\}$ alt grubunu üretirse o zaman $Ad\ g(v)$ nin $K_g(H) = gHg^{-1}$ tek parametreli eşlenik alt grubu ürettiği kolaylıkla görülebilir. Bu nedenle yüksek boyutlu alt gruplara genelleştirilebilir.

Önerme 2.3.2 (Olver 1993)

H ve $\tilde{H}$, G deki g Lie cebirinin h ve $\tilde{h}$ Lie alt cebirlerine karşılık gelen $s-$parametreli Lie alt grupları olsun. O zaman $\tilde{H} = gHg^{-1}$ eşlenik alt grupları olması için gerek ve yeter şart $\tilde{h} = Ad\ g(h)$ eşlenik alt cebirler olmasıdır.

Bir Lie cebiri üzerindeki bir Lie grubunun adjoint temsili, onun sonsuz küçük üreteçlerinden kolaylıkla oluşturulabilir. Eğer v, $\{\exp(\epsilon v)\}$ tek parametreli alt grubunu üretirse o zaman

$$ad\ v\ |_w \equiv \frac{d}{d\epsilon}\ |_{\epsilon=0}\ Ad(\exp(\epsilon v))w, \quad w \in g \tag{2.3.2}$$

adjoint dönüşümlerine karşılık gelen tek parametreli grubunu üreten g'deki vektör alanıdır.

Önerme 2.3.3 (Olver 1993)

G, g Lie cebirli bir Lie grubu olsun. Her $v \in g$ için $w \in g$ deki $ad\ v$ adjoint vektörü

$$ad\ v\ |_w = [w, v] = -[v, w] \tag{2.3.3}$$

biçiminde tanımlanır.

$g \subset gl(n)$ Lie cebirli $G \subset GL(n)$, bir Lie grup matrisi olduğunda yukarıdaki ifadeler kolaylıkla görülebilir. $A, B \in G$, $n \times n$ tipinde matris olmak üzere $K_A(B) = ABA^{-1}$ olduğunda, adjoint dönüşüm

$$Ad\ A(X) = AXA^{-1}, \quad A \in G, \quad X \in g$$

eşleniği ile verilir.

$Y \in g$ olmak üzere $A = e^{\epsilon Y}$ ve ϵ a göre türevler için

$$
\begin{aligned}
ad\, Y \mid_X &= YX - XY \\
&= [X, Y]
\end{aligned}
$$

ifadesi $gl(n)$ üzerinde kamütatör parantezine karşılık gelir.

Bunun tersine, g Lie cebirinin kendi üzerindeki sonsuz küçük adjoint hareketi biliniyorsa, $w(\epsilon) = Ad(\exp(\epsilon v))w_0$ çözümlü

$$
\frac{dw}{d\epsilon} = ad\, v \mid_w, \quad w(0) = w_0 \tag{2.3.4}
$$

ADDS integre edilerek G Lie grubu altında yatan $Ad\, G$ adjoint temsil yeniden oluşturulabilir. Ya da Lie serilerinin toplamı ile de daha basit olarak oluşturulabilir:

$$
\begin{aligned}
Ad(\exp(\epsilon v))w_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!}(ad\, v)^n(w_0) \\
&= w_0 - [v, w_0] + \frac{1}{2}\epsilon^2[v, [v, w_0]] - \dots
\end{aligned} \tag{2.3.5}
$$

(2.3.4) ün ADD lerin bir lineer sistemi olduğu ve (2.3.5) in buna karşılık gelen üstel matris olduğu kolaylıkla görülebilir.

2.3.2 Alt grup ve alt cebirlerin sınıflandırılması

Tanım 2.3.4 (Olver 1993)

G bir Lie grubu olsun. $s-$parametreli alt grupların optimal sistemi, eşlenik denk olmayan $s-$parametreli alt grupların listesi olmasıdır. Bu sistemin özelliği herhangi bir alt grubun listedeki bir alt gruba tam olarak eşlenik olması özelliği olmasıdır. Benzer şekilde g nin her bir $s-$parametreli alt cebiri, adjoint temsilin bazı elemanları altında listenin bir tek elemanına denk olduğundan $s-$parametreli alt cebirlerin bir listesi, optimal sistemi oluşturur.

Uyarı 2.3.5

Önerme 2.3.2, alt grupların optimal sistemini bulma ile alt cebirlerin optimal sisteminin bulunmasının eşdeğer olduğunu ifade eder.

2.3.3 Grup değişmez çözümlerin sınıflandırılması

Tanım 2.3.6 (Olver 1993)

Bir diferensiyel denklem sistemine karşılık gelen $s-$parametreli grup değişmez çözümlerin optimal sistemi, aşağıdaki özelliklerle $u = f(x)$ çözümlerin toplamıdır.

i) Listedeki her çözüm, diferensiyel denklem sisteminin bazı $s-$parametreli simetri grubu altında değişmezdir.
ii) $u = f(x)$, $s-$parametreli simetri grubu altındaki diğer bir değişmez çözüm olduğunda liste üzerinde $\tilde{f}$'yi $f = g\tilde{f}$ çözümüne resmeden sistemin başka bir g simetrisi vardır.

Önerme 2.3.7 (Olver 1993)

G, bir Δ diferensiyel denklem sisteminin tam simetri grubu ve $\{H_\alpha\}$, G nin $s-$parametreli alt gruplarının bir optimal sistemi olsun. O zaman tüm $H_\alpha-$değişmez çözümlerinin birleşimi, optimal sistemdeki H_α için Δ ya $s-$parametreli grup değişmez çözümlerin bir optimal sistemidir.

2.4 Kesirli Mertebeli Simetriler

Son zamanlarda kesirli mertebeli diferensiyel denklemler (KMDD), başta fizik olmak üzere mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi çeşitli bilim dallarındaki karmaşık lineer olmayan olguları tam olarak modellerdikleri için yoğun ilgi görmektedir (Hilfer 2000, Kilbas ve ark. 2006). Bu nedenle KMDD ler için analitik çözümlerin araştırılması son derece önemlidir. Bilindiği gibi Lie simetri analizi diferensiyel denklemlerin çözümlerini oluşturmak için güçlü ve doğrudan bir yaklaşımdır. Son on yılda, Lie simetri teorisi ve diferensiyel denklemlere uygulanması üzerine yoğun araştırmalar yapılmıştır. Bununla birlikte Gazizov ve ark. (2007) KMDD lerin simetri analizi için Lie simetri yöntemini ele alıp kesirli türevler için uzanım formüllerini ifade etmişlerdir. Literatürde bazı zaman kesirli denklemlere Lie simetri analizi bu yaklaşım kullanılarak uygulanmıştır (Gazizov ve ark. 2009, Sahadevan ve Bakkyaraj 2012, Wang ve ark. 2013, Huang ve Zhdanov 2014, Lukashchuk 2015). Bir KMDD in belirleyici denklemi tam ve kesirli mertebeli sonsuz diferensiyel denklemler içerdiği için bir KMDD için Lie simetrileri elde etmek, karşılık gelen tam mertebeli diferensiyel denkleme göre daha karmaşıktır. Bu alt kısımda KMDD için Lie simetri teorisi verilecektir.

(t, x) bağımsız değişkenler ve $u = u(t, x)$ bağımlı değişken olmak üzere

$$F(t, x, u, \partial_t^\alpha u, \partial_x^\beta u, u_{2x}, \ldots, u_{rx}) = 0 \tag{2.4.1}$$

$(1 + 1)$-boyutlu uzay-zaman KMDD'i gözönüne alınacaktır. Buradaki alt indisler kısmi türevleri ve kesirli türevler ise aşağıda tanımlanacak Riemann-Liouville anlamındadır.

Tanım 2.4.1 (Riemann-Liouville (R-L) anlamında kesirli türev)

Herhangi bir $u(t, x)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ olmak üzere R-L anlamındaki kesirli türev

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u =& \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \\ =& \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \int\limits_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s,x) ds & , \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\partial^n u}{\partial t^n} & , \qquad \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır (Podlubny 1999, Singla ve Gupta 2016). Buradaki Γ fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

ile verilip standart *Euler gamma fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.2

(2.4.1) denkleminin (2.1.5) formunda bir Lie nokta üretecini kabul ettiğini varsayalım, öyle ki uzatılmış üreteç

$$X^{(\alpha,\beta;r)} = X + \zeta^{(\alpha;t)}\partial_{\partial_t^\alpha u} + \zeta^{(\beta;x)}\partial_{\partial_x^\beta u} + \zeta^{2x}\partial_{u_{2x}} + \ldots + \zeta^{rx}\partial_{u_{rx}} \tag{2.4.2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada r, (2.4.1) denkleminin mertebesini ifade eder. ζ^{jx} fonksiyonları, j. mertebeden uzatılmış fonksiyonlarını (2.1.7) biçiminde ve $\left(\zeta^{(\alpha;t)}, \zeta^{(\beta;x)}\right)$ ise

$$\zeta^{(\alpha;t)} = D_t^\alpha(\eta) + \xi^x D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi^x u_x) + D_t^\alpha\left(uD_t(\xi^t)\right) - D_t^{\alpha+1}(\xi^t u) + \xi^t D_t^{\alpha+1}(u), \tag{2.4.3}$$

$$\zeta^{(\beta;x)} = D_x^\beta(\eta) + \xi^t D_x^\beta(u_t) - D_x^\beta(\xi^t u_t) + D_x^\beta\left(uD_x(\xi^x)\right) - D_x^{\beta+1}(\xi^x u) + \xi^x D_x^{\beta+1}(u),$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca D_t, D_x total türev operatörleri (2.1.3) ifadesindeki gibidir.

Genelleştirilmiş Leibnitz kuralı $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$ olmak üzere

$$D_t^\alpha(uv) = \sum_{k=0}^\infty \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} D_t^{\alpha-k}(u)D_t^k(v), \tag{2.4.4}$$

ve zincir kuralı (Osler 1970, Podlubny 1999)

$$\frac{d^m f(x(t))}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right) \frac{1}{k!} \left[-x(t)\right]^n \frac{d^m}{dt^m} \left[x(t)^{k-n}\right] \frac{d^k f(x)}{x^k} \tag{2.4.5}$$

gözönüne alınarak (2.4.3) uzanım fonksiyonu aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} \zeta^{(\beta;x)} =& \partial_x^\beta \eta + (\eta_u - \beta D_x(\xi^x))\partial_x^\beta u - u\partial_x^\beta \eta_u \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(\begin{array}{c} \beta \\ r \end{array} \right) \partial_x^r \eta_u - \left(\begin{array}{c} \beta \\ r+1 \end{array} \right) D_x^{r+1}(\xi^x) \right] D_x^{\beta-r}(u) \\ &- \sum_{r=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \beta \\ r \end{array} \right) D_x^r(\xi^t) D_x^{\beta-r}(u_t) + \mu_\beta. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Buradaki μ_β terimleri

$$\begin{aligned} \mu_\beta =& \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{r} \sum_{k=2}^{m} \sum_{n=0}^{k-1} \left[\begin{array}{c} \beta \\ r \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} r \\ m \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right] \frac{1}{k!} \frac{x^{r-\beta}}{\Gamma(r-\beta+1)} \\ & \times (-u)^n \frac{\partial^m}{\partial x^m} u^{k-n} \frac{\partial^{r-m+k}\eta}{\partial x^{r-m} \partial u^k} \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

dir. Benzer şekilde $\eta^{(\alpha;t)}$ için de (2.4.3) uzanım fonksiyonu

$$\begin{aligned} \zeta^{(\alpha;t)} =& \partial_t^\alpha \eta + (\eta_u - \alpha D_t(\xi^t))\partial_t^\alpha u - u\partial_t^\alpha \eta_u \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(\begin{array}{c} \alpha \\ r \end{array} \right) \partial_t^r \eta_u - \left(\begin{array}{c} \alpha \\ r+1 \end{array} \right) D_t^{r+1}(\xi^t) \right] D_t^{\alpha-r}(u) \\ &- \sum_{r=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ r \end{array} \right) D_t^r(\xi^x) D_t^{\alpha-r}(u_x) + \mu_\alpha. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

olup μ_α terimleri

$$\mu_\alpha = \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{r}\sum_{k=2}^{m}\sum_{n=0}^{k-1}\begin{bmatrix}\alpha\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\ m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ n\end{bmatrix}\frac{1}{k!}\frac{t^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} \times (-u)^n\frac{\partial^m}{\partial t^m}u^{k-n}\frac{\partial^{r-m+k}\eta}{\partial t^{r-m}\partial u^k} \tag{2.4.9}$$

dir.

Tanım 2.4.3 (KMDD için Değişmezlik Prensibi)

(2.4.1) denklemi için *değişmezlik prensibi*

$$X^{(\alpha,\beta;r)}(F)\mid_{F=0} = 0 \tag{2.4.10}$$

biçiminde tanımlanır.

Buradan hareketle uzay-zaman KMDD lerin simetri analizi bu yaklaşım kullanılarak kolayca araştırılabilir.

3. KORUNUM KANUNLARI

Korunum kanunları, gözönüne alınan fiziksel modelin enerji, momentum, kütle korunumu gibi temel özelliklerinin elde edilmesinde yaygın bir kullanıma sahiptir. KDD in çok sayıdaki korunum kanununun varlığı, integrallenebilmesinin güçlü bir göstergesidir. Özellikle varlık, teklik, kararlılık analizi ve nümerik şemaların analizinde uygulanır. Bunun yanında gözönüne alınan sisteme karşılık gelen yerel olmayan sistemlerin elde edilmesi ve tam çözümlerin oluşturulmasında da kullanılır.

Bu bölümde öncelikle korunum kanunlarının temel bağıntıları verilecektir. Sonrasında ise çarpan yöntemi ile varyasyonel yaklaşım, Ibragimov'un yeni korunum teoremi (2007), çift indirgeme yönteminden bahsedilecektir.

3.1 Temel Bağıntılar

Bu bölümde $(x_1, x_2) = (t, x)$ bağımsız değişkenleri, $u = u(t, x)$ bağımlı değişkeni ve $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ kısmi türevleri temsil edecektir. Burada A^n, n. mertebeden diferensiyel fonksiyonlar kümesidir.

(2.1.8) denklemi için $T = (T^1, T^2, \dots, T^n) \in \mathcal{A}^n$ korunum vektörleri

$$D_i T^i \mid_{(2.1.6)} = 0 \tag{3.1.1}$$

diverjans ifadesi ile tanımlanır.

Tanım 3.1.1 (Varyasyonel Türev)

Euler-Lagrange operatörü,

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s \geq 1} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}} \tag{3.1.2}$$

biçiminde olup u nun türevlerine göre Euler-Lagrange operatörü

$$\frac{\delta}{\delta u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{s\geq 1}(-1)^s D_{j_1}\dots D_{j_s}\frac{\partial}{\partial u_{ij_1\dots j_s}}$$

dir. Ayrıca $\frac{\delta}{\delta u}$ ifadesine *varyasyonel türev* adı da verilir.

Tanım 3.1.2 (Euler-Lagrange Denklemi)

Lagrangian fonksiyonu

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, u_1, \dots, u_{ij}) \tag{3.1.3}$$

olmak üzere

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} = 0 \tag{3.1.4}$$

ifadesine *Euler-Lagrange denklemi* adı verilir (Ibragimov 1993).

$$W = \eta - \xi^t u_t - \xi^x u_x \tag{3.1.5}$$

karakteristik fonksiyonu olmak üzere (2.1.7) uzanım katsayılarıyla birlikte (2.1.5) X üretecinin karakteristik formu

$$X = \xi^t\frac{\partial}{\partial t} + \xi^x\frac{\partial}{\partial x} + W\frac{\partial}{\partial u} + D_i(W)\frac{\partial}{\partial u_i} + D_iD_j(W)\frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \dots \tag{3.1.6}$$

biçiminde ifade edilir.

N^i Noether operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$N^i = \xi^i + W\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{s\geq 1} D_{i_1}\dots D_{i_s}(W)\frac{\delta}{\delta u_{ii_1\dots i_s}}. \tag{3.1.7}$$

Teorem 3.1.3 (Noether Özdeşliği)

(3.1.2) Euler-Lagrange operatörü, (3.1.6) karakteristik formlu üreteci ve (3.1.7) operatörleri arasındaki ilişki aşağıdaki ifade ile verilir:

$$X + D_i(\xi^i) = W\frac{\delta}{\delta u} + D_i(N_i) \tag{3.1.8}$$

(3.1.8) eşitliğine *Noether özdeşliği* adı verilir (Ibragimov 1993).

Alman matematikçi Noether (1918) ele alınan sistemin şayet Euler-Lagrange denklemi ise, tüm korunum kanunlarının, sistemin kabul ettiği simetri özelliklerinden oluşturulduğunu görmüştür. Örnek olarak varyasyonel integralin uzayda öteleme altında lineer momentumun değişmez kalmasını, zaman altında Euler-Lagrange denklemleri için enerjinin değişmez kalmasını ve rotasyonel dönüşüm grubuna sahip üreteç altında açısal momentumun değişmez kalacağını göstermiştir.

Buradan hareketle korunum vektörleri ile sistemin üreteçleri arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 3.1.4

$\mathcal{L}$ Lagrangian olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{L} dx \tag{3.1.9}$$

varyasyonel integralinin değişmezliği (2.1.5) üreteci için aşağıdaki sonsuz küçük testi ile sağlanır:

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} D_i(\xi^i) = 0 \tag{3.1.10}$$

Teorem 3.1.5

(3.1.9) varyasyonel integrali, (2.1.5) üretecine sahip olan grup altında değişmez ise

$$T^i = N^i(\mathcal{L}) \tag{3.1.11}$$

biçiminde tanımlanan T vektörü (3.1.4) Euler-Lagrange denklemi için korunum vektörüdür.

Uyarı 3.1.6

Açıkça görülebilir ki, korunum vektörlerinin lineer birleşimleri de yine bir korunum vektörünü verir. Ayrıca (3.1.4) denkleminin çözümleri üzerinde sıfır olan her bir vektör (3.1.4) denklemi için bir aşikar korunum vektörüdür.

Diferensiyel denklemler için iki çeşit aşikar korunum kanunu vardır. İlki (3.1.1)'deki denklemin tüm çözümlerini sağlayan $n-$li $T = (T^i)$ aşikar korunum kanunudur. Örneğin;

$$\begin{aligned} v_x &= u, \\ v_t &= \left(\frac{1}{u}\right)_x + cxu, \quad c > 0 \end{aligned}$$

sistemi için

$$\begin{aligned} &D_t\left(\sqrt{c}u\cos(\sqrt{c}v)[v_x - u]\right) \\ &+ D_x\left(c\sin(\sqrt{c}v)[v_x - u] + \sqrt{c}u\cos(\sqrt{c}v)\left[cxu - \frac{1}{u^3}u_x v_x - v_t\right]\right) = 0 \end{aligned}$$

formundaki korunum kanunu birinci çeşit aşikar korunum kanunudur. Burada sistem total türevde yerine yazıldığında total türevin içi sıfır olduğu için eşitlik sağlanır. İkinci çeşit aşikar korunum korunum kanunlarında ise diverjans ifadesi diferensiyel denklemin sadece çözümleri için değil keyfi fonksiyonlar için de sağlanır. Örneğin;

$$D_t(u_x) + D_x(-u_t) = 0$$

ifadesi $u = g(t, x)$ gibi keyfi düzgün fonksiyon için sağlanır.

(3.1.9) varyasyonel integralin değişmez olması, (3.1.4) Euler-Lagrange denkleminin X üreteçli bir G grubunu kabul ettiğini gösterir. Dolayısıyla Noether teoreminin uygulanması için öncelikle (2.1.8) denkleminin kabul ettiği X üreteçleri elde edilmelidir. Daha sonra (3.1.9) Noether özdeşliğinden (2.1.8) denkleminin (2.1.5) biçimindeki üreteçleri ile (3.1.7) operatörlerinin ilişkili olan üreteçleri seçilmelidir.

(3.1.9) varyasyonel integralin değişmezliği, (3.1.4) Euler-Lagrange denkleminin değişmez olması için yeterlidir, ancak gerekli değildir. Yani herhangi bir vektör alanının diverjansı Lagrangiana eklenirse Euler-Lagrange denklemi yine değişmez kalacaktır.

Lemma 3.1.7

$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ve $u = u(x)$ olsun. $f(x, u, u_1, \ldots, u_r) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, $H = (h^1, \ldots, h^n)$ vektör alanının diverjansıdır. Bu takdirde

$$\frac{\delta f}{\delta u} = 0 \tag{3.1.12}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$f = divH = D_i(h^i) \tag{3.1.13}$$

olmasıdır.

Dolayısıyla aynı grup parametreli keyfi bir $B = (B^i)$ vektör alanının diverjansı (3.1.9) varyasyonel integralin değişmezliği şartında $\mathcal{L}$ Lagrangiana eklenebilir. Bu durumda (3.1.10) yeniden yazılırsa

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L}D_i(\xi^i) = D_i(B^i) \tag{3.1.14}$$

olur. Dolayısıyla (3.1.4) Euler-Lagrange denklemi değişmezdir ve $D_i(T^i) = 0$ korunum kanununa sahiptir. (3.1.14) eşitliğinin sağına eklenen $D_i(B^i)$ terimi ile (3.1.11) korunum vektörü elde etme formülü

$$T^i = \xi^i \mathcal{L} + W\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} - B^i \tag{3.1.15}$$

olarak yenilenir.

Yüksek mertebeden $\mathcal{L}$ Lagrangianlı $\int\limits_{\Omega} \mathcal{L}$ varyasyonel integrali, (2.1.5) üretecine sahip bir G grubunun altında değişmez olması durumunda (3.1.15) ifadesi Euler-Lagrange denklemi için korunum kanununu verir. Yani, (3.1.7) ve (3.1.11) ifadeleri (3.1.15) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} T^i =& \mathcal{L}\xi^i + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}}\right) + D_jD_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right) - \ldots\right] \\ &+ D_j(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right) + \ldots\right] \\ &+ D_jD_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} - \ldots\right] + \ldots \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

elde edilir. Örneğin üçüncü mertebeden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, u_1, u_2, u_3)$ Lagrangianı için, sırasıyla, (3.1.4) Euler-Lagrange denklemi ve (3.1.16) korunum vektörü sırasıyla

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}\right) + D_iD_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ik}}\right) - D_iD_jD_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} T^i =& \mathcal{L}\xi^i + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}}\right) + D_jD_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right)\right] \\ &+ D_j(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right)\right] \\ &+ D_jD_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right] \end{aligned}$$

olacaktır.

3.2 Çarpan (Karakteristik) Yöntemi ve Varyasyonel Yaklaşım

Çarpan yöntemi, Lie simetri teorisi ile ilgili değildir. İlk olarak Steudel (1962) tarafından oluşturulan çarpan yöntemi geliştirilerek teorik yapısı oluşturulmuştur (Olver 1993, Anco ve Bluman 2002).

Çarpan yöntemi kullanılarak T^i korunum vektörlerinin total türevi, (2.1.8) denkleminin bir Λ fonksiyonu katı biçiminde

$$divT^i = D_i(T^i) = \Lambda E \tag{3.2.1}$$

yazılmıştır. Bu yazılıma *karakteristik formu* adı verilir. Ayrıca $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_i)$ fonksiyonlarına da *çarpanlar (karakteristikler)* denir. Yani Λ çarpanları (2.1.8) denklemini tam hale getiren fonksiyonlardır.

Teorem 3.2.1

(2.1.8) normal ve tamamen bozulmamış diferensiyel denklem olsun. T ve $\tilde{T}$, Λ ve $\tilde{\Lambda}$ çarpanlarıyla belirlenen korunum kanunları olsun. O zaman T ve $\tilde{T}$ denk korunum kanunları olması için gerek ve yeter şart Λ ve $\tilde{\Lambda}$ denk çarpanlar olmasıdır.

Açıkcası bu teorem ile (3.2.1) karakteristik formundaki bir korunum kanununun aşikar olması ile Λ karakteristiğinin aşikar olmasının eşdeğer olduğunu ifade eder.

Şimdi Λ çarpan fonksiyonlarının nasıl hesaplanacağını verelim. (3.2.1) ifadesindeki Λ çarpanları için belirleyici denklem (3.2.1) karakteristik formunun varyasyonel türevi alınarak

$$\frac{\delta(\Lambda E)}{\delta u} = 0 \tag{3.2.2}$$

bulunur (Olver 2000). (3.2.2) *belirleyici denklemi orijinal denklemin çözüm uzayında değil, keyfi $u = u(x_i)$ fonksiyonları için geçerlidir.* (3.2.2) belirleyici denkleminde bağımlı değişkenin türev çeşitlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek belirleyici denklem sistemi elde edilir. Bu belirleyici denklem sisteminin çözümlerine karşılık Λ çarpan fonksiyonları elde edilir. Elde edilen herbir Λ çarpanı ile bu çarpana karşılık gelen korunum vektörleri uyumludur.

Bu yöntemin uygulanışı uzun ve karmaşıktır. Bu nedenle düşük mertebeli ve az terimli diferensiyel denklemler için uygulanması kolay olabilir. Ancak yüksek mertebeden veya çok terimli diferensiyel denklemler için pek kullanışlı bir yöntem değildir. Bundan dolayı Cheviakov (2007), Λ çarpan fonksiyonlarını hesaplayan GeM adlı alt programını MAPLE paket programı ile literatüre kazandırmıştır.

3.3 Eşlenik Denklem ve Eşlenik Simetri

Herhangi bir L lineer diferensiyel operatörüne $div(P) = D_i(P)$ olmak üzere her bir u, v için

$$vL[u] - uL^*[v] = div(P) \tag{3.3.1}$$

olcak şekilde bir L^* eşlenik operatörü karşılık gelir. Burada $P = (p^1, p^2, \dots, p^n)$ vektör alanıdır. Ayrıca $L^*[v] = 0$ denklemine, $L[u] = 0$ denkleminin *eşlenik denklemi* adı verilir. Ayrıca herhangi bir $v = u$ için

$$L^*[u] = L[u]$$

oluyorsa L operatörüne *kendine eşlenik*tir adı verilir.

Örneğin,

$$L[u] = a^{ij}(x)D_iD_j(u) + b^i(x)D_i(u) + c(x)u$$

biçiminde tanımlanan ikinci mertebeden L operatörüne karşılık L^* eşlenik operatörü

(3.3.1) ifadesinden

$$L^* = D_iD_j\left(a^{ij}(x)v\right) - D_j\left(b^i(x)v\right) + c(x)v$$

olarak elde edilir. Ayrıca L^* eşlenik operatöründe

$$b^i(x) = D_j(a^{ij}(x)), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

olması durumunda L kendine eşleniktir (Yaşar 2009).

Tanım 3.3.1

$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bağımsız, $u = u(x)$ bağımlı değişkenleri ve u'nun kısmi türevleri ile birlikte (2.1.8) r. mertebeden bir diferensiyel denklemi gözönüne alınsın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} E^*(x, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{ij}, v_{ij}, \ldots, u_r, v_r) =& \frac{\delta(vE)}{\delta u} \\ =& 0, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

denklemine (2.1.8) diferensiyel denkleminin *eşlenik denklemi* denir. Burada $v = v(x)$ yeni bağımlı değişkeni ve $\frac{\delta}{\delta u}$ varyasyonel (Euler) operatörü

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s>1}(-1)^s D_{j_1}\ldots D_{j_s}\frac{\partial}{\partial u_{j_1\ldots j_s}}, \tag{3.3.3}$$

biçimindedir.

Tanım 3.3.2

$v = u$ için (3.3.2) eşlenik denklemi

$$E^*(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_r) = 0, \qquad (i + j = 1, \ldots, r)$$

olup (2.1.8) orijinal denklemine özdeş olduğu takdirde r. mertebeden (2.1.8) diferensiyel denklemine *kendine eşlenik denklem* adı verilir.

Örneğin,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

klasik dalga denkleminin eşlenik denklemi (3.3.2) ifadesinden

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

biçiminde elde edilebilir. $v = u$ için eşlenik denklem orijinal dalga denklemine eşit olduğundan kendine eşleniktir.

Uyarı 3.3.3

Burada dikkat edilmesi gereken kısım, $v = u$ için (2.1.8) diferensiyel denklemi kendine eşlenik olmasına rağmen

$$E(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_r) \neq E^*(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_r)$$

olabilir.

(2.1.8) denkleminin lineer olmayan kendine eşlenikliğinin tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 3.3.4 (Lineer olmayan kendi eşleniklik (Ibragimov 2011))

(2.1.8) denkleminin kendine eşlenik olması demek ancak (3.3.2) eşlenik denkleminin $\phi(x, u) \neq 0$ olmak üzere $v = \phi$ dönüşümü ile (2.1.8) in tüm u çözümleri için sağlanmasıdır.

Bu tanım belirsiz bir λ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliğe denktir:

$$E^*(x,u,u_{(1)},v_{(1)},u_{(2)},v_{(2)},\ldots,u_{(r)},v_{(r)})|_{v=\phi}=\lambda E, \tag{3.3.4}$$

veya $\frac{\delta(vE)}{\delta u}|_{v=\phi}=\lambda E$.

Özellikle, $v=\phi(x,u)$ dönüşümünde $v=u$ ise (2.1.8) denklemi *sıkı kendine eşlenik*tir, $v=\phi(u)$ ise *yarı kendine eşlenik*tir ve $v=\phi(x,u,u_{(1)},u_{(2)},\ldots,u_{(s)})$ ise ***diferensiyelli** lineer olmayan kendi eşlenikliktir* denir. Ayrıca x,u ve türevlerini içeren $\lambda,\lambda^{i_1},\ldots,\lambda^{i_1\ldots i_s}$ fonksiyonları hesaplanarak

$$E^*|_{v=\phi(x,u,u_{(1)},u_{(2)},\ldots,u_{(s)})}=\left(\lambda+\lambda^{i_1}D_{i_1}+\ldots+\lambda^{i_1\ldots i_s}D_{i_1\ldots i_s}\right)E, \tag{3.3.5}$$

ifadesi oluşturulur.

Tanım 3.3.5 (Eşlenik Simetri (Bluman ve ark. 2010, Anco ve Bluman 2002))

$X_\omega=\omega(x,u,u_{(1)},u_{(2)},\ldots,u_{(r)})\dfrac{\partial}{\partial u}$ simetrisi (2.1.8) in bir eşlenik simetrisi olmak üzere X_ω simetrisi

$$\left(\mathcal{L}_F^*\right)\omega=\omega\frac{\partial F}{\partial u}-D_{i_1}\left(\omega\frac{\partial F}{\partial u_{i_1}}\right)+\ldots+(-1)^rD_{i_1\ldots i_r}\left(\omega\frac{\partial F}{\partial u_{i_1\ldots i_r}}\right) \tag{3.3.6}$$

(2.1.8) in eşlenik denklemi ile hesaplanır.

3.4 Yeni Korunum Yöntemi

Ibragimov (2006), varyasyonel prensibe sahip olmayan denklemler için yeni korunum yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntemin esası gözönüne alınan denklemin eşlenik denkleminin tanımlanması ve denklemin ”*kuple*” sisteme dönüştürülmesine dayanır. Artık bu yeni sistem Euler-Lagrange formundaki varyasyonel özelliğe sahip olan denklemlere dönüşür. Bununla birlikte gözönüne alınan denklemin korunum kanunları Noether metodu ile hesaplandığında, eşlenik denklemin çözümü olan fonksiyon(lar) ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla gözönüne alınan denklemin yerel değişkenlerini içeren bir yapı yakalanamaz. Çünkü korunum vektörleri ana denklemin bağımlı değişkenleri ile beraber eşlenik denklemin çözümlerini de içerir. Bu sıkıntıyı ortadan kaldırabilmek için son yıllarda yine Ibragimov tarafından lineer olmayan kendi eşleniklik kavramı ortaya atılmıştır (Yaşar 2009).

Teorem 3.4.1

(2.1.8) denkleminin kabul ettiği her Lie nokta, Lie-Bäcklund ve yerel olmayan simetri (2.1.8) orijinal denklemi ile (3.3.2) eşlenik denklemi içeren sistem için bir korunum kanunu oluşturur. Bu korunum kanununun vektörleri $y = y(x)$ yeni bağımlı değişken olmak üzere

$$\mathcal{L} = yE(x, u, u_1, u_2, \dots, u_r) \tag{3.4.1}$$

Lagrangianı olmak üzere

$$T^i = \xi^i \mathcal{L} + W\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1} \dots D_{i_s}(W) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{ij_1 j_2 \dots j_s}} \quad i = 1, \dots, n \tag{3.4.2}$$

biçimindedir. Ayrıca (3.4.2) ifadesi (3.1.16) ile çakışır.

3.5 Özyineleme Yöntemi

Cheviakov ve Naz (2016) tarafından aşikar olmayan korunum kanunları ve çarpanlardan yeni korunum kanunları elde etmek için yeni bir *özyineleme formülü* geliştirilmiştir. Genel durumda korunum kanunlarının çarpanlara ihtiyacı olmadığı bilinmektedir. Aşağıdaki formüle göre bağımsız değişkenlerin keyfi fonksiyonları için yapı korunur.

Lemma 3.5.1 (Özyineleme Formülü (Cheviakov ve Naz 2017))

(2.1.8) denklemi (3.1.1) aşikar olmayan korunum kanununu kabul etsin. Bu takdirde $h = h(x)$ bir keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$D_i \Xi^i = D_i \left(hT^i[u] - \int \frac{\partial h}{\partial x^i} T^i[u] dx^i \right) = 0 \tag{3.5.1}$$

diverjans ifadesi (2.1.8) in verilen herhangi bir çözümü üzerinde sağlanır.

3.6 Çift İndirgeme Yöntemi

X, (2.1.8) denkleminin kabul ettiği Lie simetri üreteci, $T = (T^i)$, (2.1.8) denkleminin korunum kanunları olsun. X simetrisi ile T korunum kanunu aşağıdaki ifadeyi sağlıyorsa X ile T ilişkilidir:

$$[T^i, X] = X(T^i) + T^i D_j(\xi^j) - T^j D_j(\xi^i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6.1}$$

Teorem 3.6.1

X, (2.1.8) denkleminin herhangi bir simetrisi ve $T = (T^i)$ de (2.1.8) denkleminin korunum kanunu olmak üzere

$$T^{*i} = [T^i, X] = X(T^i) + T^i D_j(\xi^j) - T^j D_j(\xi^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.6.2}$$

ile tanımlanan T^{*i} ifadesi, $D_i T^{*i} \mid_{(2.1.8)} = 0$ olup (2.1.8) denkleminin bir korunum kanunudur.

Teorem 3.6.2

(3.1.1), (2.1.8) denkleminin bir korunum kanunu olsun. Kontakt dönüşümler altında, $\tilde{T}^i$

fonksiyonları $JD_iT^i = \tilde{D}_i\tilde{T}^i$ olur. Burada $\tilde{T}^i$, $[T^1, T^2, \ldots, T^n]$,

$$J = \begin{vmatrix} \tilde{D}_1 x_1 & \tilde{D}_1 x_2 & \ldots & \tilde{D}_1 x_n \\ \tilde{D}_2 x_1 & \tilde{D}_2 x_2 & \ldots & \tilde{D}_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{D}_n x_1 & \tilde{D}_n x_2 & \ldots & \tilde{D}_n x_n \end{vmatrix} \tag{3.6.3}$$

ile tanımlanan Jakobiyen determinantının $i.$ satırının değiştirilmesi ile elde edilen determinantıdır.

Teorem 3.6.3

(3.1.1), (2.1.8) denkleminin bir korunum kanunu olsun. Kontakt dönüşümler altında $JD_iT^i = \tilde{D}_i\tilde{T}^i$ olan $\tilde{T}^i$ fonksiyonları vardır. Burada

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}^1 \\ \tilde{T}^2 \\ \vdots \\ \tilde{T}^n \end{pmatrix} = J(A^{-1})^T \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^n \end{pmatrix}, \quad J \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^n \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \tilde{T}^1 \\ \tilde{T}^2 \\ \vdots \\ \tilde{T}^n \end{pmatrix} \tag{3.6.4}$$

olup

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{D}_1 x_1 & \tilde{D}_1 x_2 & \ldots & \tilde{D}_1 x_n \\ \tilde{D}_2 x_1 & \tilde{D}_2 x_2 & \ldots & \tilde{D}_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{D}_n x_1 & \tilde{D}_n x_2 & \ldots & \tilde{D}_n x_n \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 \tilde{x} 1 & D_1 \tilde{x}_2 & \ldots & D_1 \tilde{x}_n \\ D_2 \tilde{x}_1 & D_2 \tilde{x}_2 & \ldots & D_2 \tilde{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n \tilde{x}_1 & D_n \tilde{x}_2 & \ldots & D_n \tilde{x}_n \end{pmatrix} \tag{3.6.5}$$

ve $J = det(A)$ dir.

Lemma 3.6.4

$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, n bağımsız değişken, $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, m bağımlı değişken ve

$\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)$ bağımsız değişkenlerin değişimi olmak üzere herhangi bir $f(x, u, u^1) = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ vektörü aşağıdaki eşitliği sağlamak zorundadır:

A, (3.6.5) formunda olup

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_1 & \tilde{D}_1 & \ldots & \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 & \tilde{D}_2 & \ldots & \tilde{D}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{D}_n & \tilde{D}_n & \ldots & \tilde{D}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f^1 & f^2 & \ldots & f^n \\ f^1 & f^2 & \ldots & f^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^1 & f^2 & \ldots & f^n \end{pmatrix} = A \begin{bmatrix} D_1 & D_1 & \ldots & D_1 \\ D_2 & D_2 & \ldots & D_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n & D_n & \ldots & D_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f^1 & f^2 & \ldots & f^n \\ f^1 & f^2 & \ldots & f^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^1 & f^2 & \ldots & f^n \end{pmatrix}. \tag{3.6.6}$$

ifadesi vardır.

Teorem 3.6.5 (Çift İndirgemenin Temel Teoremi)

$D_i T^i = 0$, (2.1.8) denkleminin bir korunum kanunu olsun. Bu denklem için

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1 i_2 \ldots, i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_s}} \tag{3.6.7}$$

simetrisinin benzerlik dönüşümü altında $\tilde{T}^i$ fonksiyonları vardır öyle ki $\tilde{D}_i \tilde{T}^i = 0$ denklemi için X bir simetridir ve

$$\begin{pmatrix} X\tilde{T}^1 \\ X\tilde{T}^2 \\ \vdots \\ X\tilde{T}^n \end{pmatrix} = J(A^{-1})^T \begin{pmatrix} [T^1, X] \\ [T^2, X] \\ \vdots \\ [T^n, X] \end{pmatrix} \tag{3.6.8}$$

dir. Buradaki A ve A^{-1}, (3.6.5) formunda olup $J = det(A)$ dır.

Sonuç 3.6.6

(2.1.8) denkleminin bir (3.1.1) korunum formu, bir X simetrisinin benzerlik dönüşümü altında $\tilde{D}_i\tilde{T}^i = 0$ korunum formuna indirgenmesi için gerek ve yeter şart X ile T'nin ilişkili olmasıdır. Yani $[T, X] = 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.6.7 (Genelleştirilmiş Çift İndirgeme Teorisi)

n bağımsız, m bağımlı değişkenli bir q. mertebeden lineer olmayan KDDS i, bir $(q-1)$. mertebeden lineer olmayan ADDS ne indirgenebilir. Burada KDDS, n indirgemeden her birinde bir aşikar olmayan korunum kanunu ile en az bir ilişkili simetriye sahiptir.

3.7 KMDD için Korunum Kanunları

Şimdi (2.4.1) KMDD için korunum kanunlarını oluşturalım.

(2.4.1)'e ait korunum kanunlarını oluşturmak için Ibragimov'un (2007) yeni korunum yöntemi verilecektir. KMDD'de oluşum tipi denklem olduğu için varyasyonel prensip ile elde edilemeyeceği aşikardır. Bu nedenle tam mertebeli KDD'de olduğu gibi orijinal denklemi yardımcı bir fonksiyon olarak adlandırılan formal Lagrangian ile kuple hale getirip Euler-Lagrange denklemleri haline sokmak ana hedeftir. Burada önemli olan kısım, aşağıda oluşturulacak olan eşlenik denklemin, orijinal denklemin tüm Lie nokta, Lie-Bäcklund ve yerel olmayan simetrileri kabul etmesidir.

(2.4.1) denkleminin

$$\mathcal{L} = v(x,t)F$$

formal Lagrangiana sahip olduğunu kabul edelim. (3.3.1) eşlenik denklemi, (3.1.2) Euler-Lagrange operatörü ile

$$F^* : \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0$$

olarak tanımlanır. Ayrıca (2.4.2) Lie nokta simetrisini kesirli zaman türevi için

$$\overline{X} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \zeta^{(\alpha;t)}\frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}} + \zeta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots \tag{3.7.1}$$

biçiminde tanımlayalım. Lie karakteristik fonksiyonu $W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ olmak üzere, zaman kesirli diferensiyel denklem için

$$\overline{X} + D_t(\tau) + D_x(\xi) = W\frac{\delta}{\delta u} + D_t N^t + D_x N^x$$

Noether özdeşliği geçerlidir.

$$J(f,g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\int_t^T \frac{f(\tau,x)g(\mu,x)}{(\mu-\tau)^{\alpha+1-n}}d\mu\, dt$$

olmak üzere N^t operatörü

$$N^t = \tau + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k D_t^{\alpha-1-k}(W) D_t^k \frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}} - (-1)^n J\left(W, D_t^n \frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}}\right) \tag{3.7.2}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde N^x operatörü de

$$N^x = \xi + W\left(\sum_{s\geq 0}(-1)^s D_x^s \frac{\partial}{\partial u_{sx}}\right) + D_x(W)\left(\sum_{s\geq 1}(-1)^{s-1} D_x^{s-1}\frac{\partial}{\partial u_{(s-1)x}}\right) + \ldots \tag{3.7.3}$$

olarak verilir.

(2.4.1) denkleminin, X üreteci ve formal Lagrangianı ile beraber değişmezlik prensibi

$$\left(\overline{X}\mathcal{L} + D_t(\tau)\mathcal{L} + D_x(\xi)\mathcal{L}\right)|_{(2.4.1)} = 0 \tag{3.7.4}$$

dır. Dolayısıyla (2.4.1) denkleminin korunum kanunu

$$D_t(N^t\mathcal{L}) + D_x(N^x\mathcal{L}) = 0 \tag{3.7.5}$$

formundadır.

4. TAM ÇÖZÜMLER

Bu bölümde literatürde var olan tam çözüm yöntemlerinden en genelleri olan genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, en basit denklem yöntemi ve $(G'/G, 1/G)$ genişleme yönteminin teorisi verilecektir.

4.1 Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi

Kudryashov yöntemi, lineer olmayan KDD'in tam çözümlerini elde etmek için Kudryashov (1988) tarafından verilmiştir. Bu nedenle bu yaklaşım Kudryashov yöntemi olarak adlandırılır. Kudryashov yöntemi, lineer olmayan diferensiyel denklemlerin geniş bir sınıfının yalnız dalga çözümlerinin oluşturulmasına izin vermektedir. Bu yöntemin avantajı, literatürde var olan diğer yöntemleri kapsayacak şekilde oluşturulmasıdır. (Parkes 1994, 1996, Malfliet 1996, Fan 2000, Kudryashov 2008, 2012, Biswas 2009, Vitanov 2010) kaynaklarında olduğu gibi Burgers-Korteweg-de Vries denkleminin, Kurumoto-Sivashinsky denklemlerinin, Bretherton denklemi ve Kawahara denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir. Buna ek olarak (Ryabov 2010) da üçüncü mertebeden lineer olmayan oluşum denklem sınıfı için ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca literatürde Kudryashov yöntemi kullanılarak lineer olmayan oluşum denklemlerinin ilerleyen dalga çözümleri araştırılmıştır.

Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi adım adım aşağıda ifade edilmiştir.

1. adım : (2.1.8) denkleminde

$$u(x,t) = y(z), \qquad z = kx - \omega t$$

kabulü alındığında

$$\Delta^* \left(z, y(z), \frac{dy(z)}{dz}, \frac{d^2y(z)}{dz^2}, \ldots, \right) = 0 \tag{4.1.1}$$

ADD elde edilir.

2. adım : (4.1.1) denkleminin bir çözümü

$$y(z) = \frac{a_0 + a_1 Q(z) + \ldots + a_N Q^N(z)}{b_0 + b_1 Q(z) + \ldots + b^M Q^M(z)} \tag{4.1.2}$$

biçiminde olsun. Burada N, M tamsayıları, a_i, b_j $(i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, M)$ daha sonra bulunacak keyfi sabitleri ve

$$Q(z) = \frac{1}{1 \mp e^z} \tag{4.1.3}$$

fonksiyonu

$$Q' = Q^2 - Q \tag{4.1.4}$$

diferensiyelinin çözümünü ifade eder. (4.1.2) çözümü (4.1.1) denkleminde yerine yazılarak terimlerin derecelerinden N ve M tam sayıları bulunur.

3. adım : Elde edilen N ve M tamsayıları ile (4.1.2) çözümü (4.1.1) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen denklem Q ve kuvvetlerine göre bir polinom olarak yazılabilir.

4. adım : 3. adımdaki polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek a_i ve b_j sabitlerini belirleyen denklem sistemi elde edilir.

5. adım : 4. adımdaki belirleyici denklem sistemi çözülerek a_i ve b_j katsayıları bulunur. Dolayısıyla (4.1.1) denkleminin (4.1.2) çözümü bulunmuş olur.

4.2 En Basit Denklem Yöntemi

Kurdyashov (2005) tarafından lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için oluşturulan yöntemin merkezinde, en basit lineer olmayan diferensiyel denklemlerin genel çözümleri bulunmaktadır. Bu nedenle yöntemin adı *en basit denklem yöntemi* dir. En basit denklem yönteminin diğer yöntemlerden avantajları, literatürdeki bir dizi yöntemin genellemesi olması ve yöntemin uygulanmasının kolaylığıdır.

Yukarıda bahsedildiği gibi en basit denklemler

$$G'(z) = aG(z)^2 + bG(z) \tag{4.2.1}$$

Bernoulli denklemi ve

$$G'(z) = aG(z)^2 + bG(z) + d \tag{4.2.2}$$

Riccati denklemi seçilebilir. (4.2.1) Bernoulli denkleminin çözümleri $a < 0, b > 0$ için (veya $a > 0, b < 0$)

$$G(z) = \mp \frac{b \exp[b(z+C)]}{1 \pm a \exp[b(z+C)]} \tag{4.2.3}$$

dir. Ayrıca (4.2.2) Riccati denkleminin çözümleri $\theta = b^2 - 4ad$ olmak üzere

$$G(z) = -\frac{1}{2a}\left(b + \theta \tanh\left[\frac{1}{2}\theta(z+C)\right]\right), \tag{4.2.4}$$

ve

$$G(z) = -\frac{1}{2a}\left(b + \theta \tanh\left[\frac{1}{2}\theta z\right]\right) + \frac{\operatorname{sech}\frac{1}{2}\theta z}{C\cosh\left[\frac{1}{2}\theta z\right] - \frac{2a}{\theta}\sinh\left[\frac{1}{2}\theta z\right]} \tag{4.2.5}$$

biçimindedir.

En basit denklem yöntemi (4.2.1) veya (4.2.2) denklemlerinin çözümü olan $G(z)$ yardımcı fonksiyonu gözönüne alınarak (4.1.1) denkleminin

$$y(z) = \sum_{i=0}^{M} A_i \left(G(z)\right)^i \tag{4.2.6}$$

çözümünün aranmasıdır. Burada M pozitif tamsayısı, (4.2.6) çözümünün (4.1.1)'de yerine yazılarak en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında dengeleme yöntemi kullanılarak elde edilir. Ayrıca A_i, daha sonra hesaplanacak olan sabitlerdir.

Elde edilen M pozitif tamsayısı ile (4.2.6) çözümü (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa ve (4.2.1) veya (4.2.2) ifadeleri gözönüne alındığında $G(z)$ nin bir polinomu olarak cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek A_i sabitleri bulunur.

Buradan hareketle bulunan A_i sabitleri ile (4.2.6) çözümleri oluşturulur.

4.3 $(G'/G, 1/G)$ Genişleme Yöntemi

$$G''(\xi) + \lambda G(\xi) = \mu \tag{4.3.1}$$

ikinci mertebeden ADD gözönüne alınsın. $\phi = \frac{G'}{G}$ ve $\psi = \frac{1}{G}$ olmak üzere (4.3.1) in

$$\begin{aligned} \phi' &= -\phi^2 + \mu\psi - \lambda, \\ \psi' &= -\phi\psi \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

olduğu açıktır.

1. durum : $\lambda < 0$ için, A_1, A_2 keyfi olmak üzere (4.3.1) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = A_1 \sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right) + A_2 \cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda} \tag{4.3.3}$$

dir. Ayrıca $\sigma = A_1^2 - A_2^2$ olmak üzere

$$\psi^2 = \frac{-\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}(\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda) \tag{4.3.4}$$

dir.

2. durum : $\lambda > 0$ için, A_1, A_2 keyfi olmak üzere (4.3.1) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = A_1 \sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda} \tag{4.3.5}$$

ve $\sigma = A_1^2 + A_2^2$ için

$$\psi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}(\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda) \tag{4.3.6}$$

dir.

3. durum : $\lambda = 0$ için (4.3.1)'in genel çözümü

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2 \tag{4.3.7}$$

ve

$$\psi^2 = \frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2}(\phi^2 - 2\mu\psi) \tag{4.3.8}$$

dir.

(2.1.8) lineer olmayan oluşum denklemi ele alınsın. Burada E, $u = u(x)$ ve U'nun kısmi türevlerinin bir polinomu olsun. $(G'/G, 1/G)$ genişleme yönteminin (Li ve ark. 2010) uygulanmasını adım adım açıklayalım.

1. adım : İlerleyen dalga dönüşümü, ω sabiti olmak üzere

$$\xi = x + y - \omega t, \quad u(x, y, t) = U(\xi) \tag{4.3.9}$$

biçimindedir. Bu dalga dönüşümü (2.1.8) denklemini, $U(\xi)$ ve türevlerinin polinomu olan

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0 \tag{4.3.10}$$

ADD'ye dönüştürür.

2. adım : (4.3.10) ADD inin ϕ ve ψ değişkenlerine bağımlı olan

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i\phi^i + \sum_{j=1}^{N} b_j\phi^i\psi \tag{4.3.11}$$

çözümü olsun. Bu çözümdeki a_i ve b_j, 4. adımda tespit edilecek olan sabitlerdir.

3. adım : (4.3.11) ifadesi, (4.3.10) ADD'sinde yerine yazılırsa ve en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında dengeleme yöntemi kullanılarak N pozitif tam sayısı hesaplanır.

4. adım : (4.3.2) ve (4.3.4) ifadeleri gözönüne alınarak (4.3.11), (4.3.10)'da yerine yazıldığında, (4.3.10) denklemi ϕ ve ψ nin bir polinomu olarak bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken kısım ψ nin derecesinin bir veya birden az olması gerektiğidir. Bu polinomun herbir katsayısını sıfıra eşitleyerek bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu sistem, $a_i, b_j, \omega, \mu, A_1, A_2$ ve $\lambda(< 0)$ katsayılarını elde etmede kullanılır. Sistemin çözümleri için MAPLE paket programını kullanmak faydalı olacaktır.

5. adım : 2. durum için de 4. adım benzer şekilde, (4.3.2) ve (4.3.6) ifadeleri gözönüne alınarak (4.3.11), (4.3.10)'da yerine yazıldığında aynı işlemler ile keyfi sabitler elde edilebilir. 3. durum için de benzer şekilde 4. adımda olduğu gibi (4.3.2) ve (4.3.8) ifadeleri gözönüne alınarak (4.3.11), (4.3.10) de yerine yazıldığında aynı işlemler yapılarak keyfi sabitler bulunabilir.

5. VARYANT BOUSSİNESQ SİSTEMİ

Bu bölümde, lineer olmayan oluşum türü denklem sistemlerinden olan

$$\Delta : \begin{cases} v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx} &= 0, \\ u_t + v_x + uu_x &= 0 \end{cases} \tag{5.0.1}$$

varyant Boussinesq sistemi ele alınmıştır. (5.0.1) sistemi su dalgalarının modellenmesinde kullanılmaktadır (Fan, Hon 2003, Muatjetjeja, Khalique 2014). Burada u akış hızını, v toplam derinliği, x uzay değişkenini ve t ise zaman değişkenini ifade etmektedir. (5.0.1) sistemi için literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde tam çözümlerin ve korunum kanunlarının çalışıldığı gözlemlenmektedir. Bu çerçevede tam çözümler için bazı özel varsayımlar altında ilerleyen dalga tipi çözümlerin oluşturulduğu görülmüştür. (5.0.1) sistemi için dengeleme yöntemi (Wang 1995) kullanılarak yalnız gezen dalga çözümleri, (Fan, Hon 2003) çalışmasında (5.0.1) sisteminin soliton çözümleri, rasyonel çözümleri, üçgen periyodik çözümleri, Jacobi ve Weierstrass çift dalga çözümleri genişletilmiş $\tanh$ yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca (Muatjetjeja, Khalique 2014) ve (Naz ve ark. 2010) çalışmalarında klasik Noether yaklaşımı ile korunum kanunları oluşturulmuştur.

Bu bölümde, (5.0.1) sisteminin Lie grup teorisi aracılığıyla değişmezlik prensipleri, üreteçleri ve simetri indirgemeleri incelenecektir. Simetri indirgemesinde Riccati denkleminin en basit denklem olması hali gözönüne alınarak tam çözümler elde edilecektir. Buna ek olarak çarpan yaklaşımı ile sistemin korunum kanunları oluşturulacaktır.

5.1 Lie Grup Analizi

(5.0.1) sisteminin (2.1.10) Lie nokta simetrisi

$$X = \xi(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v} \tag{5.1.1}$$

formundaki vektör alanı ile oluşturulur. (5.1.1) üreteci için $X^{(3)}$ uzanımı (denklemin mertebesi 3 olduğu için)

$$\begin{aligned}X^{(3)} &= \xi(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v}\\ &+ \zeta^t(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta^x(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta^{xx}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\\ &+ \zeta^{xxx}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \phi^t(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v_t} + \phi^x(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v_x}\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

olup bu uzanımdaki $\zeta^t, \zeta^x, \zeta^{xx}, \zeta^{xxx}$ ve ϕ^t, ϕ^x katsayı fonksiyonları, (2.1.7)'den

$$\begin{aligned}\zeta^t &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi)\\ &= \eta_t + u_t(\eta_u - \tau_t) - u_t^2\tau_u + v_t\eta_v - u_t v_t \tau_v - u_x\xi_t - u_t u_x \xi_u - u_x v_t \xi_v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi)\\ &= \eta_x + u_x(\eta_u - \xi_x) + v_x\eta_v - u_t\tau_x - u_t u_x \eta_u - u_t v_x \tau_v - u_x^2\xi_u - u_x v_x \xi_v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^{xx} &= D_x(\zeta^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_t(\xi)\\ &= \eta_{xx} + 2v_x\eta_{xv} + v_x^2\eta_{vv} - u_{xx}\xi_x - u_{xx}v_x\xi_v + u_x(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) - u_x u_{xx}\xi_u\\ &+ 2u_x v_x(\eta_{uv} - \xi_{xv}) - u_x v_x^2 \xi_{vv} + u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - 2u_x^2 v_x \xi_{uv} - u_x^3\xi_{uu}\\ &- u_{tx}\tau_x - u_{tx}v_x\tau_v - u_{tx}u_x\tau_u - u_t\tau_{xx} - 2u_t v_x \tau_{xv} - u_t v_x^2\tau_{vv} - 2u_t u_x \tau_{xu}\\ &- 2u_t u_x v_x \tau_{uv} - u_t u_x^2 \tau_{uu},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^{xxx} &= D_x(\zeta^{xx}) - u_{txx} D_x(\tau) - u_{xxx} D_t(\xi)\\ &= \eta_{xxx} + u_x(2\eta_{xxu} - \xi_{xxx}) + 3v_x\eta_{xxv} + 3u_x^2(\eta_{xuu} - \xi_{xxu}) + 3v_x^2\eta_{xvv} - u_{xx}\xi_{xx}\\ &u_x^3(\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu}) - u_x^4\xi_{uuu} - u_t\tau_{xxx} - u_{tx}\tau_{xx} - 2u_x u_{xx}\xi_{xu} + 3u_x v_x(2\eta_{xuv} - \xi_{xxv})\\ &+ 3u_x v_x^2(\eta_{uvv} - \xi_{xvv}) + 3u_x^2 v_x(\eta_{uuv} - 2\xi_{xuv}) - 3u_t v_x\tau_{xxv} - 3u_t v_x^2\tau_{xvv} - 3u_t u_x \tau_{xxu}\\ &- 6u_t u_x v_x \tau_{xuv} - 3u_t u_x^2\tau_{xuu} - 2u_{tx}v_x\tau_{xv} - 2u_x u_{tx}\tau_{xu} - 2u_x u_{xx} v_x \xi_{uv} - u_x^2 u_{xx}\xi_{uu}\end{aligned}$$

$$- 3u_x^2v_x^2\xi_{uvv} - 3u_x^3v_x\xi_{uuv} - 2u_xu_{tx}v_x\tau_{uv} - u_x^2u_{tx}\tau_{uu} - 3u_tu_xv_x^2\tau_{uvv} - 3u_tu_x^2v_x\tau_{uuv}$$

$$- u_tu_x^3\tau_{uuu} + v_x^3\eta_{vvv} - u_{xx}v_x\xi_{xv} - u_{xx}v_x^2\xi_{vv} - u_xv_x^3\xi_{vvv} - u_{tx}v_x^2\tau_{vv} - u_tv_x^3\tau_{vvv}$$

$$- u_{txx}v_x\tau_x - u_xu_{txx}v_x\tau_u - u_{txx}v_x^2\tau_v - u_{xxx}v_x\xi_x - u_xu_{xxx}v_x\xi_u - u_{xxx}v_x^2\xi_v,$$

$$\begin{aligned}\phi^t &= D_t(\varphi) - v_tD_t(\tau) - v_xD_t(\xi)\\ &= \varphi_t + u_t\varphi_u + v_t(\varphi_v - \tau_t) - u_tv_t\tau_u - v_t^2\tau_v - v_x\xi_t - u_tv_x\xi_u - v_tv_x\xi_v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^x &= D_x(\varphi) - v_tD_x(\tau) - v_xD_x(\xi)\\ &= \varphi_x + u_x\varphi_u + v_x(\varphi_v - \xi_x) - v_t\tau_x - u_xv_t\tau_u - v_tv_x\tau_v - u_xv_x\xi_u - v_x^2\xi_v\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

biçimindedir. (5.0.1) sistemi için (2.1.11) değişmezlik prensibi

$$\begin{aligned}X^{(3)}\left(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}\right)|_{(5.0.1)} &= 0,\\ X^{(3)}\left(u_t + v_x + uu_x\right)|_{(5.0.1)} &= 0\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

olup

$$\begin{aligned}\phi^t + \varphi u_x + \zeta^x v + \eta v_x + \phi^x u + \zeta^{xxx} &= 0\\ \zeta^t + \phi^x + \eta u_x + \zeta^x u &= 0\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

sistemi elde edilir. (5.1.3)'deki uzanım katsayıları (5.1.5) sisteminde yerine yazılıp u ve v nin kısmi türevlerinin farklı kombinasyonlarına göre düzenlenirse (5.1.5) sistemi

$$u_t\left(\varphi_u - v\tau_x - \tau_{xxx}\right) + u_x\left(\varphi + v\eta_u - v\xi_x + u\varphi_u + 2\eta_{xxu} - \xi_{xxx}\right) + v_t\left(\varphi_v - \tau_t - u\tau_x\right)$$

$$+ v_x\left(\eta - \xi_t + v\eta_v + u\varphi_v - u\xi_x + 3\eta_{xxv}\right) + u_x^2\left(3\eta_{xuu} - 3\xi_{xxu} - v\xi_u\right) + v_x^2\left(3\eta_{xvv} - u\xi_v\right)$$

$$- v_t^2\tau_v - u_tu_x\left(v\eta_u + 3\tau_{xxu}\right) - u_tv_t\tau_u - u_tv_x\left(\xi_u + v\tau_v + 3\tau_{xxv}\right) - v_tv_x\left(\xi_v + u\tau_v\right)$$

$$- u_xv_tu\tau_u - u_xv_x\left(v\xi_v + u\xi_u - 6\eta_{xuv} + 3\xi_{xxu}\right) - u_{tx}\tau_{xx} - u_{xx}\xi_{xx} + u_x^3\left(\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&- u_x^4\xi_{uuu} - 3u_tu_x^2\tau_{xuu} - 3u_tv_x^2\tau_{xvv} - 6u_tu_xv_x\tau_{xuv} + u_xv_x^2\left(3\eta_{uvv} - \xi_{xvv}\right) - 2u_xu_{xx}\xi_{xu} \\
&+ u_x^2v_x\left(3\eta_{uuv} - 6\xi_{xuv}\right) - 2u_{tx}v_x\tau_{xv} - 2u_xu_{tx}\tau_{xu} - 2u_xu_{xx}v_x\xi_{uv} - u_x^2u_{xx}\xi_{uu} \\
&- 3u_x^2v_x^2\xi_{uvv} - 3u_x^3v_x\xi_{uuv} - 2u_xu_{tx}v_x\tau_{uv} - u_x^2u_{tx}\tau_{uu} - 3u_tu_x^2v_x\tau_{uuv} - 3u_tu_xv_x^2\tau_{uvv} \\
&- u_tu_x^3\tau_{uuu} + v_x^3\eta_{vvv} - u_{xx}v_x\xi_{xv} - u_{xx}v_x^2\xi_{vv} - u_xv_x^2\xi_{vvv} - u_{tx}v_x^2\tau_{vv} - u_xv_x^3\tau_{vvv} \\
&- v_xv_{txx}\tau_x - u_xu_{txx}v_x\tau_u - u_{txx}v_x^2\tau_v - u_{xxx}v_x\xi_{xx} - u_xu_{xxx}v_x\xi_u - u_{xxx}v_x^2\xi_v + \varphi_t + v\eta_x \\
&+ u\varphi_x + \eta_{xxx} = 0, \qquad (5.1.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_x\left(\varphi_u - \xi_t + \eta + u\eta_u - u\xi_x\right) + u_t\left(\eta_u - \tau_t - u\tau_x\right) - u_t^2\tau_u + v_t\left(\eta_v\tau_x\right) - u_tv_t\tau_v \\
&- u_tu_x\left(\xi_u + u\tau_u\right) - u_xv_t\left(\xi_v + \tau_u\right) + v_x\left(\varphi_v\xi_x + u\eta_v\right) - v_tv_x\tau_v - u_xv_x\left(\xi_u + u\xi_v\right) \\
&- v_x^2\xi_v - u_tv_xu\tau_v - u_x^2u\xi_u + \eta_t + \varphi_x + u\eta_x = 0 \qquad (5.1.7)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.1.6) ve (5.1.7) denklemlerinde ξ, τ, η, φ sonsuz küçükleri sadece (x, t, u, v) değişkenlerine bağımlı olduğu için herbir $u_t, u_x, v_t, v_x, \ldots$ değişkenleri ve farklı kombinasyonlarının katsayıları sıfıra eşitlenebilir. Diğer bir deyişle yukarıdaki denklem sistemi monomiallerine göre ayrılırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi_u - v\tau_x - \tau_{xxx} &= 0, \\
\varphi - v\eta_u + v\xi_x + u\varphi_u + 2\eta_{xxu} - \xi_{xxx} &= 0, \\
\varphi_v + \tau_t - u\tau_x &= 0, \\
\eta - \xi_t + v\eta_v - u\varphi_v - u\xi_x + 3\eta_{xxv} &= 0, \\
\left(3\eta_{xu} - 3\xi_{xx} - v\xi\right)_u &= 0, \\
\left(3\eta_{xv} - u\xi\right)_v &= 0, \\
\xi_u + v\tau_v + 3\tau_{xxv} &= 0, \\
\left(\xi + u\tau\right)_v &= 0, \\
v\xi_v + u\xi_u - 3\left(2\eta_v + \xi_x\right)_{xu} &= 0,
\end{aligned}
$$

$$(\eta_u - 3\xi_x)_{uu} = 0,$$
$$(3\eta_u - \xi_x)_{vv} = 0,$$
$$(\eta_u - 2\xi_x)_{uv} = 0,$$
$$\varphi_t + v\eta_x + u\varphi_x + \eta_{xxx} = 0,$$
$$\tau_x = \tau_u = \tau_v = 0,$$
$$\xi_{xx} = \xi_u = \xi_v = 0,$$
$$\eta_{vvv} = 0,$$
$$\varphi_u - \xi_t + \eta - 2u\eta_u - u\xi_x = 0,$$
$$\eta_u + \tau_t - u\tau_x = 0,$$
$$\varphi_v + \xi_x + u\eta_v = 0,$$
$$\eta_t + \varphi_x + u\eta_x = 0 \tag{5.1.8}$$

belirleyici denklem sistemine ulaşılır. Burada $\tau_x = \tau_u = \tau_v = 0$ olduğundan $\tau = \tau(t)$ ve $\xi_u = \xi_v = \xi_{xx} = 0$ olduğundan $\xi = \xi_1(t)x + \xi_2(t)$ olduğu açıktır. Bu ifadeler ile (5.1.8) sistemi yeniden düzenlenirse

$$\varphi_u = 0,$$
$$\varphi + v\xi_1 + u\varphi_u + 2\eta_{xxu} = 0,$$
$$\varphi_v + \tau' = 0,$$
$$\eta - \xi_1' x - \xi_2' + v\eta_v - u\varphi_v - u\xi_1 + 3\eta_{xxv} = 0,$$
$$(3\eta_{xu} - v(\xi_1 x + \xi_2))_u = 0,$$
$$(3\eta_{xv} - u(\xi_1 x + \xi_2))_v = 0,$$
$$(\xi_1 x + \xi_2 + u\tau)_v = 0,$$
$$(2\eta_v + \xi_1)_{xu} = 0,$$
$$(\eta_u - 3\xi_1)_{uu} = 0,$$
$$(3\eta_u - \xi_1)_{vv} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
(\eta_u - 2\xi_1)_{uv} &= 0,\\
\varphi_t + v\eta_x + u\varphi_x + \eta_{xxx} &= 0,\\
\eta_{vvv} &= 0,\\
\varphi_u - \xi_1' x - \xi_2' + \eta - 2u\eta_u - u\xi_1 &= 0,\\
2\eta_u + \tau' &= 0,\\
\varphi_v + 2\xi_1 + u\eta_v &= 0,\\
\eta_t + \varphi_x + u\eta_x &= 0
\end{aligned}
\tag{5.1.9}
$$

halini alır. Buradan gerekli cebirsel işlemler aşağıdaki gibi yapıldığında

$$
\begin{aligned}
\varphi_u = 0, \quad \varphi_v + \tau' = 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi = -\tau' v + f_1(t,x),\\
2\eta_u + \tau' = 0 \quad &\Rightarrow \quad \eta = \frac{-1}{2}\tau' u + f_2(t,x,v),\\
-\tau' v + f_1 + \frac{1}{2}v\tau' + v\xi_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\xi_1 - \frac{1}{2}\tau'\right)v + f_1 = 0,\\
&\Rightarrow \quad \xi_1 = \frac{1}{2}\tau', \quad f_1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{2xvv} = f_{2vvv} = 0 \quad &\Rightarrow \quad f_2(t,x,v) = c_3,\\
c_3 - (\xi_1 x + \xi_2)_t = 0 \quad &\Rightarrow \quad \xi_1 = -\frac{1}{2}c_1, \quad \xi_2 = c_3 t + c_4,\\
\tau = -c_1 t + c_2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak τ, ξ, η ve φ sonsuz küçükleri

$$
\begin{aligned}
\tau(x,t,u,v) &= -c_1 t + c_2, \\
\xi(x,t,u,v) &= c_3 t - \frac{1}{2}c_1 x + c_4, \\
\eta(x,t,u,v) &= \frac{1}{2}c_1 u + c_3, \\
\varphi(x,t,u,v) &= c_1 v.
\end{aligned}
\tag{5.1.10}
$$

olarak tespit edilir. (5.1.10) sonsuz küçükleri, c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitlerini içerdiği için (5.0.1) sistemi

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial u} + t\frac{\partial}{\partial x}, \\
X_4 &= \frac{-1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}
\tag{5.1.11}
$$

lineer bağımsız simetrilere sahiptir. Yani bir diğer deyişle (5.0.1) sistemi, (5.1.11) simetrilerinin herbiri için değişmez kalır.

Örneğin X_3 simetrisi için $X_3^{(3)} = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - u_x\frac{\partial}{\partial u_t} - v_x\frac{\partial}{\partial v_t}$ uzanımı (5.0.1) sistemine uygulandığında

$$
\begin{aligned}
X_3^{(3)}(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) \mid_{(5.0.1)} &= (v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx})\left(t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - u_x\frac{\partial}{\partial u_t} - v_x\frac{\partial}{\partial v_t}\right), \\
&= t.(0) + 1.(v_x) - u_x.(0) - v_x.(1) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3^{(3)}\left(u_t+v_x+uu_x\right)|_{(5.0.1)} &= \left(u_t+v_x+uu_x\right)\left(t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}-u_x\frac{\partial}{\partial u_t}-v_x\frac{\partial}{\partial v_t}\right)\\
&= t.(0)+1.(u_x)-u_x.(1)-v_x.(0)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla (5.0.1) sistemi X_3 simetrisi altında değişmez kalmıştır.

5.2 Simetri İndirgemeleri ve Tam Çözümler

Simetri indirgemeleri ve tam çözümleri elde etmek için aşağıdaki Lagrange denklem sisteminin çözülmesi gerekmektedir:

$$
\frac{dt}{-c_1t+c_2}=\frac{dx}{c_3t-\frac{1}{2}c_1x+c_4}=\frac{du}{\frac{1}{2}c_1u+c_3}=\frac{dv}{c_1v}. \tag{5.2.1}
$$

(5.1.10) sonsuz küçüklerdeki c_i sabitlerinin aşağıdaki bazı özel durumları için simetri indirgemeleri ve varsa tam çözümleri araştırılmıştır.

1. durum : $c_1=\alpha$, $c_3=1$, $c_2=c_4=0$ keyfi sabitleri için (5.1.10) sonsuz küçük fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
\tau(t,x,u,v) &= -\alpha t,\\
\xi(t,x,u,v) &= t-\frac{\alpha}{2}x,\\
\eta(t,x,u,v) &= \frac{\alpha}{2}u+1,\\
\varphi(t,x,u,v) &= \alpha v
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bu sonsuz küçüklere karşılık gelen simetri

$$
X=-\alpha t\frac{\partial}{\partial t}+\left(t-\frac{\alpha}{2}x\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\alpha}{2}u+1\right)\frac{\partial}{\partial u}+\alpha v\frac{\partial}{\partial v} \tag{5.2.2}
$$

biçimindedir. (5.2.1) Lagrange sisteminde (5.2.2) simetrisi yerine yazıldığında

$$\frac{dt}{-\alpha t} = \frac{dx}{t - \frac{\alpha}{2}} = \frac{du}{\frac{\alpha}{2}u + 1} = \frac{dv}{\alpha v} \tag{5.2.3}$$

elde edilir. (5.2.3)'ün ilk iki teriminden

$$\frac{dt}{-\alpha t} = \frac{dx}{t - \frac{\alpha}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} + \frac{2}{\alpha}\sqrt{t} \tag{5.2.4}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca (5.2.3) sisteminin 1. ve 3. terimlerinin eşitliğinden (5.2.4) invaryantı gözönüne alınarak

$$\frac{dt}{-\alpha t} = \frac{du}{\frac{\alpha}{2}u + 1} \quad \Leftrightarrow \quad u(x,t) = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{E(z)}{\sqrt{t}} - 1\right) \tag{5.2.5}$$

çözümü bulunur. Benzer şekilde (5.2.4) sisteminin 1. ve 4. terimlerinin eşitliğinden de

$$\frac{dt}{-\alpha t} = \frac{dv}{\alpha v} \quad \Leftrightarrow \quad v(x,t) = \frac{F(z)}{t} \tag{5.2.6}$$

çözümü elde edilir. (5.2.5) ve (5.2.6) ifadelerindeki E ve F, (5.2.4) deki z nin keyfi fonksiyonlarıdır.

Son olarak (5.2.5) ve (5.2.6) çözümleri (5.0.1) sisteminde yerine yazılırsa (5.0.1) sistemi

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{2}F'z - \alpha F + 2FE' + 2EF' + 2E'' = 0, \\ -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{E'}{z} + E\right) + F' + \frac{4}{\alpha^2}EE' = 0 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

ADDS'ye dönüşür. (5.2.7) 2. mertebeden ADDS'nin çözümü açıkça bulunamamaktadır. Ancak ADD'ler için literatürde var olan çeşitli yöntemler ile çözülebilir.

2. durum : $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $c_3 = 1$ için (5.1.10) sonsuz küçükleri

$$\tau(t,x,u,v) = 0,$$
$$\xi(t,x,u,v) = t,$$
$$\eta(t,x,u,v) = 1,$$
$$\varphi(t,x,u,v) = 0$$

olur. Bu sonsuz küçüklere karşılık gelen X_3 simetrisi (5.2.1) Lagrange sisteminde yerine yazıldığında

$$\frac{dx}{t} = \frac{du}{1}, \quad dt = dv = 0$$

bulunur. Yani

$$z = t$$

için

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{x}{z} + E(z), \\ v(x,t) &= \frac{F(z)}{z} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

olup (5.0.1) sistemi (5.2.8) çözümleri ile

$$\begin{aligned} E' + \frac{1}{z}E &= 0, \\ F' + \frac{1}{z}F &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

ADDS'ye dönüşür. Bu (5.2.9) sistemi çözüldüğünde açıkça görülebilir ki

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \frac{c_1}{z}, \\
F(z) &= \frac{c_2}{z}
\end{aligned}
\tag{5.2.10}
$$

biçimindedir. $z = t$ olmak üzere (5.2.10) yardımcı çözümleri (5.2.8) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{x + c_1}{t}, \\
v(x,t) &= \frac{c_2}{t^2}
\end{aligned}
$$

çözümleri elde edilir.

3. durum : $c_1 = \alpha$, $c_2 = c_3 = 0$ ve $c_4 = 1$ için (5.1.10) sonsuz küçükleri

$$
\begin{aligned}
\tau(t,x,u,v) &= -\alpha t, \\
\xi(t,x,u,v) &= -\frac{\alpha}{2}x + 1, \\
\eta(t,x,u,v) &= \frac{\alpha}{2}u, \\
\varphi(t,x,u,v) &= \alpha v
\end{aligned}
$$

olup bu sonsuz küçüklere karşılık gelen simetri

$$
X = -\alpha t \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{\alpha}{2}x + 1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{2}u\frac{\partial}{\partial u} + \alpha v \frac{\partial}{\partial v}
$$

olacaktır. Bu simetri ile (5.2.1) Lagrange sistemi

$$
\frac{dt}{-\alpha t} = \frac{dx}{1 - \frac{\alpha}{2}t} = \frac{du}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{dv}{\alpha v}
\tag{5.2.11}
$$

olup (5.2.11) sisteminin ilk iki teriminin eşitliğinden

$$\frac{dt}{-\alpha t} = \frac{dx}{1 - \frac{\alpha}{2}t} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{x^2}{\alpha - t}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca (5.2.11) sisteminde sırasıyla 1. ve 3. ile 1. ve 4. terimlerinin eşitlikleri ele alınarak

$$u(x,t) = \frac{E(z)}{\sqrt{\alpha - t}},$$
$$v(x,t) = \frac{F(z)}{\alpha - t}$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler (5.0.1) sisteminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} 8z^{3/2}E''' + 12z^{1/2}E'' + 2z^{1/2}(E'F + EF') + zF' + F = 0, \\ 2zE' + 4z^{1/2}F' + 4z^{1/2}EE' + E = 0 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

üçüncü mertebeden ADDS bulunur.

4. durum : $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 1$ ve $c_4 = \alpha$ için (5.1.10) sonsuz küçükleri

$$\tau(t,x,u,v) = 1,$$
$$\xi(t,x,u,v) = \alpha,$$
$$\eta(t,x,u,v) = 0$$
$$\varphi(t,x,u,v) = 0$$

olup bu sonsuz küçüklere karşılık gelen simetri

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}$$

olacaktır. Yukarıdaki X simetrisi ile (5.2.1) Lagrange sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha}, \quad du = 0, \quad dv = 0$$

biçiminde olacaktır. Buradan hareketle $z = x - \alpha t$ için

$$u(x,t) = U(z)$$
$$v(x,t) = V(z)$$

çözümleri bulunur. (5.0.1) sistemi bulunan u ve v çözümleri ile düşünüldüğünde (5.0.1) sisteminden

$$\begin{aligned} U''' + UV' + U'V - \alpha V' = 0, \\ UU' - \alpha U' + V' = 0 \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

ADDS elde edilir. (5.2.13) sistemi kolaylıkla integre edilerek

$$U'' + UV - \alpha V = 0, \quad (5.2.14)$$

$$\frac{1}{2}U^2 - \alpha U + V = 0 \quad (5.2.15)$$

ikinci mertebeden ADDS'ye dönüşecektir. Bu sistemdeki (5.2.15) denkleminden

$$V = \alpha U - \frac{1}{2}U^2 \quad (5.2.16)$$

elde edilir. Buradan hareketle (5.2.16) çözümü (5.2.14) de yerine yazıldığında

$$U'' - \frac{1}{2}U^3 + \frac{3\alpha}{2}U^2 - \alpha^2 U = 0 \quad (5.2.17)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan ADD elde edilir.

5.3 En Basit Denklem Yöntemi ile Tam Çözümler

Bu alt kısımda Kudryashov'un (2005) *en basit denklem yöntemi* kullanılarak (5.2.17) denkleminin tam çözümleri elde edilecektir.

Bernoulli Denklemi : $G(z)$, (4.2.1) Bernoulli denkleminin bir çözümü olmak üzere (5.2.17) denkleminin bir çözümünün

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M} A_i \left(G(z)\right)^i \tag{5.3.1}$$

olduğu kabul edilsin. M tam sayısı (5.2.17) denkleminin lineer olmayan terimi ile en yüksek mertebeden türevli terimin arasında dengeleme yöntemi kullanıldığında M tamsayısı aşağıdaki gibi bulunur:

$$M + 2 = 3M \quad \Rightarrow \quad M = 1$$

Yani $M = 1$ için (5.3.1) çözümü

$$U(z) = A_0 + A_1 G(z), \quad A_1 \neq 0 \tag{5.3.2}$$

olacaktır. (4.2.1) ifadesi gözönüne alınarak (5.2.17) denkleminde (5.3.2) çözümü yerine yazılarak

$$\left(2A_1a^2 - \frac{1}{2}A_1^3\right) G^3 + \left(3A_1ab - \frac{3}{2}A_0A_1^2 + \frac{3}{2}\alpha A_1^2\right) G^2$$

$$+ \left(3\alpha A_0A_1 - \alpha^2 A_1 + A_1b^2 - \frac{3}{2}A_0^2A_1\right) G + \frac{3}{2}\alpha A_0^2 - \alpha^2 A_0 - \frac{1}{2}A_0^3 = 0 \tag{5.3.3}$$

denklemi bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken kısım, (5.3.3) ifadesi $G(z)$ değişkenine göre bir cebirsel polinomdur. Dolayısıyla $G(z)$ ve kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$2A_1a^2 - \frac{1}{2}A_1^3 = 0, \tag{5.3.4}$$

$$3A_1ab + \frac{3}{2}\alpha A_1^2 - \frac{3}{2}A_0A_1^2 = 0, \tag{5.3.5}$$

$$3\alpha A_0A_1 - \alpha^2A_1 + A_1b^2 - \frac{3}{2}A_0^2A_1 = 0, \tag{5.3.6}$$

$$\frac{3}{2}\alpha A_0^2 - \alpha^2A_0 - \frac{1}{2}A_0^3 = 0 \tag{5.3.7}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki (5.3.4) denkleminden

$$A_1 = \mp 2a \tag{5.3.8}$$

olduğu açıktır. (5.3.5)-(5.3.7) denklemlerinde $A_1 = 2a$ ifadesi yerine yazıldığında yukarıdaki sistem

$$b + \alpha - A_0 = 0 \tag{5.3.9}$$

$$\alpha^2 - b^2 = 0 \tag{5.3.10}$$

$$3\alpha A_0 - 2\alpha^2 - A_0^2 = 0 \tag{5.3.11}$$

sistemine dönüşür. (5.3.9) denkleminden

$$A_0 = b + \alpha \tag{5.3.12}$$

olacaktır. (5.3.12) ifadesi (5.3.11) de yerine yazılırsa

$$b = \alpha \tag{5.3.13}$$

eşitliği kolaylıkla görülür. Ayrıca (5.3.13) eşitliğinin, (5.3.10) ifadesini de sağladığı görülmektedir.

Dolayısıyla (5.3.2) çözümünün keyfi sabitleri

$$A_1 = 2a$$
$$A_0 = 2b$$
$$b = \alpha$$

biçiminde elde edilir. Buradan hareketle (5.2.16) ifadesi ile birlikte (4.2.2) den (5.2.13) denklem sisteminin çözümleri $a < 0, b > 0$ için

$$U_1(z) = 2\alpha + 2\alpha a \frac{\exp[\alpha(z+C)]}{1 - a\exp[\alpha(z+C)]},$$

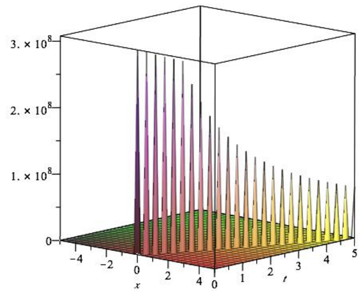
$$V_1(z) = -2\alpha^2 a \frac{\exp[\alpha(z+C)]}{(1 - a\exp[\alpha(z+C)])^2} \tag{5.3.14}$$

veya $u(x,t) = U(z), v(x,t) = V(z)$ ve $z = x - \alpha t$ olmak üzere

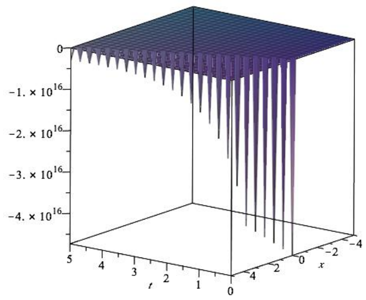
$$u_1(x,t) = 2\alpha + 2\alpha a \frac{\exp[\alpha(x - \alpha t + C)]}{1 - a\exp[\alpha(x - \alpha t + C)]}, \tag{5.3.15}$$

$$v_1(x,t) = -2\alpha^2 a \frac{\exp[\alpha(x - \alpha t + C)]}{(1 - a\exp[\alpha(x - \alpha t + C)])^2} \tag{5.3.16}$$

biçiminde olacaktır.



Şekil 5.3.1a : $C = 0$, $a = 1$, $b = \alpha = 1$ için (5.3.15) tam çözümü



Şekil 5.3.1b : $C = 0$, $a = 1$, $b = \alpha = 1$ için (5.3.16) tam çözümü

Diğer taraftan $a > 0, b < 0$ için (4.2.3) den (5.0.1) denklem sisteminin tam çözümleri

$$U_2(z) = 2\alpha - 2\alpha a \frac{\exp[-\alpha(z+C)]}{1 - a\exp[-\alpha(z+C)]},$$

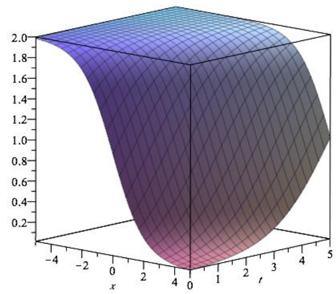
$$V_2(z) = 2\alpha^2 \frac{(2 - a\exp[-\alpha(z+C)])}{(1 - a\exp[-\alpha(x-\alpha t+C)])^2} \tag{5.3.17}$$

olur. Yani

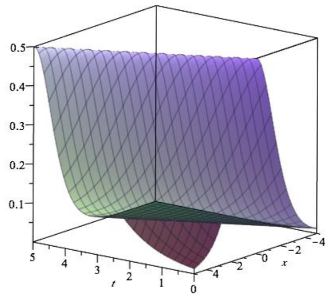
$$u_2(x,t) = 2\alpha - 2\alpha a \frac{\exp[-\alpha(x-\alpha t+C)]}{1 + a\exp\left[-\alpha(x-\alpha t+C)\right]}, \tag{5.3.18}$$

$$v_2(x,t) = -2\alpha^2 a \frac{\exp[-\alpha(x-\alpha t+C)]}{(1 - a\exp[-\alpha(x-\alpha t+C)])^2} \tag{5.3.19}$$

biçimindedir. Benzer şekilde (5.3.8) deki $A_1 = -2a$ katsayısı için de (5.3.15)-(5.3.16) çözümleri elde edilebilir.



Şekil 5.3.2a : $C = 0$, $a = 1$, $b = \alpha = 1$ için (5.3.15) tam çözümleri



Şekil 5.3.2b : $C = 0$, $a = 1$, $b = \alpha = 1$ için (5.3.16) tam çözümleri

Riccati Denklemi : $G(z)$, (4.2.2) Riccati denkleminin bir çözümü olmak üzere (5.2.17) denkleminin bir çözümü

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M} A_i \left(G(z)\right)^i \tag{5.3.20}$$

olduğu kabul edilsin. Bernoulli denkleminde olduğu gibi en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında dengeleme yöntemi kullanılarak $M = 1$ olduğu açıkça görülebilir. Yani (5.3.20) çözümü

$$U(z) = A_0 + A_1 G(z), \qquad A_1 \neq 0 \tag{5.3.21}$$

biçimindedir. (4.2.2) ifadesi gözönüne alınarak (5.2.17) denkleminde (5.3.21) çözümü yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&6a^3A_1G^4+\left(12a^2bA_1-\frac{1}{2}A_1^3\right)G^3+\left[(8a^2d+7ab^2)A_1-\frac{3}{2}A_0A_1^2+\frac{3}{2}\alpha A_1^2\right]G^2\\
&+\left[(8abd+b^3)A_1-\frac{3}{2}A_0^2A_1+3\alpha A_0A_1-\alpha^2A_1\right]G\\
&(2ad^2+b^2d)A_1-\frac{1}{2}A_0^3+\frac{3}{2}\alpha A_0^2-\alpha^2A_0=0
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Bu denklem G nin bir cebirsel polinomu olup G ve kuvvetlerinin keyfi katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$6a^3A_1=0 \tag{5.3.22}$$

$$12a^2bA_1-\frac{1}{2}A_1^3=0 \tag{5.3.23}$$

$$(8a^2d+7ab^2)A_1-\frac{3}{2}A_0A_1^2+\frac{3}{2}\alpha A_1^2=0 \tag{5.3.24}$$

$$(8abd+b^3)A_1-\frac{3}{2}A_0^2A_1+3\alpha A_0A_1-\alpha^2A_1=0 \tag{5.3.25}$$

$$(2ad^2+b^2d)A_1-\frac{1}{2}A_0^3+\frac{3}{2}\alpha A_0^2-\alpha^2A_0=0 \tag{5.3.26}$$

denklem sistemi elde edilir. (5.3.22) denkleminden açıkça görülebilir ki $A_1=0$ olmalıdır. Ancak bu durum (5.3.21)'de kabul edilen çözümün yapısı ile çelişir. Bu nedenle (5.2.17) denklemi için Riccati denklemi yardımcı denklem olarak kullanılamaz.

5.4 Çarpan Yöntemi ile Korunum Kanunları

Bu kısımda (5.0.1) sisteminin korunum kanunlarını bulmak için çarpan yöntemi kullanılacaktır.

Buradan hareketle (5.0.1) sisteminin korunum vektörleri (3.2.1) karakteristik formundaki Λ_i çarpanları ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$D_t(T^t)+D_x(T^x)=\Lambda^1(v_t+vu_x+uv_x+u_{xxx})+\Lambda^2(u_t+v_x+uu_x) \tag{5.4.1}$$

(5.4.1) ifadesindeki $\Lambda^1 = \Lambda^1(t, x, u, v, u_x, u_{xx})$ ve $\Lambda^2 = \Lambda^2(t, x, u, v, u_x, u_{xx})$ çarpanları için belirleyici denklemler (3.2.2) ifadesinden

$$0 = \frac{\delta}{\delta u}\left[\Lambda^1(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2(u_t + v_x + uu_x)\right] \tag{5.4.2}$$

$$0 = \frac{\delta}{\delta v}\left[\Lambda^1(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2(u_t + v_x + uu_x)\right] \tag{5.4.3}$$

biçimindedir. (5.4.2) ve (5.4.3) ifadeleri, (3.3.3) varyasyonel türev tanımından yararlanarak açıldığında

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}\right]\left[\Lambda^1(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2(u_t + v_x + uu_x)\right]$$

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial v} - D_t\frac{\partial}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial}{\partial v_x}\right]\left[\Lambda^1(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2(u_t + v_x + uu_x)\right]$$

sistemine dönüşür. Yani

$$\begin{aligned}
0 = &\left[\Lambda^1_u(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2_u(u_t + v_x + uu_x) + \Lambda^1(v_x) + \Lambda^2(u_x)\right] - D_t\left[\Lambda^2\right] \\
&- D_x\left[\Lambda^1_{u_x}(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2_{u_x}(u_t + v_x + uu_x) + \Lambda^1(v) + \Lambda^2(u)\right] \\
&+ D_x^2\left[\Lambda^1_{u_{xx}}(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2_{u_{xx}}(u_t + v_x + uu_x)\right] \\
&- D_x^3\left[\Lambda^1_{u_{xxx}}(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2_{u_{xxx}}(u_t + v_x + uu_x) + \Lambda^1\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &\left[\Lambda^1_v(v_t + vu_x + uv_x + u_{xxx}) + \Lambda^2_v(u_t + v_x + uu_x) + \Lambda^1(u_x)\right] \\
&- D_t\left[\Lambda^1\right] - D_x\left[\Lambda^1(u) + \Lambda^2\right]
\end{aligned}$$

dir. Buradaki işlemler karmaşık ve uzun olduğu için MAPLE programı kullanılarak Λ_1

ve Λ_2 için belirleyici denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\Lambda^2_{tt} = 0, \qquad \Lambda^2_{vu_{xx}} = 0, \qquad \Lambda^2_{v_{xx}v_{xx}} = 0,$$

$$\Lambda^2_{tv} = \frac{1}{v}\Lambda^2_t, \qquad \Lambda^2_{vv_{xx}} = 0, \qquad \Lambda^1_x = -\frac{1}{v}\Lambda^2_t$$

$$\Lambda^2_{tu_{xx}} = 0, \qquad \Lambda^2_{u_{xx}u_{xx}} = 0, \qquad \Lambda^2_x = 0,$$

$$\Lambda^2_{vv} = \frac{3}{2}\Lambda^2_{v_{xx}}, \qquad \Lambda^2_{u_{xx}v_{xx}} = 0, \qquad \Lambda^1_t = \frac{u}{v}\Lambda^2_t,$$

$$\Lambda^1_u = \Lambda^2_v, \qquad \Lambda^2_u = \frac{3}{2}u_{xx}\Lambda^2_{v_{xx}} + v\Lambda^2_{u_{xx}}, \qquad \Lambda^1_v = \Lambda^2_{u_{xx}},$$

$$\Lambda^1_{u_x} = 0, \qquad \Lambda^2_{u_x} = \frac{3}{2}u_x\Lambda^2_{v_{xx}}, \qquad \Lambda^1_{u_{xx}} = \Lambda^2_{v_{xx}},$$

$$\Lambda^1_{v_x} = 0, \qquad \Lambda^2_{v_x} = 0, \qquad \Lambda^1_{v_{xx}} = 0.$$

Yukarıdaki belirleyici denklemleri çözüldüğünde (5.0.1) sisteminin çarpanları

$$\Lambda^1 = \frac{1}{6}c_2u^3 + \frac{1}{2}c_3u^2 + (c_1t + c_2v + c_4)u - c_1x + \frac{2}{3}c_2u_{xx} + c_2v + c_6,$$

$$\Lambda^2 = \frac{c_2}{6}(6uu_{xx} + 3u_x^2 + 4v_{xx} + 3u^2v + 3v^2) + (c_1t + c_4 + c_3u)v + c_5 + c_3u_{xx}$$

olarak bulunur. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_6$ sabitlerine karşılık gelen altı korunum vektörü

$$\begin{aligned} T^t_1 =& tuv - xv, \\ T^x_1 =& -\frac{1}{2}tu_x^2 + u_x + \frac{1}{2}tv^2 + tu^2v - xuv + tuu_{xx} - xu_{xx}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_2^t =& \frac{1}{6}u^3v + \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{3}u^2u_{xx} + \frac{1}{6}uu_x^2 + \frac{1}{3}u_{xxx}v + \frac{1}{3}uv_{xx},\\
T_2^x =& \frac{1}{3}u_tv_x + \frac{1}{3}v_x^2 - \frac{1}{6}u_x^2v + \frac{1}{3}u_{xx}^2 + \frac{1}{3}u_xv_t - \frac{1}{3}u_{tx}v - \frac{1}{3}uv_{tx} + \frac{1}{4}u^2u_x^2 + \frac{1}{6}u^4v\\
& \frac{1}{6}u^3u_{xx} + \frac{1}{3}uu_tu_x + \frac{1}{6}v^3 - \frac{1}{3}u^2u_{tx} + \frac{3}{4}u^2v^2 + \frac{2}{3}uu_xv_x + uu_{xx}v;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3^t =& \frac{1}{2}u^2v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}uu_{xx},\\
T_3^x =& \frac{1}{2}u^2u_{xx} + u_{xx}v + \frac{1}{2}u_tu_x + \frac{1}{2}u^3v - \frac{1}{2}uu_{tx};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_4^t =& uv,\\
T_4^x =& -\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v^2 + uu_{xx} + u^2v;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_5^t =& u,\\
T_5^x =& \frac{1}{2}u^2 + v;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_6^t =& v,\\
T_6^x =& uv + u_{xx}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Benzer şekilde, 2. bölümünde bahsedildiği gibi Cheviakov (2007) tarafından Λ çarpanlarının hesaplanmasını kolaylaştırmak amacıyla MAPLE programına GeM adlı paket program yazılmıştır. Elde edilen korunum kanunları ve vektörleri bu paket program ile karşılaştırılarak sonuçlar teyit edilmiştir.

6. SCHAMEL-KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ

Bu bölümde iyon-akustik dalgaların lineer olmayan etkileşimi üzerine elektron yakalama etkisinin incelenmesinde önemli bir rol oynayan

$$u_t + \left(\alpha u^{1/2} + \beta u\right) u_x + \delta u_{xxx} = 0, \quad \beta\delta \neq 0 \tag{6.0.1}$$

Schamel-Korteweg-de Vries (S-KdV) denkleminin integrallenebilme durumları incelenmiştir. Literatür incelendiğinde Togare ve Chakraborty (1974) doğrudan integral alma yöntemi ile (6.0.1) denkleminin yalnız dalga çözümlerini elde etmişlerdir. Lee ve Sakthivel (2011) tarafından (6.0.1) denklemi için bazı tam ilerleyen dalga çözümleri verilmiştir. Ayrıca en genel Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, çeşitli matematiksel fizik alanında incelenen (6.0.1) denkleminin bir özel durumudur.

Örneğin (6.0.1) denkleminde $\beta = 0$ olduğunda

$$u_t + \alpha u^{1/2} u_x + \delta u_{xxx} = 0$$

Schamel denklemi ve $\alpha = 0$ olduğunda da

$$u_t + \beta u u_x + \delta u_{xxx} = 0$$

çok iyi bilinen KdV denklemi olduğu açıkça görülebilir.

6.1 Lie Grup Analizi

(6.0.1) S-KdV denkleminin (2.1.10) Lie nokta simetri üreteci

$$X = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{6.1.1}$$

olsun. (6.0.1) için değişmezlik prensibi

$$X^{(3)}\left(u_t+(\alpha u^{1/2}+\beta u)u_x+\delta u_{xxx}\right)|_{(6.0.1)}=0 \tag{6.1.2}$$

biçimindedir. Buradaki $X^{(3)}$, (6.1.1) üretecinin 3. uzanımı olup

$$X^{(3)}=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial u}+\zeta^t\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta^x\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\zeta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \tag{6.1.3}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca (6.1.3) uzatılmış simetrisindeki ζ^t, ζ^x, ζ^{xx}, ζ^{xxx} katsayı fonksiyonları

$$\zeta^t=D_t(\eta)-u_tD_t(\tau)-u_xD_t(\xi)$$

$$\zeta^x=D_x(\eta)-u_tD_x(\tau)-u_xD_x(\xi)$$

$$\zeta^{xx}=D_x(\zeta^x)-u_{tx}D_x(\tau)-u_{xx}D_x(\xi)$$

$$\zeta^{xxx}=D_x(\zeta^{xx})-u_{txx}D_x(\tau)-u_{xxx}D_x(\xi) \tag{6.1.4}$$

biçimindedir. (6.1.3) ve (6.1.4) ifadeleri gözönüne alınarak (6.1.2) değişmezlik prensibi

$$\begin{aligned}
&-\tau_u u_t^2-\tau_{uuu}u_tu_x^3-3\tau_{xuu}u_tu_x^2-\left(\beta u\tau_u+3\delta\tau_{xxu}+\alpha\sqrt{u}\tau_u\right)u_tu_x-\delta\xi_{uuu}u_x^4\\
&-\left(\beta u\tau_x+\delta\tau_{xxx}+\alpha\sqrt{u}\tau_x-\eta_u+\tau_t\right)u_t+\delta\left(\eta_{uuu}-3\xi_{xuu}\right)u_x^3-\tau_{uu}u_x^2u_{tx}\\
&-\left(\beta u\xi_u+3\delta\xi_{xxu}-3\delta\eta_{xuu}+\alpha\sqrt{u}\xi_u\right)u_x^2-2\delta\tau_{xu}u_xu_{tx}-2\delta\xi_{xu}u_xu_{xx}\\
&-\delta\tau_uu_xu_{txx}-\delta\xi_uu_xu_{xxx}-\delta\tau_{xx}u_{tx}-\delta\xi_{xx}u_{xx}-\delta\tau_xu_{txx}-\delta\xi_xu_{xxx}\\
&+\left(\beta u\eta_u-\beta u\xi_x+3\delta\eta_{xxu}-\delta\xi_{xxx}+\beta\eta+\alpha\sqrt{u}\eta_u-\alpha\sqrt{u}\xi_x-\xi_t+\alpha\eta\right)u_x\\
&-\delta\xi_{uu}u_x^2u_{xx}+\beta u\eta_x+\delta\eta_{xxx}+\alpha\sqrt{u}\eta_x+\eta_t=0
\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

olarak elde edilir. (6.1.5) ifadesi $u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{txx}, u_{xxx}$ terimleri ve çeşitli kombinasyonlarına göre cebirsel polinom olarak yazılmıştır. (6.1.5) de η, ξ, τ sonsuz küçükleri x, t, u değişkenlerine bağlı olduğundan (6.1.5) in her bir türev katsayısı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki belirleyici denklem sistemi oluşturulabilir:

$$\delta\tau_u = \delta\tau_x = 0,$$

$$\delta\xi_u = \delta\xi_x = 0,$$

$$\delta\eta_{uuu} = 0,$$

$$\beta u\tau_u + 3\delta\tau_{xxu} + \alpha\sqrt{u}\tau_u + \xi_u = 0,$$

$$\beta u\tau_x + \beta\tau_{xxx} + \alpha\sqrt{u}\tau_x - \eta_u + \tau_t = 0,$$

$$\beta u\xi_u + 3\delta\xi_{xxu} - 3\delta\eta_{xuu} + \alpha\sqrt{u}\xi_u = 0,$$

$$\beta u\eta_u - \beta u\xi_x + 3\delta\eta_{xxu} - \delta\xi_{xxx} + \beta\eta + \alpha\sqrt{u}\eta_u - \alpha\sqrt{u} - \xi_t + \alpha\eta = 0,$$

$$\beta u\eta_x + \delta\eta_{xxx} + \alpha\sqrt{u}\eta_x + \eta_t = 0. \tag{6.1.6}$$

(6.1.6) belirleyici denklem sistemi MAPLE yardımıyla çözüldüğünde üç durum ortaya çıkar:

1. durum : α, β, δ sabitleri için (6.1.6)'nın çözümleri

$$\tau(x,t,u) = c_1, \quad \xi(x,t,u) = c_2, \quad \eta(x,t,u) = 0$$

bulunur ki, buradan c_1, c_2 keyfi sabitleri için iki simetri üreteci vardır:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{6.1.7}$$

2. durum : $\beta = 0$ ve α, δ sabitleri keyfi olmak üzere (6.1.6) nin çözümleri

$$\tau(x,t,u) = c_1 + 3c_3 t, \quad \xi(x,t,u) = c_2 + c_3 x, \quad \eta(x,t,u) = -2c_3 u$$

biçimindedir. c_1, c_2, c_3 keyfi sabitleri için

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \tag{6.1.8}$$

simetri üreteçleri elde edilir.

3. durum : β, δ sabitleri ve $\alpha = 0$ için (6.1.6)'nın çözümleri

$$\tau(x,t,u) = c_1 + 3c_4 t, \quad \xi(x,t,u) = c_2 + 2c_3\beta t + c_4 x, \quad \eta(x,t,u) = \frac{c_3}{u} - c_4 u$$

biçimindedir. c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitleri için aşağıdaki Lie nokta üreteçleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
X_1 =& \frac{\partial}{\partial t}, \\
X_2 =& \frac{\partial}{\partial x} \\
X_3 =& 2\beta t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}, \\
X_4 =& 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

6.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi ile Tam Çözümler

3. bölümde teorisi verilen genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi (6.0.1) denklemi için adım adım uygulandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. adım : (6.0.1) denkleminde, integrallenebilmeyi kolaylaştırmak amacıyla $u(x,t) = v^2(x,t)$ dönüşümü yapılırsa

$$vv_t + \alpha v^2 v_x + \beta v^3 v_x + 3\delta v_x v_{xx} + \delta v v_{xxx} = 0 \tag{6.2.1}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca $\xi = kx - \omega t$ ve $v(x,t) = V(\xi)$ dalga değişkeni ile (6.2.1) denklemi

$$-\omega VV' + k(\alpha V^2 + \beta V^3)V' + k^3\delta(VV'' + 3V'V'') = 0 \tag{6.2.2}$$

ADD'ye dönüşür ki, bu denklem integre edildiğinde

$$-\frac{\omega}{2}V^2 + \frac{k\alpha}{3}V^3 + \frac{k\beta}{4}V^4 + k^3\delta\left(V'^2 + VV''\right) = 0 \tag{6.2.3}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan ADD elde edilir.

2. adım : (6.2.3) lineer olmayan ADD nin bir çözümü

$$V(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q(\xi) + a_2 Q^2(\xi) + \ldots + a_N Q^N(\xi)}{b_0 + b_1 Q(\xi) + b_2 Q^2(\xi) + \ldots + b_M Q^M(\xi)}$$

formunda olsun. (6.2.3) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer olmayan terimi V^4 ile en yüksek türevli terimi VV'' arasında dengeleme yöntemi uygulandığında $N = 2$ ve $M = 1$ olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla (6.2.3) denkleminin bir çözümü

$$V(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q(\xi) + a_2 Q^2(\xi)}{b_0 + b_1 Q(\xi)} \tag{6.2.4}$$

biçimindedir. Ayrıca Q fonksiyonu $Q_\xi = Q^2 - Q$ denkleminin çözümü olup $Q(\xi) = \frac{1}{1 \mp e^{\xi}}$ biçiminde verilir.

3. adım : $Q_\xi = Q^2 - Q$ ifadesini gözönüne alarak (6.2.4) çözümü (6.2.3) denkleminde yerine yazıldığında

$$\left(3k\beta a_2^4 + 36k^3\delta a_2^2 b_1^1\right) Q(\xi)^8 + (4k\alpha a_2^3 b_1 - 60k^3\delta a_2^2 b_1^2 + 12k\beta a_1 a_2^3 + 24k^3\delta a_1 a_2 b_1^2$$
$$+ 120k^3\delta a_2^2 b_0 b_1)Q(\xi)^7 + (24k^3\delta a_2^2 b_1^2 + 12k\alpha a_1 a_2^2 b_1 + 12k\beta a_0 a_2^3 + 18k\beta a_1^2 a_2^2$$
$$- 204k^3\delta a_2^2 b_0 b_1 - 6\omega a_2^2 b_1^2 + 96k^3\delta a_1 b_0 b_1 + 4k\alpha a_2^3 b_0 - 36k^3\delta a_1 a_2 b_1^2 + 120k^3\delta a_2^2 b_0^2)Q(\xi)^6$$
$$+ (-216k^3\delta a_2^2 b_0^2 + 12k\alpha a_1 a_2^2 b_0 - 12\omega a_1 a_2 b_1^2 - 12\omega a_2^2 b_0 b_1 + 84k^3\delta a_2^2 b_0 b_1$$
$$+ 36k\beta a_0 a_1 a_2^2 + 12k\beta a_1^3 a_2 + 12k\alpha a_0 a_2^2 b_1 + 12k^3\delta a_1 a_2 b_1^2 + 12k\alpha a_1^2 a_2 b_1$$
$$- 144k^3\delta a_1 a_2 b_0 b_1 + 144k^3\delta a_1 a_2 b_0^2)Q(\xi)^5 + (12k\alpha a_0 a_2^2 b_0 + 3k\beta a_1^4 + 96k^3\delta a_2^2 b_0^2$$
$$- 12k^3\delta a_0 a_1 b_1^2 + 12k\alpha a_1^2 a_2 b_0 - 12\omega a_0 a_2 b_1^2 - 48k^3\delta a_0 a_1 b_0 b_1 + 36k\beta a_0 a_1^2 + 4k\alpha a_1^3 b_1$$
$$- 252k^3\delta a_1 a_2 b_0^2 - 6\omega a_1^2 b_1^2 - 6\omega a_2^2 b_0^2 - 24\omega a_1 a_2 b_0 b_1 + 12k^3\delta a_1^2 b_0 b_1 + 12k^3\delta a_0^2 b_1^2$$
$$+ 36k^3\delta a_1^2 b_0^2 + 72k^3\delta a_0 a_2 b_0^2 + 24k\alpha a_0 a_1 a_2 b_1 + 24k^3\delta a_0 a_2 b_0 b_1 + 18k\beta a_0^2 a_2^2$$
$$+ 48k^3\delta a_1 a_2 b_0 b_1)Q(\xi)^4 + (12k\alpha a_0 a_1^2 b_1 + 32k\beta a_0^2 a_1 a_2 + 24k^3\delta a_0 a_1 b_0^2 + 108k^3\delta a_1 a_2 b_0^2$$
$$- 60k^3\delta a_1^2 b_0^2 + 4k\alpha a_1^3 b_0 - 24k^3\delta a_0^2 b_0 b_1 - 12k^3\delta a_1^2 b_0 b_1 + 24k\alpha a_0 a_1 a_2 b_0 - 12\omega a_1^2 b_0 b_1$$
$$- 12\omega a_1 a_2 b_0^2 + 12k^3\delta a_0 a_1 b_1^2 - 120k^3\delta a_0 a_2 b_0^2 + 24k^3\delta a_0 a_2 b_0 b_1 - 24\omega a_0 a_2 b_0 b_1$$
$$+ 12k\alpha a_0^2 a_2 b_1 + 96k^3\delta a_0 a_1 b_0 b_1 + 12k\beta a_0 a_1^3 - 12\omega a_0 a_1 b_1^2 - 36k^3\delta a_0^2 b_1^2)Q(\xi)^3$$
$$+ (-36k^3\delta a_0 a_1 b_0^2 + 24k^3\delta a_0^2 b_1^2 - 12\omega a_0 a_2 b_0^2 - 6\omega a_1^2 b_0^2 + 12k\alpha a_0 a_1^2 b_0 + 36k^3\delta a_0^2 b_0 b_1$$
$$+ 18k\beta a_0^2 b_1^2 - 24\omega a_0 a_1 b_0 b_1 + 24k^3\delta a_1^2 b_0^2 + 48k^3\delta a_0 a_2 b_0^2 + 12k\beta a_0^3 a_2 - 48k^3\delta a_0 a_1 b_0 b_1$$
$$- 6\omega a_0^2 b_1^2 + 12k\alpha a_0^2 a_2 b_0 + 12k\alpha a_0^2 a_1 b_1)Q(\xi)^2 + (-12k^3\delta a_0^2 b_0 b_1 - 12\omega a_0 a_1 b_0^2$$
$$+ 12k\beta a_0^3 a_1 + 12k\alpha a_0^2 a_1 b_0 + 12k^3\delta a_0 a_1 b_0^2 - 12\omega a_0^2 b_0 b_1 + 4k\alpha a_0^3 b_1)Q(\xi)$$
$$+ (3k\beta a_0^4 + 4k\alpha a_0^3 b_0 - 6\omega a_0^2 b_0^2) = 0 \qquad (6.2.5)$$

denklemi elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken kısım her bir $\frac{dQ}{d\xi}$ türevi için $Q_\xi = Q^2 - Q$ ifadesinin kullanılmasıdır.

4. adım : (6.2.5) denklemi, Q yardımcı fonksiyonuna göre polinom biçiminde ifade edilebildiğinden Q ve kuvvetlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki belirleyici denklem sistemi elde edilir (Aşağıdaki denklemlerde basit cebirsel düzenlemeler yapılmıştır.):

$$\mathbf{Q^8}(\xi): \quad \beta a_2^2 + 12k^2\delta b_1^1 = 0,$$

$$\mathbf{Q^7}(\xi): \quad \alpha a_2^2 b_1 - 15k^2\delta a_2 b_1^2 + 3\beta a_1 a_2^2 + 6k^2\delta a_1 b_1^2 + 30k^2\delta a_2 b_0 b_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q^6}(\xi): \quad & 24k^3\delta a_2^2 b_1^2 + 12k\alpha a_1 a_2^2 b_1 + 12k\beta a_0 a_2^3 + 18k\beta a_1^2 a_2^2 - 204k^3\delta a_2^2 b_0 b_1 - 6\omega a_2^2 b_1^2 \\ & + 96k^3\delta a_1 b_0 b_1 + 4k\alpha a_2^3 b_0 - 36k^3\delta a_1 a_2 b_1^2 + 120k^3\delta a_2^2 b_0^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q^5}(\xi): \quad & -18k^3\delta a_2 b_0^2 + k\alpha a_1 a_2 b_0 - \omega a_1 b_1^2 - \omega a_2 b_0 b_1 + 7k^3\delta a_2 b_0 b_1 \\ & + 3k\beta a_0 a_1 a_2 + k\beta a_1^3 + k\alpha a_0 a_2 b_1 + k^3\delta a_1 b_1^2 + k\alpha a_1^2 b_1 \\ & - 12k^3\delta a_1 b_0 b_1 + 12k^3\delta a_1 b_0^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q^4}(\xi): \quad & 12k\alpha a_0 a_2^2 b_0 + 3k\beta a_1^4 + 96k^3\delta a_2^2 b_0^2 - 12k^3\delta a_0 a_1 b_1^2 + 12k\alpha a_1^2 a_2 b_0 - 12\omega a_0 a_2 b_1^2 \\ & - 48k^3\delta a_0 a_1 b_0 b_1 + 36k\beta a_0 a_1^2 + 4k\alpha a_1^3 b_1 - 252k^3\delta a_1 a_2 b_0^2 - 6\omega a_1^2 b_1^2 - 6\omega a_2^2 b_0^2 \\ & - 24\omega a_1 a_2 b_0 b_1 + 12k^3\delta a_1^2 b_0 b_1 + 12k^3\delta a_0^2 b_1^2 + 36k^3\delta a_1^2 b_0^2 + 72k^3\delta a_0 a_2 b_0^2 \\ & + 24k\alpha a_0 a_1 a_2 b_1 + 24k^3\delta a_0 a_2 b_0 b_1 + 18k\beta a_0^2 a_2^2 + 48k^3\delta a_1 a_2 b_0 b_1 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q^3}(\xi): \quad & 3k\alpha a_0 a_1^2 b_1 + 8k\beta a_0^2 a_1 a_2 + 6k^3\delta a_0 a_1 b_0^2 + 27k^3\delta a_1 a_2 b_0^2 - 15k^3\delta a_1^2 b_0^2 \\ & + k\alpha a_1^3 b_0 - 6k^3\delta a_0^2 b_0 b_1 - 3k^3\delta a_1^2 b_0 b_1 + 6k\alpha a_0 a_1 a_2 b_0 - 3\omega a_1^2 b_0 b_1 \\ & - 3\omega a_1 a_2 b_0^2 + 3k^3\delta a_0 a_1 b_1^2 - 30k^3\delta a_0 a_2 b_0^2 + 6k^3\delta a_0 a_2 b_0 b_1 - 6\omega a_0 a_2 b_0 b_1 \\ & + 3k\alpha a_0^2 a_2 b_1 + 24k^3\delta a_0 a_1 b_0 b_1 + 3k\beta a_0 a_1^3 - 3\omega a_0 a_1 b_1^2 - 9k^3\delta a_0^2 b_1^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q^2}(\xi): \quad & -6k^3\delta a_0 a_1 b_0^2 + 4k^3\delta a_0^2 b_1^2 - 2\omega a_0 a_2 b_0^2 - \omega a_1^2 b_0^2 + 2k\alpha a_0 a_1^2 b_0 \\ & + 6k^3\delta a_0^2 b_0 b_1 + 3k\beta a_0^2 b_1^2 - 4\omega a_0 a_1 b_0 b_1 + 4k^3\delta a_1^2 b_0^2 + 8k^3\delta a_0 a_2 b_0^2 \\ & + 2k\beta a_0^3 a_2 - 8k^3\delta a_0 a_1 b_0 b_1 - \omega a_0^2 b_1^2 + 2k\alpha a_0^2 a_2 b_0 + 2k\alpha a_0^2 a_1 b_1 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\xi): \quad & -3k^3\delta a_0 b_0 b_1 - 3\omega a_1 b_0^2 + 3k\beta a_0^2 a_1 + 3k\alpha a_0 a_1 b_0 + 3k^3\delta a_1 b_0^2 \\ & -3\omega a_0 b_0 b_1 + k\alpha a_0^2 b_1 = 0,\end{aligned}$$

$$\textbf{sabit}: \quad 3k\beta a_0^2 + 4k\alpha a_0 b_0 - 6\omega b_0^2 = 0. \tag{6.2.6}$$

5. adım : (6.2.6) sistemi MAPLE yardımı ile çözüldüğünde

$$a_2 = \frac{-4\alpha}{5\beta}b_0, \qquad a_1 = \frac{8\alpha}{5\beta}b_0, \qquad a_0 = \frac{-4\alpha}{5\beta}b_0$$

$$b_1 = -2b_0, \qquad b_o \in \mathbb{R}, \tag{6.2.7}$$

$$k = \frac{\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}, \qquad \omega = \frac{-16\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$$

katsayıları bulunur. Yani (6.2.4) çözümü, $Q(\xi) = \frac{1}{1\mp e^{\xi}}$ olmak üzere

$$V(\xi) = \frac{4\alpha(Q-1)^2}{5\beta(2Q-1)} = \frac{4\alpha\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\xi}} - 1\right)^2}{5\beta\left(\dfrac{2}{1\mp e^{\xi}} - 1\right)}$$

olacaktır. Diğer bir deyişle

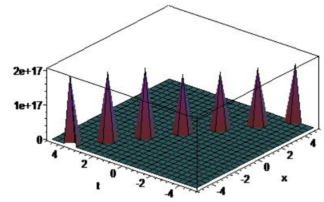
$$v(x,t) = \frac{4\alpha\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\left(\frac{\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}\right)x + \left(\frac{16\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}\right)t}} - 1\right)^2}{5\beta\left(\dfrac{2}{1\mp e^{\left(\frac{\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}\right)x + \left(\frac{16\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}\right)t}} - 1\right)} \tag{6.2.8}$$

dir. Benzer şekilde (6.2.6) sisteminin diğer çözümlerine karşılık gelen tam çözümleri hesaplanarak Çizelge 6.2.1 de verilmiştir. Bu çizelgede söz konusu olan bazı çözümlerin nümerik simülasyonları Şekil 6.2.1a-b-c-d-e olarak verilmiştir.

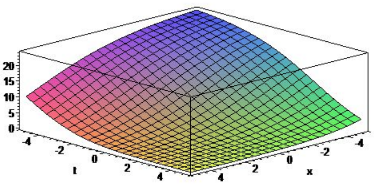
Çizelge 6.2.1 : (6.2.6) sisteminin çözümlerinden elde edilen a_2, a_1, a_0 ve b_1, b_0 kaysayıları ile (6.2.1) denkleminin çözümleri

a_2	a_1	a_0	b_1	b_0	k	w	$v(x,t)=V(\xi)$
0	0	a_0	0	b_0	k	$\frac{k(3\beta a_0+4\alpha b_0)a_0}{6b_0^2}$	$V_1=\frac{a_0}{b_0}$
$\frac{-2\alpha b_1}{5\beta}$	0	0	b_1	$\frac{-b_1}{2}$	$\frac{\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}$	$\frac{-16\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$	$V_2=\frac{-4\alpha Q^2}{5\beta\,(2Q-1)}$
a_2	a_1	0	$\frac{-5\beta a_2}{4\alpha}$	$\frac{-5\beta a_1}{4\alpha}$	$\frac{2\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}$	$\frac{-32\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$	$V_3=\frac{-4\alpha}{\beta}Q$
$-a_1$	a_1	0	$\frac{-a_1\sqrt{-3\beta\delta}}{6k\delta}$	$\frac{a_1\left(2\alpha+5k\sqrt{-3\beta\delta}\right)}{60k^2\delta}$	k	$4k^3\delta$	$V_4=\frac{60k^2\delta Q(Q-1)}{-2\alpha+5k\sqrt{-3\beta\delta}(2Q-1)}$
$\frac{-4\alpha b_0}{5\beta}$	$\frac{8\alpha b_0}{5\beta}$	$\frac{-4\alpha b_0}{5\beta}$	$-2b_0$	b_0	$\frac{\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}$	$\frac{-16\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$	$V_5=\frac{4\alpha\,(Q-1)^2}{5\beta(2Q-1)}$
a_2	$\frac{-3a_2}{4}$	$\frac{-a_2}{4}$	$\frac{5\beta a_2}{4\alpha}$	$\frac{5\beta a_2}{16\alpha}$	$\frac{2\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}$	$\frac{-32\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$	$V_{6,7}=\frac{4\alpha}{5\beta}(Q-1)$
$\frac{4\alpha b_1}{5\beta}$	a_1	$-a_1-\frac{4\alpha b_1}{5\beta}$	b_1	$\frac{5\beta a_1}{4\alpha}+b_1$	$\frac{2\alpha}{5\sqrt{-3\beta\delta}}$	$\frac{-32\alpha^3}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$	

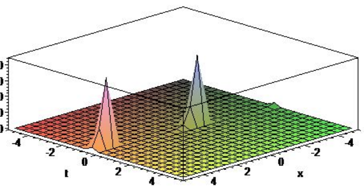
(Burada $Q(\xi)=\frac{1}{1\mp e^{\xi}}$, $Q_\xi=Q^2-Q$ ve $\xi=\frac{\alpha x}{5\sqrt{-3\beta\delta}}+\frac{16\alpha^3 t}{375\beta\sqrt{-3\beta\delta}}$ dir.)



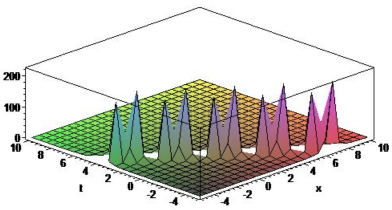
Şekil 6.2.1a : $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -3$ için V_2



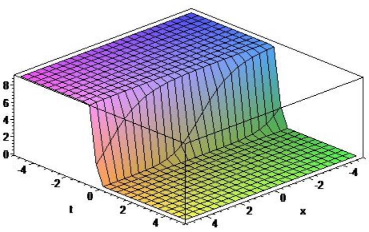
Şekil 6.2.1b : $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -3$ için V_3



Şekil 6.2.1c : $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -3, k = 1$ için V_4



Şekil 6.2.1d : $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -3$ için V_5



Şekil 6.2.1e : $\alpha = -15, \beta = 4, \gamma = -3$ için $V_{6,7}$

6.3 En Basit Denklem Yöntemi ile Tam Çözümler

$G(z)$, en basit denklemi (4.2.1) (veya (4.2.2)) sağlayan bir fonksiyon olmak üzere (6.2.3) denkleminin çözümü

$$V(z) = \sum_{i=0}^{M} A_i \left(G(z)\right)^i, \tag{6.3.1}$$

olsun. Burada M pozitif sayısı en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında dengeleme yöntemi ile $M = 1$ elde edilir. Dolayısıyla (6.3.1) çözümü

$$V(z) = A_0 + A_1 G(z). \tag{6.3.2}$$

olur.

Bernoulli Denklemi : (4.2.1) eşitliği gözönüne alınarak (6.2.3) denkleminde (6.3.3) yerine yazıldığında

$$\left(3k^3\delta A_1^2 a^2 + \frac{\beta k A_1^4}{4}\right) G^4 + \left(2k^3\delta A_1 A_0 a^2 + \frac{k\alpha A_1^3}{3} + 5k^3\delta A_1^2 ab + \beta k A_0 A_1^3\right) G^3$$
$$+ \left(-\frac{\omega A_1^2}{2} + 2k^3\delta A_1^2 b^2 + k\alpha A_0 A_1^2 + 3k^3\delta A_1 A_0 ab + \frac{3\beta k A_0^2 A_1^2}{2}\right) G^2$$
$$\left(-\omega A_0 A_1 + k\alpha A_0^2 A_1 + k^3\delta A_1 A_0 b^2 + \beta k A_0^3 A_1\right) G - \frac{\omega A_0^2}{2} + \frac{k\alpha A_0^3}{3} + \frac{\beta k A_0^4}{4} = 0$$

G'nin bir cebirsel polinomu elde edilir. Polinomların eşitliğinden elde edilen polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir. (Aşağıdaki sistem elde edilirken basit cebirsel işlemler yapılmıştır.)

$$12\delta a^2 k^2 + \beta A_1^2 = 0$$

$$A_1^2\alpha + 3A_1^2\beta A_0 + 15\delta abk^2 A_0 + 6\delta A_0 a^2 k^2 = 0$$

$$-\omega A_1 + 4k^3b^2\delta A_1 + 2k\alpha A_0 A_1 + 6k^3ab\delta A_0 + 3k\beta A_0^2 A_1 = 0$$

$$-\omega + k\alpha A_0 + k^3b^2\delta + k\beta A_0^2 = 0$$

$$-6\omega + 4k\alpha A_0 + 3k\beta A_0^2 = 0. \tag{6.3.3}$$

(6.3.3) belirleyici denklem sistemi MAPLE yardımı ile çözüldüğünde

$$\begin{aligned}
&A_1 = \mp\frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}, \quad A_{01} = 0, \quad && \omega = 4k^3b^2\delta, \quad \alpha = \mp\frac{5kb}{2}\sqrt{-3\beta\delta} \\
&A_1 = \mp\frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}, \quad A_{02} = \pm\frac{kb}{2\beta}\sqrt{-3\beta\delta}, \quad && \omega = 4k^3b^2\delta, \quad \alpha = \mp\frac{5kb}{2}\sqrt{-3\beta\delta} \\
&A_1 = \mp\frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}, \quad A_{03} = \pm\frac{2kb}{\beta}\sqrt{-3\beta\delta}, \quad && \omega = 4k^3b^2\delta, \quad \alpha = \mp\frac{5kb}{2}\sqrt{-3\beta\delta}
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

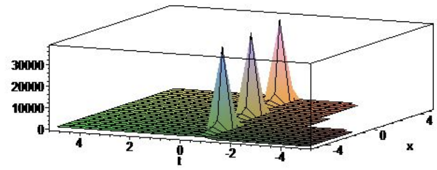
çözümleri bulunur. (4.2.3)'deki G fonksiyonunu gözönüne alarak (6.3.4)'de bulunan katsayıları sırasıyla (6.3.3)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
V_{11}(z) &= \mp\frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}G(z) \\
&= \mp\frac{6kab\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}\left(\frac{\exp\left[b(z+C)\right]}{1 - a\exp\left[b(z+C)\right]}\right),
\end{aligned}$$

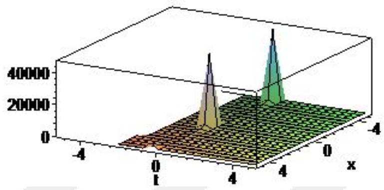
$$\begin{aligned}
V_{12}(z) &= \pm\frac{kb}{2\beta}\sqrt{-3\beta\delta} \mp \frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}G(z) \\
&= \pm\frac{kb}{2\beta}\sqrt{-3\beta\delta} \mp \frac{6kab\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}\left(\frac{\exp\left[b(\xi+C)\right]}{1 - a\exp\left[b(\xi+C)\right]}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{13}(z) &= \pm\frac{2kb}{\beta}\sqrt{-3\beta\delta} \mp \frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}G(z) \\
&= \pm\frac{2kb}{\beta}\sqrt{-3\beta\delta} \mp \frac{6kab\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}\left(\frac{\exp\left[b(\xi+C)\right]}{1 - a\exp\left[b(\xi+C)\right]}\right)
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

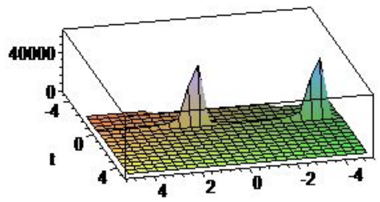
dir. $\beta, \delta, k, a, b, C$ keyfi sabitlerine verilen özel değerler için aşağıdaki şekiller bulunmuştur.



Şekil 6.3.1a : $\beta = 2, \gamma = 2, k = -1, a = b = C = 1$ için V_{11}



Şekil 6.3.1b : $\beta = 4, \gamma = -3, a = 2, k = b = 1, C = -1$ için V_{12}



Şekil 6.3.1c : $\beta = 16, \gamma = -3, k = a = b = 1, C = -1$ için V_{13}

Riccati Denklemi : İkinci en basit denklem olarak (4.2.2) Riccati denklemi seçilebilir. Dolayısıyla (4.2.2) gözönüne alınarak (6.3.3) ifadesi (6.2.3) de yerine yazıldığında

$$\left(\frac{\beta k A_1^4}{4} + 3k^3a^2\delta A_1^2\right)G^4 + \left(5k^3ab\delta A_1^2 + \beta k A_0 A_1^3 + 2k^3a^2\delta A_0 A_1 + \frac{k\alpha}{3}A_1^3\right)G^3$$
$$+\left(4k^3ad\delta A_1^2 - \frac{\omega}{2}A_1^2 + \frac{3\beta k}{2}A_0^2A_1^2 + k\alpha A_0 A_1^2 + 3k^3ab\delta A_0 A_1 + 2k^3b^2\delta A_1^2\right)G^2$$
$$\left(2k^3adA_0A_1 + k\alpha A_0^2 A_1 + k^3b^2\delta A_0 A_1 - \omega A_0 A_1 + \beta k A_0^3 A_1 + 3k^3bd\delta A_1^2\right)G$$
$$\frac{\beta k}{4}A_0^4 - \frac{\omega}{2}A_0^2 + \frac{k\alpha}{3}A_0^3 + k^3d^2\delta A_1^2 + k^3bd\delta A_0 A_1 = 0$$

G nin bir cebirsel polinomu bulunur. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi bulunur (Aşağıdaki sistemlerde basit cebirsel işlemler yapılmıştır):

$$\beta A_1^2 + 12k^2a^2\delta = 0$$

$$15k^2ab\delta A_1 + 3\beta A_0 A_1^2 + 6k^2a^2\delta A_0 + \alpha A_1^2 = 0$$

$$8k^3ad\delta A_1 - \omega A_1 + 3\beta k A_0^2 A_1 + 2k\alpha A_0 A_1 + 6k^3ab\delta A_0 + 4k^3b^2\delta A_1 = 0$$

$$2k^3adA_0 + k\alpha A_0^2 + k^3b^2\delta A_0 - \omega A_0 + \beta k A_0^3 + 3k^3bd\delta A_1 = 0$$

$$3\beta k A_0^4 - 6\omega A_0^2 + 4k\alpha A_0^3 + 12k^3d^2\delta A_1^2 + 12k^3bd\delta A_0 A_1 = 0$$

Yukarıdaki cebirsel denklem sistemi MAPLE yardımıyla çözüldüğünde

$$A_1 = \mp\frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}, \qquad A_0 = \frac{2\alpha\sqrt{-3\beta\delta} - 15kb\beta\delta}{-5\beta\sqrt{-3\beta\delta}},$$
$$\omega = \frac{-16k\alpha^2}{75\beta}, \qquad a = \frac{75k^2b^2\beta\delta + 4\alpha^2}{300k^2d\beta\delta} \tag{6.3.6}$$

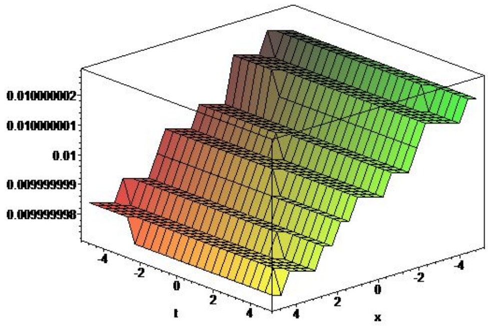
keyfi sabitleri bulunur.

Dolayısıyla, (6.2.3) denkleminin çözümleri (4.2.4) ve (4.2.5) için

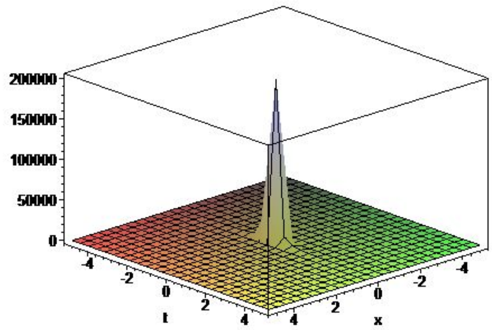
$$V_1(\xi) = \frac{-3k\delta\left[b + \theta\tanh\left(\frac{1}{2}\theta\xi\right)\right]}{\sqrt{-3\beta\delta}} + \frac{2\alpha\sqrt{-3\beta\delta} - 15kb\beta\delta}{-5\beta\sqrt{-3\beta\delta}}, \tag{6.3.7}$$

$$V_2(\xi) = \frac{6ka\delta}{\sqrt{-3\beta\delta}}\left(\frac{b + \theta\tanh\left[\frac{1}{2}\theta(\xi + C)\right]}{2a} + \frac{\operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}\theta\xi\right]}{C\cosh\left[\frac{1}{2}\theta\xi\right] - \frac{2a}{\theta}\sinh\left[\frac{1}{2}\theta\xi\right]}\right)$$
$$+ \frac{2\alpha\sqrt{-3\beta\delta} - 15kb\beta\delta}{-5\beta\sqrt{-3\beta\delta}} \tag{6.3.8}$$

biçimindedir. Ayrıca $\alpha, \beta, \delta, k, b, d$ sabitlerinin özel değerleri için şekiller çizilmiştir.



Şekil 6.3.2a : $\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = -3, k = 75, b = 4, d = -2$ için V_{11}



Şekil 6.3.2b : $\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = -3, k = 75, b = 4, d = -2$ için V_{12}

$d = 0$ için kolaylıkla görülebilir ki (4.2.1) ile (4.2.2) eşittir. Bununla birlikte sırasıyla (4.2.1) ve (4.2.2) denklemlerinin çözümleri olan (4.2.3) ve (4.2.4), $a = -1$ için çakışmaktadır.

6.4 Çarpan Yöntemi ile Korunum Kanunları

(6.0.1) denklemi için çarpan fonksiyonu 3. mertebeden $\Lambda = \Lambda(t, x, v, v_x, v_{xx}, v_{xxx})$ biçimindedir. Bu çarpana karşılık gelen belirleyici denklem (3.2.2) den

$$\frac{\delta}{\delta v}\left\{\Lambda\left(vv_t + \alpha v^2 v_x + \beta v^3 v_x + 3\delta v_x v_{xx} + \delta v v_{xxx}\right)\right\} = 0 \tag{6.4.1}$$

dir. (6.4.1) ifadesi açılarak Λ çarpanı için belirleyici denklemler elde edilir. (6.4.1) belirleyici denklemi çözüldüğünde çarpanlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Lambda = c_1\left(v_x v_{xx} + v_x^2 + \frac{\beta}{4\delta}v^4 + \frac{\alpha}{3\delta}v^3\right) + \frac{1}{2}c_2 v^2 + c_3. \tag{6.4.2}$$

(6.4.2) çarpanı ile (3.2.1) eşitliği kullanılarak

$$T_1^t = \frac{1}{4}v^4, \quad T_1^x = \delta v^3 v_{xx} + \frac{1}{5}\alpha v^5 + \frac{1}{6}\beta v^6;$$

$$T_2^t = v^2, \quad T_2^x = 2\delta(v v_{xx} + v_x^2) + \frac{2}{3}\alpha v^3 + \frac{1}{2}\beta v^4;$$

$$T_3^t = \frac{1}{60\delta}v^2(5\beta v^4 + 8\alpha v^3 + 30\delta v v_{xx} + 30\delta v_x^2),$$

$$T_3^x = \frac{1}{144\delta}\begin{pmatrix} 9\beta^2 v^8 + 24\alpha\beta v^7 + 16\alpha^2 v^6 + 72\beta\delta v^5 v_{xx} + 288\delta^2 v v_x^2 v_{xx} \\ +144\delta^2 v^2 v_{xx}^2 + 288\delta^2 v v_x^2 v_{xx} + 144\delta^2 v_x^4 - 72\delta v^2 v_t v_x \end{pmatrix} \tag{6.4.3}$$

korunum vektörleri elde edilir. Yani, çarpan yöntemi (6.0.1) denklemi için üç adet korunum kanunu verir.

6.5 Yeni Korunum Yöntemi ile Korunum Kanunları

Bu alt kısımda Ibragimov'un yeni korunum teoremi kullanılarak (6.0.1) denkleminin korunum kanunları inşaa edilecektir (Yaşar ve San 2016). (6.0.1) denkleminin eşlenik denklemi y yeni bağımlı değişken olmak üzere (3.3.2) ifadesinden

$$\begin{aligned} E^*(t,x,v,y,\ldots,v_{xxx},y_{xxx}) =& \frac{\delta}{\delta v}\left[y\left(2vv_t + 2\alpha v^2 v_x + 2\beta v^3 v_x + 6\delta v_x v_{xx} + 2\delta v v_{xxx}\right)\right] \\ =& -2\alpha v^2 y_x - 2\beta v^3 y_x - 2v y_t - 2\delta y_{xxx} \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

biçimindedir. Açıkça görülebilir ki $y = v$ için (6.5.1) denklemi (6.0.1) denklemine denk olmadığından kendine eşlenik değildir. (3.4.1) denkleminden (6.0.1) ve (6.5.1) sisteminin Lagrangianı

$$\mathcal{L} = y\left(2vv_t + 2\alpha v^2 v_x + 2\beta v^3 v_x + 6\delta v_x v_{xx} + 2\delta v v_{xxx}\right) \tag{6.5.2}$$

olacaktır. Dolayısıyla (3.4.2) kullanılarak (6.0.1) denkleminin kabul ettiği $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ için korunum vektörleri sırasıyla

$$\begin{aligned} T_2^t =& \tau\mathcal{L} + W\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t} = 0.\mathcal{L} + (-v_x)2vy \\ =& -2vv_x y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^x =& \xi\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} - D_x\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{xx}}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{xxx}}\right)\right] \\ &+ D_x(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{xx}} - D_x\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{xxx}}\right)\right] + D_x^2(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{xxx}}\right] \\ =& y\left(2vv_t + 2\alpha v^2 v_x + 2\beta v^3 v_x + 6\delta v_x v_{xx} + 2\delta v v_{xxx}\right) \\ &- v_x\left[y(2\alpha v^2 + 2\beta v^3 + 6\delta v_{xx}) - D_x(6\delta v_x y) + D_x^2(2\delta v y)\right] \\ &- D_x(v_x)\left[6\delta v_x y - D_x(2\delta v y)\right] - D_x^2(v_x)\left[2\delta v y\right] \\ =& 2vv_t y + 2\delta y_x\left(v_x^2 + vv_{xx}\right) - 2\delta v v_x y_{xx} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde tüm korunum kanunları bulunarak Çizelge 6.4.1 de verilmiştir.

Çizelge 6.5.1 de elde edilen korunum kanunları yerel değildir. Bu da (6.5.1) eşlenik denkleminin çözümlerine bağımlı olduklarını gösterir. Bununla birlikte Ibragimov'un lineer olmayan kendi eşlenik tanımı kullanılarak yerel korunum kanunları elde edilebilir.

Çizelge 6.5.1 :(6.0.1) için yeni korunum yöntemi kullanılarak elde edilen korunum vektörleri

	1. durum	2. durum	3. durum
X_1	T_1^t T_1^x	$T_1^t = \left(2\alpha v^2 v_x + 2\beta v^3 v_x + 6\delta v_x v_{xx} + 2\delta v v_{xxx}\right) y$ $T_1^x = \left(-2\alpha v^2 v_t - 2\beta v^3 v_t - 2\delta v_t v_{xx} - 4\delta v_x v_{tx} - 2\delta v v_{txx}\right) y + \left(2\delta v_t v_x + 2\delta v v_{tx}\right) y_x - 2\delta v v_t y_{xx}$	T_1^t T_1^x
X_2	T_2^t T_2^x	$T_2^t = -2 v v_x y$ $T_2^x = 2 v v_t y + \left(2\delta v_x^2 + 2\delta v v_{xx}\right) y_x - 2\delta v v_x y_{xx}.$	T_2^t T_2^x
X_{32}		$T_{32}^t = 2\left(3\alpha t v^2 v_x + 3\beta t v^3 v_x + 9\delta v_x v_{xx} + 3\delta v v_{xxx} - v^2 - x v v_x\right) y$ $T_{32}^x = \begin{pmatrix} 2xvv_t - 12vv_{xx} - 4\alpha v^3 - 4\beta v^4 - 6\alpha t v^2 v_t \\ -6\beta t v^3 v_t - 6\delta t v v_{xxt} - 12 t\delta v_x v_{xt} - 6\delta t v_t v_{xx} - 12\delta v_x^2 \end{pmatrix} y + \left(4\delta v v_x + 2\delta x v_x^2 + 6\delta t v_t v_x + 2\delta x v v_{xx} + 6\delta t v v_{xt} + 6\delta v v_x\right) y_x + \left(-2\delta x v_x - 6\delta t v v_t - 4\delta v\right) y_{xx}.$	
X_{33}			$T_{33}^t = 2y - 4\beta t v v_x y$ $T_{33}^x = \left(4\beta t v v_t + 2\alpha v + 2\beta v^2 + 2\delta v^{-1} v_x\right) y + \left(2\delta - 4\delta\beta t v_x\right) y_{xx} + \left(-2\delta v^{-1} v_x + 4\delta\beta t v_x^2 + 4\delta\beta t v v_{xx}\right) y_x$
X_{43}			$T_{43}^t = 3t\left(2\alpha v^2 v_x + 2\beta v^3 v_x + 6\delta v_x v_{xx} + 2\delta v v_{xxx}\right) y - 2v^2 y - 2x v v_x y$ $T_{43}^x = \begin{pmatrix} 2xvv_t - 8\delta v_x^2 - 12\delta t v_x v_{xt} - 8\delta v v_{xx} - 6\delta t v v_{xxt} - 2\alpha v^3 \\ -2\beta v^4 - 6\alpha t v^2 v_t - 6\beta t v_t v^3 - 6\delta t v_t v_{xx} \end{pmatrix} y + \left(2\delta x v_x^2 + 6\delta t v_x v_{xt} + 2\delta x v_{xx} + 6\delta v v_x + 6\delta v_t v_x\right) y_x + \left(-2\delta x v v_x - 2\delta v - 6\delta t v_t\right) y_{xx}$

6.6 Çift İndirgeme Yöntemi

(6.0.1) denkleminin $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ simetri üreteçleri (3.6.1) ifadesinden

$$D_t\left(\frac{v^2}{2}\right) + D_x\left(\frac{\alpha v^3}{3} + \frac{\beta v^4}{4} + \delta v_x^2 + \delta v v_{xx}\right) = 0 \tag{6.6.1}$$

korunum kanunu ile ilişkilidir. X_1 ve X_2 üreteçlerinin lineer birleşimi olan

$$\begin{aligned} X =& X_1 + cX_2 \\ =& \frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

üreteci için X'in kanonik koordinatları $s = x$, $r = cx - t$ ve v dir. $T = (T^r, T^s)$, X ile ilişkili olduğundan T^r nin değeri

$$\begin{aligned} T^r =& \frac{T^r D_t(r) + T^x D_x(r)}{D_t(r)D_x(s) - D_x(r)D_t(s)} \\ =& \frac{\left(\frac{v^2}{2}\right) D_t(cx-t) + \left(\frac{\alpha v^3}{3} + \frac{\beta v^4}{4} + \delta v_x^2 + \delta v v_{xx}\right) D_x(cx-t)}{D_t(cx-t)D_x(x) - D_x(cx-t)D_t(x)} \\ =& \frac{-\frac{v^2}{2} + c\left(\frac{\alpha v^3}{3} + \frac{\beta v^4}{4} + \delta v_x^2 + \delta v v_{xx}\right)}{-1} \\ =& \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha c v^3}{3} - \frac{\beta c v^4}{4} - \delta c v_x^2 - \delta c v v_{xx} \\ =& \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha c v^3}{3} - \frac{\beta c v^4}{4} - \delta c (c v_r)^2 - \delta c v (c^2 v_{rr}) \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha c v^3}{3} - \frac{\beta c v^4}{4} - \delta c^3 v_r^2 - \delta c^3 v v_{rr} \tag{6.6.2}$$

olarak elde edilir. (6.6.2) denklemini çözebilmek için $v_r = p$ ve $v_{rr} = p\frac{dp}{dv}$ değişkenleri kullanılırsa (6.6.2) denklemi

$$k_1 = \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha c v^3}{3} - \frac{\beta c v^4}{4} - \delta c^3 p^2 - \delta c^3 v p \frac{dp}{dv}$$

ADD'ye dönüşür. Bu denklemin çözümü C_1 integral sabiti olmak üzere

$$p(v) = \mp \frac{\sqrt{15\delta c \left(-5\beta c v^6 - 8\alpha c v^5 + 15 v^4 - 60 k_1 v^2 + 60 C_1 \delta c^3\right)}}{30\delta c^2 v} \tag{6.6.3}$$

dir. $v_r = \frac{dv}{dr} = p$ ifadesi (6.6.3) denkleminde yerine yazılıp integre edildiğinde C_2 integral sabiti olmak üzere

$$r + C_2 = \mp \int \frac{30\delta c^2 v}{\sqrt{-15\delta c \left(5\beta c v^6 + 8\alpha c v^5 - 15 v^4 + 60 k_1 v^2 - 60 C_1 \delta c^3\right)}} dv \tag{6.6.4}$$

kapalı çözümü elde edilir.

7. KONOPELCHENCHO-DUBROVSKİ SİSTEMİ

Bu bölümde lineer olmayan $(2+1)$ boyutlu

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0,$$
$$u_y = v_x. \tag{7.0.1}$$

Konopelchenko-Dubrovsky (K-D) sisteminin iki değişkenli $(G'/G, 1/G)$ genişleme yöntemi uygulanarak tam ilerleyen dalga çözümleri elde edilecektir. (7.0.1) de $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$, alt indisler kısmi türevleri, a ve b reel parametreleri ifade eder. Ayrıca (7.0.1) sistemi, $u_y = 0$ için Gardner denklemine, $a = 0$ için ise iyi bilinen Kadomtsev-Petviashvili denklemine dönüşür.

Literatürde, (Wazwaz 2004) de, (7.0.1) sisteminin sinüs-kosinüs yöntemi kullanılarak tam ilerleyen dalga çözümleri elde etmiştir. Wang ve Zhang (2012) geliştirilmiş genişleyen $\tanh$ fonksiyon yöntemi ile yeni tam çözümleri elde etmişlerdir.

Ayrıca bu bölümde, (7.0.1) sisteminin yerel korunum kanunları oluşturulmuştur. Bu amaçla çarpan yöntemi (Olver 1993, Steudel 1962) uygulanmıştır.

7.1 $(G'/G, 1/G)$ Genişleme Yöntemi ile İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu kısımda, (7.0.1) sisteminin $(G'/G, 1/G)$ genişleme yöntemi ile tam ilerleyen dalga çözümleri elde ediecektir.

$\xi = x + y - \omega t$ dalga değişkeni için $u(x,y,t) = U(\xi)$ ve $v(x,y,t) = V(\xi)$ bağımlı değişkenleri (7.0.1) sisteminde yazılırsa

$$-\omega U' - U''' - 6bUU' + \frac{3}{2}a^2U^2U' - 3V' + 3aU'V = 0, \tag{7.1.1}$$
$$U' = V' \tag{7.1.2}$$

ADDS'ye dönüşür. (7.1.2) integre edilip integral sabiti göz ardı edildiğinde

$$V = U \tag{7.1.3}$$

eşitliğine ulaşılır. (7.1.1) denkleminde (7.1.3) ifadesi yerine yazılırsa

$$-(\omega + 3)U' - U''' - 3(2b - a)UU' + \frac{3}{2}a^2U^2U' = 0$$

ADD'ye bulunur. Yukarıdaki ADD integre edilirse β integral sabiti olmak üzere

$$\frac{a^2}{2}U^3 + \frac{3}{2}(a - 2b)U^2 - (\omega + 3)U - U'' = \beta \tag{7.1.4}$$

ikinci mertebeden ADD'si bulunur. (7.1.4) denkleminin en yüksek mertebeden lineer olmayan terimi U^3 ve türevli terimi U'' arasında homojen balans uygulanırsa $N = 1$ pozitif tam sayısı bulunur. Yani (7.1.4) denkleminin bir çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1\phi + b_1\psi \tag{7.1.5}$$

olarak kabul edilir. Buradaki a_0, a_1, b_1 daha sonra hesaplanacak sabitlerdir.

1. durum (Hiperbolik fonksiyon çözümleri) : $\lambda < 0$ olduğunda (4.3.2) ve (4.3.4) eşitliklerini gözönüne alarak (7.1.5) ifadesi (7.1.4) de yerine yazılıp herbir ϕ, ψ ve çeşitli kombinasyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\phi^3: \quad a^2a_1^2\mu^2 - 4\mu^2 - 3a^2b_1^2\lambda + a^2a_1^2\lambda^2\sigma - 4\lambda^2\sigma = 0,$$

$$\phi^2\psi: \quad 3a^2a_1^2\mu^2 - 4\mu^2 - a^2b_1^2 - 4\lambda^2\sigma + 3a^2a_1^2\lambda^2\sigma = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\phi^2: \quad & -2b_1\lambda^3\mu\sigma + 6aa_1^2\lambda^2\mu^2\sigma - 3a^2a_0b_1^2\lambda^3\sigma + 6bb_1^2\lambda\mu^2 + 3a^2a_0a_1^2\lambda^4\sigma^2 - 3ab_1^2\lambda^3\sigma \\
& - 3ab_1^2\lambda\mu^2 + 6a^2a_0a_1^2\lambda^2\sigma\mu^2 - 6ba_1^2\lambda^4\sigma^2 - 2a^2b_1^3\lambda^2\mu - 6ba_1^2\mu^4 + 3a^2a_0a_1^2\mu^4 \\
& + 3aa_1^2\mu^4 - 3a^2a_0b_1^2\lambda\mu^2 + 3aa_1^2\lambda^4\sigma^2 - 12ba_1^2\lambda^2\sigma\mu^2 + 6bb_1^2\lambda^3\sigma - 2b_1\lambda\mu^3 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi\psi: \quad & \mu^3 + ab_1\mu^2 + a^2a_0b_1\mu^2 - 2bb_1\mu^2 + \lambda^2\sigma\mu + a^2b_1^2\lambda\mu - 2bb_1\lambda^2\sigma + a^2a_0b_1\lambda^2\sigma \\
& ab_1\lambda^2\sigma = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi: \quad & -2\mu^2\omega + 3a^2a_0^2\mu^2 - 4\lambda\mu^2 - 12ba_0\mu^2 + 6aa_0\mu^2 - 6\mu^2 - 12ba_0\lambda^2\sigma + 6aa_0\lambda^2\sigma \\
& - 6\lambda^2\sigma + 3a^2a_0^2\lambda^2\sigma - 4\lambda^3\sigma - 4\omega\lambda^2\sigma - 3a^2b_1^2\lambda^2 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi: \quad & 12aa_0\lambda^2\sigma\mu^2 + 6a^2a_0^2\lambda^2\sigma\mu^2 - 24ba_0\lambda^2\sigma\mu^2 + 2\lambda\mu^4 - 2\omega\mu^4 - 4\omega\lambda^2\sigma\mu^2 + 6aa_0\lambda^4\sigma^2 \\
& - 12ba_0\lambda^4\sigma^2 + 3a^2b_1^2\lambda^2\mu^2 - a^2b_1^2\lambda^4\sigma + 3a^2a_0^2\lambda^4\sigma^2 - 12bb_1\lambda^3\sigma\mu + 6ab_1\lambda^3\sigma\mu \\
& + 6a^2b_1a_0\lambda\mu^3 - 2\omega\lambda^4\sigma^2 + 6aa_0\mu^4 + 3a^2a_0^2\mu^2 - 12ba_0\mu^4 - 12bb_1\lambda\mu^3 + 6ab_1\lambda\mu^3 \\
& + 6a^2a_0b_1\lambda^3\sigma\mu - 2\lambda^5\sigma^2 - 6\lambda^4\sigma^2 - 12\lambda^2\sigma\mu^2 - 6\mu^4 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sbt: \quad & -6a_0\lambda^4\sigma^2 - 2\beta\lambda^4\sigma^2 - 6a_0\mu^4 - 2\beta\mu^4 + 3aa_0^2\mu^4 - 2\omega a_0\mu^4 - 6ba_0^2\mu^4 + a^2a_0^2\mu^4 \\
& - 2b_1\lambda^2\mu^3 - 3a^2a_0b_1^2\lambda^4\sigma - 3a^2a_0b_1^2\lambda^2\mu^2 + 6aa_0^2\lambda^2\sigma\mu^2 - 4\omega a_0\lambda^2\sigma\mu^2 \\
& - 12ba_0^2\lambda^2\sigma\mu^2 + 2a^2a_0^3\lambda^2\sigma\mu^2 - 2a^2b_1^3\lambda^3\mu + 3aa_0^2\lambda^4\sigma^2 - 2\omega a_0\lambda^4\sigma^2 \\
& - 6ba_0^2\lambda^4\sigma^2 + a^2a_0^3\lambda^4\sigma^2 - 12a_0\lambda^2\sigma\mu^2 - 4\beta\lambda^2\sigma\mu^2 - 2b_1\lambda^4\sigma\mu - 3ab_1^2\lambda^4\sigma \\
& - 3ab_1^2\lambda^2\mu^2 + 6bb_1^2\lambda^4\sigma + 6bb_1^2\lambda^2\mu^2 = 0
\end{aligned}
$$

cebirsel sistemi bulunur. Bu sistem MAPLE yardımıyla çözüldüğünde

$$
a_0 = -\frac{a-2b}{a^2}, \qquad a_1 = \mp\frac{1}{a}, \qquad b_1 = \mp\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu^2+\lambda^2\sigma}{-\lambda}},
$$

$$\omega=-\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}, \qquad \beta=-\frac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}$$

keyfi sabitleri elde edilir.

Elde edilen bu sabitler ile (7.1.4) denkleminin tam çözümleri

$$\begin{aligned}U_1(\xi)=&-\frac{a-2b}{a^2}+\frac{1}{a}\sqrt{-\lambda}\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+\frac{\mu}{\lambda}}\\&+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu^2+\lambda^2\sigma}{-\lambda}}\frac{1}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+\frac{\mu}{\lambda}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_2(\xi)=&-\frac{a-2b}{a^2}-\frac{1}{a}\sqrt{-\lambda}\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+\frac{\mu}{\lambda}}\\&-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu^2+\lambda^2\sigma}{-\lambda}}\frac{1}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right)+\frac{\mu}{\lambda}},\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

biçiminde bulunur. (7.1.6) da μ bir keyfi sabit, $\xi=x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t$ ve $\sigma=A_1^2-A_2^2$ dir.

$A_1=0$, $A_2\neq 0$ ve $\mu\neq 0$ için (7.1.6)'nın tam çözümleri

$$\begin{aligned}u_1(x,y,t)=&v_1(x,y,t)\\=&\frac{1}{a}\sqrt{-\lambda}\left\{\begin{array}{l}\tanh\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right]\\ \operatorname{sech}\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right]\end{array}\right\}\\&-\frac{a-2b}{a^2}\end{aligned}$$

$$u_2(x,y,t) = v_2(x,y,t) = -\frac{1}{a}\sqrt{-\lambda}\left\{\begin{array}{l} \tanh\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right] \\ \text{sech}\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right] \end{array}\right\} - \frac{a-2b}{a^2} \quad (7.1.7)$$

yalnız gezen dalga çözümlerini verir.

$A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$ ve $\mu = 0$ için (7.1.6) tam çözümleri

$$u_1(x,y,t) = v_1(x,y,t) = \frac{1}{a}\sqrt{-\lambda}\left\{\begin{array}{l} \coth\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right] \\ \text{cosech}\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right] \end{array}\right\} - \frac{a-2b}{a^2}$$

$$u_2(x,y,t) = v_2(x,y,t) = -\frac{1}{a}\sqrt{-\lambda}\left\{\begin{array}{l} \coth\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right] \\ \text{cosech}\left[\left(x+y+\left(\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}\right)t\right)\sqrt{-\lambda}\right] \end{array}\right\} - \frac{a-2b}{a^2} \quad (7.1.8)$$

yalnız gezen dalga çözümlerini verir.

2. durum (Trigonometrik fonksiyon çözümleri) : $\lambda > 0$ olduğunda (4.3.2) ve (4.3.6) eşitlikleri altında (7.1.5), (7.1.4) denkleminde yerine yazıldığında ϕ ve ϕ nin polinomu elde edilir. Bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\phi^3 : \quad a^2a_1^2\mu^2 - 4\mu^2 - 3a^2b_1^2\lambda + 4\lambda^2\sigma - a^2a_1^2\lambda^2\sigma = 0,$$

$$\phi^2\psi: \quad -4\mu^2 + 3a^2a_1^2\mu^2 - a^2b_!^2\lambda - 3a^2a_1^2\lambda^2\sigma + 4\lambda^2\sigma = 0,$$

$$\begin{aligned}\phi^2: \quad & -6aa_1^2\lambda^2\sigma\mu^2 + 2b_1\lambda^3\sigma\mu - 3a^2a_0b_1^2\lambda\mu^2 + 3a^2a_0a_1^2\mu^4 + 6bb_1^2\lambda\mu^2 + 3ab_1^2\lambda^3\sigma \\ & -6bb_1^2\lambda^3\sigma + 3aa_1^2\mu^4 - 2a^2b_1^3\lambda^2\mu + 3a^2a_0b_1^2\lambda^3\sigma - 3ab_1^2\lambda\mu^2 + 3aa_1^2\lambda^4\sigma^2 \\ & -6ba_1^2\mu^4 + 12ba_1^2\lambda^2\sigma\mu^2 + 3a^2a_0a_1^2\lambda^4\sigma^2 - 6a^2a_0a_1^2\lambda^2\sigma\mu^2 - 2b_1\lambda\mu^3 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\psi: \quad & \mu^3 + a^2a_0b_1\mu^2 + ab_1\mu^2 - 2bb_1\mu^2 - \lambda^2\sigma\mu + a^2b_1^2\lambda\mu - a^2a_0b_1\lambda^2\sigma - ab_1\lambda^2\sigma \\ & + 2bb_1\lambda^2\sigma = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi: \quad & 3a^2a_0^2\mu^2 - 2\omega\mu^2 + 6aa_0\mu^2 - 12ba_0\mu^2 - 6\mu^4 - 4\lambda\mu^2 + 4\lambda^3\sigma - 3a^2b_1^2\lambda^2 \\ & -3a^2a_0^2\lambda^2\sigma + 2\omega\lambda^2\sigma + 12ba_0\lambda^2\sigma + 6\lambda^2\sigma - 6aa_0\lambda^2\sigma = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi: \quad & -6\lambda^4\sigma^2 + 12\lambda^2\sigma\mu^2 - 6\mu^4 + 24ba_0\lambda^2\sigma\mu^2 - 6a^2a_0^2\lambda^2\sigma\mu^2 - 12aa_0\lambda^2\sigma\mu^2 \\ & -2\lambda^5\sigma^2 + 2\lambda\mu^4 - 2\omega\mu^4 + 3a^2a_0^2\lambda^4\mu^2 + 6aa_0\lambda^4\sigma^2 + 3a^2b_1^2\lambda^2\mu^2 \\ & -12ba_0\lambda^4\sigma^2 + a^2b_1^2\lambda^4\sigma + 4\omega\lambda^2\sigma\mu^2 - 6ab_1\lambda^3\sigma\mu + 12bb_1\lambda^3\sigma\mu + 6a^2a_0b_1\lambda\mu^3 \\ & + 3a^2a_0\mu^4 - 2\omega\lambda^4\sigma^2 + 6aa_0\mu^4 - 12ba_0\mu^4 + 6ab_1\lambda\mu^3 - 12bb_1\lambda\mu^3 \\ & -6a^2a_0b_1\lambda^3\sigma\mu = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sbt: \quad & -6a_0\mu^4 - 2\beta\mu^4 - 6a_0\lambda^4\sigma^2 - 2\beta\lambda^4\sigma^2 - 2\omega a_0\mu^4 - 6ba_0^2\mu^4 + a^2a_0^3\mu^4 + 3aa_0^2\mu^4 \\ & -2b_1\lambda^2\mu^3 + 3a^2a_0b_1^2\lambda^4\sigma - 3a^2a_0b_1^2\lambda^2\mu^2 + 4\omega a_0\lambda^2\sigma\mu^2 + 12ba_0^2\lambda^2\sigma\mu^2 \\ & -2a^2a_0^3\lambda^2\sigma\mu^2 - 6aa_0^2\lambda^2\sigma\mu^2 - 2a^2b_1^3\lambda^3\mu - 2\omega a_0\lambda^4\sigma^2 - 6ba_0^2\lambda^4\sigma^2 + a^2a_0^3\lambda^4\sigma^2 \\ & + 3aa_0^2\lambda^4\sigma^2 + 12a_0\lambda^2\sigma\mu^2 + 4\beta\lambda^2\sigma\mu^2 + 3ab_1^2\lambda^4\sigma - 3ab_1^2\lambda^2\mu^2 - 6bb_1^2\lambda^4\sigma \\ & + 6bb_1^2\lambda^2\mu^2 + 2b_1\lambda^4\sigma\mu = 0\end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu sistem MAPLE yardımıyla çözülerek

$$a_0 = -\frac{a-2b}{a^2}, \qquad a_1 = \mp\frac{1}{a}, \qquad b_1 = \mp\sqrt{\frac{\mu^2-\lambda^2\sigma}{\lambda}},$$

$$\omega = -\frac{9a^2+a^2\lambda-12ab+12b^2}{2a^2}, \qquad \beta = -\frac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}$$

katsayıları bulunur.

Bulunan katsayılar ile (7.1.4) denkleminin tam çözümleri

$$\begin{aligned} U_1(\xi) =& -\frac{a-2b}{a^2} + \frac{1}{a}\sqrt{\lambda}\frac{A_1\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)-A_2\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)}{A_1\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)+A_2\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)} \\ &+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda^2\sigma-\mu^2}{\lambda}}\frac{1}{A_1\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)+A_2\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(\xi) =& -\frac{a-2b}{a^2} - \frac{1}{a}\sqrt{\lambda}\frac{A_1\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)-A_2\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)}{A_1\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)+A_2\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)} \\ &-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda^2\sigma-\mu^2}{\lambda}}\frac{1}{A_1\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)+A_2\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}} \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

formundadır. Burada μ bir keyfi sabit, $\xi = x+y+\frac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}t$ ve $\sigma = A_1^2+A_2^2$ dir.

$A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ ve $\mu = 0$ için (7.1.9) çözümleri

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) =& v_1(x,y,t) \\ =& \frac{1}{a}\sqrt{\lambda}\left\{ \begin{array}{l} -\tan\left[\left(x+y+\frac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}t\right)\right] \\ +i\sec\left[\left(x+y+\frac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}t\right)\right] \end{array}\right\} \\ &-\frac{a-2b}{a^2}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,y,t) =& v_2(x,y,t)\\
=&\frac{1}{a}\sqrt{\lambda}\left\{\begin{array}{l}\tan\left[\left(x+y+\dfrac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}t\right)\right]\\ +i\sec\left[\left(x+y+\dfrac{a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+a^3\lambda-2a^2b\lambda}{2a^4}t\right)\right]\end{array}\right\}\\
&-\frac{a-2b}{a^2}
\end{aligned}
\tag{7.1.10}
$$

olarak bulunur.

3. durum (Rasyonel fonksiyon çözümleri) : $\lambda = 0$ olduğunda benzer şekilde (4.3.2) ve (4.3.8) eşitlikleri altında (7.1.5), (7.1.4) ADD de yerine yazılıp benzer işlemler uygulandığında

$$\phi^3: \quad a^2a_1^2A_1^2-4A_1^2+8A_2\mu-2a^2a_1^2A_2\mu+3a^2b_1^2=0,$$

$$\phi^2\psi: \quad 3a^2a_1^2A_1^2-4A_1^2-6a^2a_1^2A_2\mu+a^2b_1^2+8A_2\mu=0,$$

$$
\begin{aligned}
\phi^2: \quad & 2b_1A_1^2\mu-4b_1A_2\mu^2-12aa_1^2A_2^2\mu^2-24ba_1^2A_2^2\mu^2-2a^2b_1^3\mu-6bb_1^2A_1^2\\
&+3a^2a_0b_1^2A_1^2-12a^2a_0a_1^2A_1^2A_2\mu-6ab_1^2A_2\mu+12bb_1^2A_2\mu-6a^2a_0b_1^2A_2\mu\\
&+3ab_1^2A_1^2-12aa_1^2A_1^2A_2\mu+12a^2a_0a_1^2A_2^2\mu+3aa_1^2A_1^4-6ba_1^2A_1^4\\
&+3a^2a_0a_1^2A_1^4+24ba_1^2A_1^2A_2\mu=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi\psi: \quad & a^2a_0b_1A_1^2+ab_1A_1^2-2bb_1A_1^2+A_1^2\mu-2ab_1A_2\mu-a^2b_1^2\mu+4bb_1A_2\mu\\
&-2a^2a_0b_1A_2\mu-2A_2\mu=0,
\end{aligned}
$$

$$\phi: \quad -2\omega+6aa_0-12ba_0+3a^2a_0^2-6=0,$$

$$
\begin{aligned}
\psi: \quad & 4a^2b_1^2\mu^2 - 24bb_1A_2\mu^2 + 12bb_1A_1^2\mu - 6a^2a_0b_1A_1^2\mu - 6ab_1A_1^2\mu + 8A_2\mu^3 \\
& + 12ab_1A_2\mu^2 + 12a^2a_0b_1A_2\mu^2 + 12a^2a_0^2A_2^2\mu^2 - 2\omega A_1^4 - 24A_2^2\mu^2 - 4A_1^2\mu^2 \\
& - 8\omega A_2^2\mu^2 + 48ba_0A_1^2A_2\mu + 6aa_0A_1^4 - 12ba_0A_1^4 + 3a^2a_0^2A_1^4 - 6A_1^4 \\
& + 24aa_0A_2^2\mu^2 + 24A_1^2A_2\mu - 48ba_0A_2^2\mu^2 - 24aa_0A_1^2A_2\mu \\
& - 12a^2a_0^2A_1^2A_2\mu + 8\omega A_1^2A_2\mu = 0,
\end{aligned}
$$

$$
sabit: \quad - 2\omega a_0 - 6a_0 - 6ba_0^2 + a^2a_0^3 + 3aa_0^2 - 2\beta = 0
$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Bu sistem MAPLE ile çözülürse

$$
a_0 = -\frac{a-2b}{a^2}, \qquad a_1 = \mp\frac{1}{a}, \qquad b_1 = \mp\frac{\sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}}{a}
$$

$$
\omega = -\frac{3\left(3a^2 - 4ab + 4b^2\right)}{2a^2}, \qquad \beta = -\frac{(a-2b)^3}{2a^4}
$$

sabitleri bulunur.

Bulunan sabitler ile (7.1.4) denkleminin tam çözümleri $\xi = x + y + \frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t$ ve μ bir keyfi sabit olmak üzere

$$
U_1(\xi) = -\frac{a-2b}{a^2} + \frac{1}{a}\frac{\mu\xi + A_1}{\frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2} + \frac{\sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}}{a}\frac{1}{\frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2},
$$

$$
U_2(\xi) = -\frac{a-2b}{a^2} + \frac{1}{a}\frac{\mu\xi + A_1}{\frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2} + \frac{\sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}}{a}\frac{1}{\frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2}, \qquad (7.1.11)
$$

biçimindedir. Yani diğer bir deyişle

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,t) =& v_1(x,y,t) \\
=& \frac{\frac{1}{a}\left\{\mu\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_1\right\}}{\frac{\mu}{2}\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]^2+A_1\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_2} \\
&+\frac{\frac{\sqrt{A_1^2-2\mu A_2}}{a}\left\{\mu\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_1\right\}}{\frac{\mu}{2}\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]^2+A_1\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_2} \\
&-\frac{a-2b}{a^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,y,t) =& v_2(x,y,t) \\
=& \frac{\frac{-1}{a}\left\{\mu\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_1\right\}}{\frac{\mu}{2}\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]^2+A_1\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_2} \\
&-\frac{\frac{\sqrt{A_1^2-2\mu A_2}}{a}\left\{\mu\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_1\right\}}{\frac{\mu}{2}\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]^2+A_1\left[x+y+\frac{3(3a^2-4ab+4b^2)}{2a^2}t\right]+A_2} \\
&-\frac{a-2b}{a^2} \qquad (7.1.12)
\end{aligned}
$$

yalnız gezen dalga çözümleri elde edilir.

7.2 Çarpan Yöntemi ile Korunum Kanunları

(7.0.1) K-DS için, çarpan yöntemi uygulandığında çarpanlar

$$\Lambda_1 = \frac{-1}{3a}(c_1 au + c_2)$$

$$\Lambda_2 = \frac{c_1}{2}(2v + au^2) + c_2 u + c_3 F(t)$$

olarak elde edilir.

$c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{11} = -\frac{1}{3}u, \qquad \Lambda_{21} = \frac{1}{2}(2v + au^2)$$

çarpanlarına karşılık gelen korunum vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$T_1^t = \frac{-1}{6}u^2$$

$$T_1^x = \frac{-1}{8}a^2u^4 + \frac{2}{3}bu^3 - \frac{1}{2}au^2v + \frac{1}{3}uu_{xx} - \frac{1}{6}u_x^2 - \frac{1}{2}v^2,$$

$$T_1^y = \frac{1}{6}au^3 + uv;$$

$c_2 = 1$, $c_1 = c_3 = 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{12} = \frac{-1}{3a}, \qquad \Lambda_{22} = u$$

çarpanlarına karşılık gelen korunum vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$T_2^t = \frac{-1}{3a}u,$$

$$T_2^x = -\frac{a^2u^3 - 6bu^2 + 6auv - 2u_{xx}}{6a},$$

$$T_2^y = \frac{2v + au^2}{2a}.$$

Son olarak $c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{13} = 0, \qquad \Lambda_{23} = F(t)$$

çarpanlarına karşılık gelen korunum vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$T_2^t = 0,$$

$$T_2^x = -vF(t),$$

$$T_2^y = uF(t).$$

8. LOGARİTMİK KdV VE KP-BENZERİ DENKLEMLER

Lineer olmayan KDD teorisinde, Korteweg-de Vries (KdV) ve Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemleri önemli bir yere sahiptir. Bu integrallenebilir denklemler kabaca sığ su dalgalarının dinamiklerini modeller. Bu modellerin ardındaki fiziksel çözümler genellikle yalnız gezen, soliton (sabit bir hızla yayılırken şeklini koruyan yalnız gezen dalga tipi), çoklu soliton, tepe soliton vb. gibi bazı özel tipte dalgalardır.

Klasik KdV denklemi

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0 \tag{8.0.1}$$

formunda olup sığ su dalgaları, optik ve harmonik kristallerde akustik dalgalar gibi birçok fiziksel süreçte ortaya çıkar.

Çok yakın bir zamanda, Sen ve ark. (2012) KdV-benzeri

$$v_t + v_{xx}\left(\ln v\right)_x - v_{xxx} = 0 \tag{8.0.2}$$

denklemini geliştirmişlerdir. (8.0.2) denklemi, yalnız gezen dalga çözümünü paylaşan denklemleri araştıran bir genetik programda keşfedilmiştir. (8.0.2) denklemi, lineer olmayan taşınım, yayılma ve dağılım arasında bir köprü oluşturur. Wazwaz (2015) (8.0.2) KdV-benzeri denkleminin (8.0.1)'in yalnız gezen dalga çözümüne sahip olduğunu göstermiştir. Buna ek olarak (8.0.2)'nin varyant formları araştırılmıştır.

(8.0.1) denkleminin bir genişlemesi olan KP denklemi

$$\left(v_t + 6vv_x + v_{xxx}\right)_x + kv_{yy} = 0 \tag{8.0.3}$$

ile verilmiştir. (8.0.3) denklemi (Wazwaz 2016) da kuasi bir boyutlu sığ su dalgalarının oluşumunu, (Kadomtsev ve Petviashvili 1970) de küçük genlikli lineer olmayan uzun dalgaları tanımlamaktadır.

(Wazwaz 2016) da, (8.0.3) denkleminin bir varyantı olan logaritmik KP-benzeri denklemi türetilmiştir:

$$\left(v_t + 2v_{xx}\left(\ln x\right)_x - v_{xxx}\right)_x + v_{yy} = 0. \tag{8.0.4}$$

Ayrıca Wazwaz çalışmasında Gaussian şeklindeki yalnız gezen dalga çözümlerini elde etmiştir.

8.1 Logaritmik KdV-Benzeri Denklemi

Bu alt bölümde,

$$v_t + v_{xx}\left(\ln x\right)_x - v_{xxx} = 0 \tag{8.1.1}$$

denklemi için çarpanları, eşlenik denklemi ve korunum kanunları elde edilecektir.

Analize daha kolay devam edebilmek için

$$v(x,t) = e^{u(x,t)} \tag{8.1.2}$$

dönüşümü ile (8.1.1) denklemi yerine

$$u_t - 2u_x u_{xx} - u_{xxx} = 0 \tag{8.1.3}$$

denklemi kullanılacaktır.

Lie grup analizi (8.1.3)'e uygulanıp hesaplamalar yapıldığında sonsuz küçükler

$$\xi^1 = c_1 t + c_4, \qquad \xi^2 = \frac{c_1}{3}x + c_4, \qquad \eta = c_3$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki sonsuz küçüklere karşılık gelen Lie simetrileri aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
X_1 =& \frac{\partial}{\partial t}, \\
X_2 =& \frac{\partial}{\partial u}, \\
X_3 =& \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_4 =& t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{8.1.4}
$$

8.1.1 Çarpan yöntemi ile korunum kanunları

Çarpan yöntemi uygulandığında (8.1.3) denkleminin çarpanları

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1(x,t,u) =& 1, \\
\Lambda_2(x,t,u) =& e^{2u}
\end{aligned}
\tag{8.1.5}
$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu çarpanlara karşılık gelen korunum vektörleri

$$
\begin{aligned}
T_{11}^t =& u, \\
T_{11}^x =& -u_x^2 - u_{xx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{21}^t =& -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2u}, \\
T_{21}^x =& -u_{xx}e^{2u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{12}^t =& -tu_t - \frac{1}{3}xu_x, \\
T_{12}^x =& \frac{2}{3}u_x^2 + 2tu_xu_{tx} + \frac{2}{3}xu_xu_{xx} + \frac{2}{3}u_{xx} + tu_{txx} + \frac{1}{3}xu_{xxx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{22}^{t} &= \left(-tu_t - \frac{1}{3}xu_x\right) e^{2u},\\
T_{22}^{x} &= \left(\frac{2}{3}u_x^2 + 2tu_xu_{tx} + \frac{2}{3}xu_xu_{xx} + \frac{2}{3}u_{xx} + tu_{txx} + \frac{1}{3}xu_{xxx}\right) e^{2u}
\end{aligned} \tag{8.1.6}
$$

biçiminde bulunur.

Bunlara ek olarak, (3.5.1) *özyineleme formülü* kullanılarak yeni yerel olmayan korunum kanunları aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$
\begin{aligned}
E_{11}^{t} =& h(x,t)u - \int h_t(x,t)u \, dt,\\
E_{11}^{x} =& -h(x,t)u_x^2 - h(x,t)u_{xx} + \int \left(h_x(x,t)u_x^2 + h_x(x,t)u_{xx}\right) \, dx;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{21}^{t} =& -\frac{1}{2}h(x,t) + \frac{1}{2}h(x,t)e^{2u} - \int \left(-\frac{1}{2}h_t(x,t) + \frac{1}{2}h_t(x,t)e^{2u}\right) \, dt,\\
E_{21}^{x} =& -h(x,t)u_{xx}e^{2u} + \int h_x(x,t)u_{xx}e^{2u} \, dx;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{12}^{t} =& -h(x,t)\left(tu_t + \frac{1}{3}xu_x\right) + \int h_t(x,t)\left(tu_t + \frac{1}{3}xu_x\right) \, dt,\\
E_{12}^{x} =& -h(x,t)u_{xx}e^{2u} + \int h_x(x,t)u_{xx}e^{2u} \, dx;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{22}^{t} =& -h(x,t)\left(tu_t + \frac{1}{3}u_x\right) e^{2u} + \int h_t(x,t)\left(tu_t + \frac{1}{3}u_x\right) e^{2u} \, dt,\\
E_{22}^{x} =& h(x,t)\left(2tu_tu_{xx} + \frac{2}{3}xu_xu_{xx} + \frac{2}{3}u_{xx} + tu_{txx} + \frac{1}{3}xu_{xxx}\right) e^{2u}\\
& - \int h_x(x,t)\left(2tu_tu_{xx} + \frac{2}{3}xu_xu_{xx} + \frac{2}{3}u_{xx} + tu_{txx} + \frac{1}{3}xu_{xxx}\right) e^{2u} \, dx.
\end{aligned}
$$

8.1.2 Eşlenik denklem ve lineer olmayan kendi eşleniklik

$$
\mathcal{L} = w\left(u_t - 2u_xu_{xx} - u_{xxx}\right),
$$

(8.1.3) denkleminin formal Lagrangianı ve $w = w(x,t)$ yeni bağımlı değişkeni olmak üzere eşlenik denklem

$$F^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = -w_t - 2w_{xx}u_x - 2w_x u_{xx} + w_{xxx} \tag{8.1.7}$$

biçimindedir. Ayrıca (8.1.7) de $w = u$ için (8.1.3) orijinal denklemine denk olmadığı için (8.1.3) denklemi kendine eşlenik değildir.

$\phi \neq 0$ olmak üzere $w = \phi(x,t,u)$ için (3.3.4) eşitliği

$$\begin{aligned} F^*|_{w=\phi(x,t,u)} &= \lambda\left(u_t - 2u_x u_{xx} - u_{xxx}\right) \\ &= -\phi_u u_t + \left(-\phi_{uu} + 2\phi_u\right) u_x^3 + \left(-4\phi_u + 3\phi_{uu}\right) u_x u_{xx} + \phi_u u_{xxx} \end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. Yukarıdaki eşitlikten

$$\phi_{uu} = 2\phi_u \quad \Leftrightarrow \quad \phi_1 = 1, \qquad \phi_2 = e^{2u} \tag{8.1.8}$$

ϕ fonksiyonları elde edilir. Bu ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının (8.1.5) çarpan fonksiyonları ile aynı oldukları açıktır.

8.1.3 Eşlenik simetri

(8.1.3) denkleminin bir eşlenik simetrisi (3.3.6)'yı sağlayan $X_\omega = \omega(x,t,u,u_{(1),\ldots,u_{(s)}})\,\frac{\partial}{\partial u}$ formundadır. (3.3.6) eşitliği yeniden yazıldığında aşağıdaki gibi u ve kısmi türevlerini içeren cebirsel polinomu elde edilir:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_F^*\right)\omega &= \left[\omega\frac{\partial F}{\partial u} - D_t\left(\omega\frac{\partial F}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\omega\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\omega\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\right) - D_x^3\left(\omega\frac{\partial F}{\partial u_{xxx}}\right)\right]|_{F=0} \\ &= -\,\omega_t + \omega_{xxx} + (3\omega_{xu} - 2\omega_x)_x u_x + (3\omega_{xu} - 2\omega_x)_u u_x^2 + (\omega_{uu} - 2\omega_u)_u u^3 \\ &\quad + (3\omega_{xu} - 2\omega_x)u_{xx} + 3(\omega_{uu} - 2\omega_u)u_x u_{xx}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki cebirsel polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned}
u_x u_{xx}: &\quad \omega_{uu} - 2\omega_u = 0,\\
u_{xx}: &\quad 3\omega_{xu} - 2\omega_x = 0,\\
u_x^3: &\quad (\omega_{uu} - 2\omega_u)_u = 0,\\
u_x^2: &\quad (3\omega_{xu} - 2\omega_x)_u = 0,\\
u_x: &\quad (3\omega_{xu} - 2\omega_x)_x = 0,\\
u_x: &\quad -\omega_t + \omega_{xxx} = 0,
\end{aligned} \tag{8.1.9}$$

diferensiyel sistemi bulunur. (8.1.9) sistemi çözüldüğünde

$$\omega_1(u) = 1, \qquad \omega_2(u) = e^{2u} \tag{8.1.10}$$

bulunur. (8.1.10) da bulunan ω_1 ve ω_2 fonksiyonlarının (8.1.5) çarpanları ve (3.3.6) fonksiyonları ile aynı olduğu aşikardır.

8.1.4 Çift indirgeme yöntemi

Genelleştirilmiş çift indirgeme teoreminden yararlanarak (3.6.1) eşitliğini sağlayan ilişkili simetri ile $(1+1)$ KdV-benzeri için indirgenmiş korunum formu elde edilebilir. (8.1.6) korunum vektörleri ile (8.1.4)'de verilen X_1 ve X_3 simetrileri ilişkilidir. Dolayısıyla $X = \frac{\partial}{\partial m}$ kanonik üreteci olmak üzere $X = \frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial x}$ simetrisi ile indirgenmiş korunum formu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{k} = \frac{dm}{1}, \quad du = dn = dw = 0$$

veya

$$n = x - kt, \quad m = t, \quad w(n) = u.$$

(3.6.4) formülü kullanıldığında

$$\begin{pmatrix} T^n \\ T^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^t \\ T^x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} kw + w'^2 + w'' \\ -w \end{pmatrix}$$

veya

$$T^n = kw + w'^2 + w''$$
$$T^m = -q$$

olarak bulunur. Yukarıdaki sistemin ilk denklemi için C integral sabiti olmak üzere

$$kw + w'^2 + w'' = C \tag{8.1.11}$$

eşitliğinde $w' = z$ ve $w'' = z\dfrac{dz}{dw}$ ifadeleri yazılırsa

$$\frac{dz}{dw} + z = (C - kw)z^{-1} \tag{8.1.12}$$

1. mertebeden ADD'si elde edilir. c_1 integral sabiti olmak üzere (8.1.12) denkleminin çözümü

$$z(w) = \mp\frac{1}{2}\left(4C + 2k - 4kw + 4c_1e^{-2w}\right)^{1/2}$$

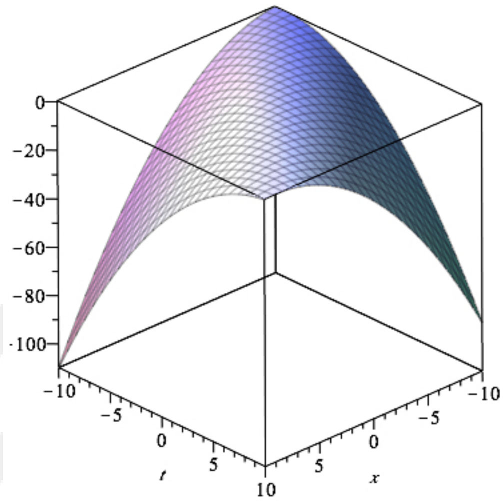
olarak bulunur. Bu çözümde özel olarak $c_1 = 0$ kabul edilirse $z = w'$ için

$$w(n) = \frac{4C + 2k - n^2k^2 - 2nk^2c_2 - c_2^2k^2}{4k} \tag{8.1.13}$$

çözümü elde edilir ki, (8.1.13)'deki c_2 integral sabiti olup $n = x - kt$ ve $w(n) = u(x,t)$ ifadeleri (8.1.13) ifadesinde yerine yazıldığında (8.1.3) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \frac{4C + 2k - c_2^2k^2 - 2k^2c_2(x-kt) - k^2(x-kt)^2}{4k} \tag{8.1.14}$$

olarak elde edilir.



Şekil 8.1.1 : $C = 0$, $c_2 = k = 1$ için (8.1.14) çözümü

8.2 Logaritmik KP-Benzeri Denklemi

Bu kısımda, lineer olmayan KP-benzeri denklemi

$$F: \quad (v_t + 2v_{xx}(\ln v)_x - v_{xxx})_x + v_{yy} = 0 \tag{8.2.1}$$

incelenecektir. Lie grup teorisi (8.2.1) denklemine uygulandığında sonsuz küçükler

$$\begin{aligned}
\tau &= c_1t + c_2,\\
\xi_x &= -\frac{c_4}{2}y + \frac{c_1}{2}x + c_6,\\
\xi_y &= \frac{2c_1}{3}y + c_4t + c_5,\\
\eta &= c_3v
\end{aligned}$$

olup sonsuz küçüklere karşılık gelen simetriler

$$
\begin{aligned}
X_1 =&\frac{\partial}{\partial t},\\
X_2 =&\frac{\partial}{\partial y},\\
X_3 =&\frac{\partial}{\partial x},\\
X_4 =&\frac{\partial}{\partial v}\\
X_5 =&-\frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y},\\
X_6 =&t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2}{4}y\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{8.2.2}
$$

olarak elde edilir.

8.2.1 Çarpan yöntemi ile korunum kanunları

(8.2.1) denklemine çarpan yöntemi uygulandığında denklemin çarpanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Lambda(x,y,t,v)=f(t)y+g(t)$$

veya

$$\Lambda_1(x,y,t,v) =f(t)y, \tag{8.2.3}$$

$$\Lambda_2(x,y,t,v) =g(t). \tag{8.2.4}$$

(8.2.3) ve (8.2.4) çarpanlarına karşılık gelen korunum vektörleri sırasıyla

$$
\begin{aligned}
T_1^t &= \frac{1}{2}f(t)yv_x,\\
T_1^x &= \frac{y}{2v}\left(4f(t)v_xv_{xx}-f'(t)v^2-2f(t)vv_{xxx}+f(t)vv_t\right),\\
T_1^y &= -f(t)v+f(t)yv_y;
\end{aligned}
\tag{8.2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2^t &= \frac{1}{2}g(t)v_x,\\
T_2^x &= \frac{1}{2v}\left(4g(t)v_xv_{xx} - g'(t)v^2 - 2g(t)vv_{xxx} + g(t)vv_t\right),\\
T_2^y &= g(t)v_y
\end{aligned}
\tag{8.2.6}
$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan, (8.2.5), (8.2.6) korunum vektörleri (3.5.1) özyineleme formülünde kullanıldığında aşağıdaki sonsuz yerel olmayan korunum vektörleri elde edilir:

$$
\begin{aligned}
E_1^t &= \frac{f^2(t)y^2}{2}v_x - \int \frac{f'(t)f(t)y^2}{2}v_x\,dt,\\
E_1^x &= \frac{f(t)y^2}{2v}\left(4f(t)v_xv_{xx} - f'(t)v^2 - 2f(t)vv_{xxx} + f(t)vv_t\right)\\
E_1^y &= f^2(t)y\left(yv_y - v\right) - \int f^2(t)\left(yv_y - v\right)\,dy;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2^t &= \frac{g^2(t)}{2}v_x - \int \frac{g'(t)g(t)}{2}v_x\,dt,\\
E_2^x &= \frac{g(t)}{2v}\left(4g(t)v_xv_{xx} - g'(t)v^2 - 2g(t)vv_{xxx} + g(t)vv_t\right)\\
E_2^y &= g^2(t)v_y.
\end{aligned}
$$

8.2.2 Eşlenik denklem ve lineer olmayan kendi eşleniklik

(8.2.1) denkleminin formal Lagrangianı

$$
\mathcal{L} = w\left(v_{tx} + 2\frac{v_xv_{xxx}}{v} + 2\frac{v_{xx}^2}{v} - 2\frac{v_x^2v_{xx}}{v^2} - v_{xxxx} + v_{yy}\right) \tag{8.2.7}
$$

$w = w(x)$ yeni bağımlı değişken olmak üzere (8.2.7) nin varyasyonel türevleri alınarak

$$
F^* = w_{tx} + w_{yy} - w_{xxxx} - 2\frac{w_{xxx}v_x}{v} - 2\frac{w_{xx}v_{xx}}{v} + 4\frac{w_{xx}v_x^2}{v^2} + 6\frac{w_xv_xv_{xx}}{v^2} - 4\frac{w_xv_x^3}{v^3} \tag{8.2.8}
$$

eşlenik denklemi elde edilir. $w = v$ için (8.2.8) denklemi, (8.2.1) denklemine denk olmadığından kendine eşlenik değildir.

w yeni bağımlı değişken olmak üzere $\phi \neq 0$ olmak üzere $w = \phi(x, y, t, u)$ için (3.3.4) eşitliği

$$F^*|_{w=\phi} = \lambda \left[v_{tx} + 2\frac{v_x v_{xxx}}{v} + 2\frac{v_{xx}^2}{v} - 2\frac{v_x^2 v_{xx}}{v^2} - v_{xxxx} + v_{yy} \right]$$

olur. Benzer şekilde yukarıdaki eşitlikten elde edilen denklem sisteminden

$$\begin{aligned} \phi_x =& 0, \\ \phi_{yy} =& 0 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu sistem çözüldüğünde (8.2.4) çarpanları ile aynı sonuçlar elde edilir. Yani,

$$\phi = f(t)y + g(t) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_1 = f(t)y, \qquad \phi_2 = g(t)$$

dir.

8.2.3 Eşlenik simetri

(8.2.1) denkleminin bir eşlenik simetrisi $X_\omega = \omega(x, y, t, v, v_{(1)}, \ldots, v_{(s)}) \frac{\partial}{\partial v}$ olmak üzere (3.3.6) eşitliği yeniden yazıldığında

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_F^*)\omega = \omega\frac{\partial F}{\partial v} - D_x\left(\omega\frac{\partial F}{\partial v_x}\right) + D_t D_x\left(\omega\frac{\partial F}{\partial v_{tx}}\right) + D_x^2\left(\omega\frac{\partial F}{\partial v_{xx}}\right) + D_y^2\left(\omega\frac{\partial F}{\partial v_{yy}}\right) \\ - D_x^3\left(\omega\frac{\partial F}{\partial v_{xxx}}\right) + D_x^4\left(\omega\frac{\partial F}{\partial v_{xxxx}}\right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında (8.2.1) yerine yazılıp v_i türevlerine göre düzenlendiğinde elde edilen denklemin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek ω için belirleyici denklem sistemi oluşturulur. Bu sistemin çözümü uzun ve karmaşık olduğundan

MAPLE programı yardımıyla

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_{yy} = 0$$

basit sistemi bulunmuştur. Bu sistemin çözümlerinin (8.2.4) çarpan fonksiyonları ile aynı sonuçların elde edildiği açıkça görülür:

$$\omega = \omega(y,t) = f(t)y + g(t). \tag{8.2.9}$$

8.2.4 Çift indirgeme yöntemi

Yukarıda belirtildiği gibi logaritmik KP-benzeri denkleminin altı tane Lie nokta üreteci vardır. Aşağıdaki tabloda (8.2.2) simetrileri ve (8.2.5) korunum vektörleri arasındaki ilişki (3.6.1) eşitliği kullanılarak incelenmiştir.

Çizelge 8.2.1. (8.2.1) denkleminin simetrileri ve korunum vektörleri arasındaki ilişki

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$g(t)=2$ için $T^1 = \begin{pmatrix} T_1^t \\ T_1^x \\ T_1^y \end{pmatrix}$	0	0	0	$T^1 \neq 0$	0	$\frac{2}{3}T^1 \neq 0$
$f(t)=2$ için $T^2 = \begin{pmatrix} T_2^t \\ T_2^x \\ T_2^y \end{pmatrix}$	0	$\neq 0$	0	$T^2 \neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

Uyarı 8.2.1

Hesaplamaların basitleşmesi açısından $f(t) = 2$ ve $g(t) = 2$ olarak alınmıştır.

T^1 korunum vektörü ile X_1, X_2 ve X_3 simetrileri ilişkili olduğu için X_1, X_2, X_3 simetrilerinin bir lineer birleşimi olan

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{8.2.10}$$

simetrisi özyineleme korunum formunda yerine yazılırsa

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c_1} = \frac{dy}{c_2} = \frac{dq}{1}, \qquad dv = dr = ds = dw = 0$$

veya

$$r = y - c_2 t, \quad s = x - c_1 t, \quad q = t, \quad w(r,s) = v \tag{8.2.11}$$

yeni değişkenleri bulunur. Dolayısıyla (3.6.4) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} T^r &= c_2 w_s - 2w_r \\ T^s &= 2c_2 w_s + 2w_{sss} + c_2 w_r - 4\frac{w_s w_{ss}}{w} \\ T^q &= -w_s \end{aligned}$$

yeni korunum vektörleri elde edilir. Burada $D_r T^r + D_s T^s = 0$ olduğu açıkça görülebilir. Benzer şekilde $Y = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}$ için $Y = \frac{\partial}{\partial m}$ kanonik formu gözönüne alınarak $D_n T^n = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T^n &= 2(c_1 - c_2 c_3 - c_3^2)u' + 2u''' - \frac{4u'u''}{u} \\ T^m &= (c_2 + 2c_3)u' \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$T^n = C = 2(c_1 - c_2 c_3 - c_3^2)u' + 2u''' - \frac{4u'u''}{u} \tag{8.2.12}$$

ifadesinde $C = 0$ için (8.2.12) denklemi iki kez integre edildiğinde

$$u'(n) = \mp\frac{1}{3}\sqrt{6C_1 + 9(c_1 - c_2c_3 - c_3^2)u^2 - 6C_2u^3} \tag{8.2.13}$$

birinci mertebeden ADD bulunur.

9. ZAMAN KESİRLİ SCHAMEL-KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ

Bu bölümde a, b, c keyfi sabitleri ve $bc \neq 0$ olmak üzere

$$F: \quad u_t^\alpha + \left(au^{1/2} + bu\right) u_x + cu_{xxx} = 0, \tag{9.0.1}$$

zaman kesirli Schamel-Korteweg-de Vries denklemi için Lie simetri analizi yapılarak korunum kanunları oluşturulmuştur.

9.1 Lie Grup Analizi

(9.0.1) denklemi (2.1.5) formunda bir Lie simetri üretecini kabul etsin. Bu durumda denklemin uzatılmış üreteci

$$\begin{aligned} X^{(\alpha;3)} =& \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \\ &+ \zeta^{(\alpha;t)}\frac{\partial^\alpha}{\partial u_t^\alpha} + \zeta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

biçimindedir.

(2.4.8) kesirli uzanım fonksiyonu ve (2.1.7) standart uzanım fonksiyonu (2.4.10) değişmezlik prensibinde kullanılarak aşağıdaki belirleyici denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{uu} = \xi_t = \xi_u = \tau_x = \tau_u =& 0 \\ -\alpha\tau_t + 3\xi_x =& 0 \\ -\xi_{xx} + \eta_{xu} =& 0 \\ (1-\alpha)\tau_{tt} + 2\eta_{tu} =& 0 \\ (2-\alpha)\tau_{ttt} + 3\eta_{ttu} =& 0 \\ 2u\left(a + bu^{1/2}\right)(\xi_x - \alpha\tau_t) - 2cu^{1/2}(3\eta_{xxu} - \xi_{xxx}) - \left(2bu^{1/2} + a\right)\eta =& 0 \\ au^{1/2}\eta_x + bu\eta_x + c\eta_{xxx} + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\eta - u\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\partial}(\eta_u) =& 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} \frac{\partial^n}{\partial t^n}(\eta_u) - \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} D_t^{n+1}(\tau) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.1.2}$$

(9.1.2) belirleyici denklem sistemi MAPLE yardımıyla çözüldüğünde

$$\begin{aligned} \tau(x,t,u) &= 0 \\ \xi(x,t,u) &= c_1 \\ \eta(x,t,u) &= 0 \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

sonsuz küçükleri elde edilir. Bu sonsuz küçüklere karşılık gelen simetri

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{9.1.4}$$

olarak elde edilir.

9.2 Korunum Kanunları

Bu alt bölümde (9.0.1) zaman kesirli Schamel-Korteweg-de Vries denkleminin (9.1.4) Lie nokta simetleri kullanılarak korunum kanunları oluşturulacaktır.

(9.0.1) diferensiyel denklemi için $v = v(x,t)$ yeni bağımlı değişken olmak üzere formal Lagrangian

$$\mathcal{L} = v\left[u_t^\alpha + \left(au^{1/2} + bu\right)u_x + cu_{xxx}\right]$$

biçimindedir. Bu formal Lagrangianın varyasyonel türevi ile

$$F^* : \quad (D_t^\alpha)^* v - \left(au^{1/2} + bu\right)v_x - cv_{xxx} = 0$$

eşlenik denklemi elde edilir. (9.1.4) $X = \frac{\partial}{\partial x}$ simetri üretecine karşılık gelen karakteristik $W = -u_x$ olduğuna göre (3.7.2) ve (3.7.3) operatörleriyle birlikte (9.0.1) denkleminin korunum vektörleri sırasıyla

$$
\begin{aligned}
T^t =& \tau\mathcal{L} + D_t^{\alpha-1}(W)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u} - D_t^{\alpha-2}(W)D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u} - J\left(W, D_t^2\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u}\right)\right)\\
=& -D_t^{\alpha-1}(u_x)v + D_t^{\alpha-2}(u_x) - J(-u_x, v_{tt})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^x =& \xi\mathcal{L} + W\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\right) + D_x(W)\left(-D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\right) + D_x^2(W)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\\
=& u_t^\alpha v - cu_x v_{xx} + cu_{xx}v_x
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan (9.0.1) denklemi için lineer olmayan kendi eşleniklik yöntemi gözönüne alınsın. $v = \phi(x,t,u)$ ve

$$
\begin{aligned}
v_x =& \phi_x + \phi_u u_x\\
v_{xx} =& \phi_x x + 2\phi_{xu}u_x + \phi_u u_{xx} + \phi_{uu}u_x^2\\
v_{xxx} =& \phi_{xxx} + 3\phi_{xxu}u_x + 3\phi_{xuu}u_x^2 + 3\phi_{xu}u_{xx} + 3\phi_{uu}u_x u_{xx} + \phi_u u_{xxx} + \phi_{uuu}u_x^3
\end{aligned}
$$

türevleri $F^* \mid_{v=\phi} = \lambda F$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
&(D_t^\alpha)^*\phi - \left(au^{1/2} + bu\right)\left(\phi_{xx} + 2\phi_{xu}u_x + \phi_u u_{xx} + \phi_{uu}u_x^2\right)\\
&- c\left[\phi_{xxx} + 3\phi_{xxu}u_x + 3\phi_{xuu}u_x^2 + 3\phi_{xu}u_{xx} + 3\phi_{uu}u_x u_{xx} + \phi_u u_{xxx} + \phi_{uuu}u_x^3\right]\\
&= \lambda\left[u_t^\alpha + \left(au^{1/2} + bu\right)u_x + cu_{xxx}\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, u'nun türevli terimlerine göre düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafındaki katsayılar eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
u_x: &\quad -3\left(au^{1/2} + bu\right)\phi_{xu} - 3c\phi_{xxu} = \lambda\left(au^{1/2} + bu\right)\\
u_{xx}: &\quad -\left(au^{1/2} + bu\right)\phi_u - 3c\phi_{xu} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_x^2: &\quad -\left(au^{1/2}+bu\right)\phi_{uu}-3c\phi_{xuu}=0\\
u_xu_{xx}: &\quad -3c\phi_{uu}=0\\
u_{xxx}: &\quad -c\phi_u=c\lambda\\
u_x^3: &\quad -c\phi_{uuu}=0\\
sabit: &\quad -\left(au^{1/2}+bu\right)\phi_{xx}-c\phi_{xxx}=0\\
kesirli: &\quad (D_t^\alpha)^*\phi=\lambda u_t^\alpha
\end{aligned}
$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden $f(t)$ ve $g(t)$ keyfi fonksiyonları için

$$\phi=v=f(t)x+g(t) \tag{9.2.1}$$

bulunur.

(9.2.1) ifadesinde $g(t)=0$ olduğunda $v_1=f(t)x$ için Lagrangian

$$\mathcal{L}=f(t)x\left[u_t^\alpha+\left(au^{1/2}+bu\right)u_x+cu_{xxx}\right]$$

biçimindedir. Dolayısıyla (9.0.1) denkleminin korunum vektörleri

$$
\begin{aligned}
T_1^t=&\sum_{k=0}^{n-1}D_t^{\alpha-1-k}(W)D_t^k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u}\right)-(-1)^nJ\left(W,D_t^n(f(t)x)\right)\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}D_t^{\alpha-1-k}(-u_x)D_t^k\left(f(t)x\right)-(-1)^nJ\left(-u_x,D_t^n(f(t)x)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1^x=&W\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_x}+D_x(W)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xx}}+D_x^2(W)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xxx}}\\
=&-f(t)x\left(au^{1/2}+bu\right)u_x+cf(t)u_{xx}-cf(t)xu_{xxx}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde (9.2.1) ifadesinde $f(t) = 0$ olduğunda $v_2 = g(t)$ için Lagrangian

$$\mathcal{L} = g(t)\left[u_t^\alpha + \left(au^{1/2} + bu\right)u_x + cu_{xxx}\right]$$

olup (9.0.1) denkleminin korunum vektörleri

$$\begin{aligned}
T_1^t =& \sum_{k=0}^{n-1} D_t^{\alpha-1-k}(W)D_t^k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u}\right) - (-1)^n J\left(W, D_t^n(f(t)x)\right)\\
=& \sum_{k=0}^{n-1} D_t^{\alpha-1-k}(-u_x)D_t^k(g(t)) - (-1)^n J\left(-u_x, D_t^n(g(t))\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1^x =& W\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_x} + D_x(W)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xx}} + D_x^2(W)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xxx}}\\
=& -g(t)\left(au^{1/2} + bu\right)u_x - g(t)u_{xxx}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

10. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Bu doktora tezinde lineer olmayan KDD'lerin bağımsız değişkenlerden biri t zaman olan OTDD ve OTDDS ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Gözönüne alınan denklem veya sistem için Lie grup analizinin teorik yapısı ve uygulaması verilmiştir. Diferensiyel denklemlerin korunum kanunlarının oluşturulmasında üç yaklaşım ele alınarak ilişkileri araştırılmıştır. Buna ek olarak simetriler ile korunum kanunlarının ilişkisiyle tanımlanan çift indirgeme yönteminin uygulaması verilmiştir. Ayrıca literatürdeki en genel tam çözüm bulma yöntemlerinden üç tanesi gözönüne alınarak algoritmik uygulanışı verilmiştir.

Tezin birinci bölümü olan giriş kısmında Lie gruplarının önemi, tarihsel süreci ve korunum kanunları arasındaki ilişkiler sunulmuştur. Korunum kanunlarını bulmak için literatürde va rolan önemli bazı yaklaşımların neler olduğu vurgulanmıştır. OTDD denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için literatürde var olan yaklaşımlardan bahsedilmiştir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerinde, tezin alt yapısını oluşturacak olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler ayrıntılı bir biçimde verilmiştir.

Beşinci bölümde varyant Boussinesq sistemi ele alınarak sisteme Lie grup analizi uygulanarak Lie nokta simetrileri elde edilmiştir. Simetrilerdeki keyfi sabitlerin dört özel durumu için simetri indirgemeleri bulunmuştur. Ardından en basit denklem yöntemi ile sistemin indirgenmiş denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca çarpan yöntemi ile sistemin çarpan fonksiyonları elde edilmiş ve bu çarpanlara karşılık gelen korunum kanunları oluşturulmuştur. Elde edilen çarpanlar ve korunum kanunları GeM paket programı ile karşılaştırılarak sonuçlar teyit edilmiştir.

Altıncı bölümde Schamel-Korteweg-de Vries denklemi ele alınmıştır. Denklemin Lie grup analizi ile üç farklı durum için Lie nokta simetrileri elde edilmiştir. Ardından denkleme genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi sistematik olarak uygulanarak denklemin tam çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler Çizelge 6.2.1'de ifade edilmiştir. Ayrıca keyfi sabitlere verilen keyfi değerler için denklemin sayısal simülasyonları Şekil 6.2.1a-b-c-d-e ile sunulmuştur. Buna ek olarak en basit denklemlerden Bernoulli denklemi gözönüne alınmıştır. Bernoulli denkleminin çözümlerinden yola çıkarak S-KdV denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu çözümlere karşılık gelen bazı simülasyonlar Şekil 6.3.1a-b-c ile sunulmuştur. Ardından en basit denklemlerden bir diğeri olan Riccati denklemi ele alınarak S-KdV denkleminin tam çözümleri araştırılmıştır. Bulunan tam çözümler Şekil 6.3.2a-b ile sayısal olarak simülasyon edilmiştir. S-KdV denklemi için çarpan yöntemi kullanılarak denklemin çarpanlar elde edilmiş ve bu çarpanlara karşılık gelen korunum kanunları oluşturulmuştur. Bunun yanında Ibragimov'un yeni korunum teoremi ile denklemin yerel olmayan korunum kanunları oluşturularak Çizelge 6.5.1'de ifade edilmiştir. Son olarak elde edilen korunum kanunları ile ilişkili olan simetriler kullanılarak çift indirgeme yöntemi ile denklemin kapalı çözümleri bulunmuştur.

Yedinci bölümde, $(2+1)$ boyutlu K-DS nin Lie grup analizi yapılmıştır. Ayrıca sistemin bazı tam çözümlerini bulmak için $(G'/G, 1/G)$ genişleme yöntemi uygulanmıştır. Bu sonuçlardan bazıları literatürdeki diğer çalışmalarla uyumlu olup ayrıca yeni sonuçlar da elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan $(G'/G, 1/G)$ genişleme yöntemi, lineer olmayan OTDD için güçlü, etkili ve uygun bir yöntem olduğu görülmüştür. Açıkça bu yöntemin diğer yöntemlerden daha genel uygulamalara sahip olduğu söylenebilir. Ele alınan sistem için korunum kanunları çarpan yaklaşımı ile oluşturulmuştur. Bu yöntem üç çarpanı ve dolayısıyla da üç korunum kanununu oluşturmuştur. Burada oluşturulan korunum kanunu ile sistemin çözümleri ve indirgemeleri yapılabilir (Bokhari 2011).

Sekizinci bölümün ilk kısmında logaritmik KdV-benzeri denklemi ele alınmıştır. Denklemin Lie grup analizi yapılarak Lie nokta simetrileri elde edilmiştir. Ayrıca çarpan yöntemi ile denklemin çarpanları ve bu çarpanlara karşılık gelen korunum kanunları oluşturulmuştur. Oluşturulan korunum kanunları özyineleme formülünde kullanılarak denklemin yerel olmayan korunum kanunları da elde edilmiştir. Ibragimov'un geliştirdiği eşlenik denklem tanımı kullanılarak denklemin eşlenik denklemi elde edilmiştir. Buradan hareketle lineer olmayan kendi eşleniklik ile elde edilen ϕ fonksiyonlarının çarpanlar ile eşit olduğu görülmüştür. Buna ek olarak denklemin eşlenik simetrileri elde edilmiştir. Eşlenik simetrinin ω sonsuz küçük fonksiyonlarının yukarıda bahsedilen ϕ fonksiyonlarına ve çarpanlara eşit olduğu gösterilmiştir. Oluşturulan korunum kanunları ile ilişkili simetriler kullanılarak çift indirgeme yöntemi ile denklemin analitik çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen çözümler için Şekil 8.1.1 sayısal simülasyonu sunulmuştur. Bölümün ikinci kısmında logaritmik KP-benzeri denklemi ele alınarak denklemin Lie nokta simetrileri elde edilmiştir. Çarpan yöntemi ile denklemin çarpanları ve bu çarpanlara karşılık gelen korunum kanunları oluşturulmuştur. Oluşturulan korunum kanunları özyineleme formülünde kullanılarak yerel olmayan korunum kanunları elde edilmiştir. Ayrıca orijinal denklemin eşlenik denklemi elde edilerek lineer olmayan kendi eşleniklik ile elde edilen ϕ fonksiyonlarının denklemin Λ çarpan fonksiyonlarına eşit olduğu görülmüştür. Bunlara ek olarak denkem için eşlenik simetriler elde edilerek ω sonsuz küçük fonksiyonlarının yukarıda bahsedilen ϕ fonksiyonlarına ve Λ çarpan fonksiyonlarına eşit olduğu açıkça görülmüştür. Son olarak KP-benzeri denkleminin korunum kanunları ile ilişkili simetriler kullanılarak çift indirgeme yöntemi ile denklem birinci mertebeden ADD'ye indirgenmiştir. Bazı özel durumlar için indirgenmiş ADD'in analitik çözümleri bulunabilir.

Dokuzuncu bölümde, zaman kesirli Schamel-Korteweg-de Vries denklemi ele alınarak denklemin Lie grup analizi yapılarak simetrileri elde edilmiştir. Ayrıca korunum kanunları oluşturulmuştur. Bunlara ek olarak lineer olmayan kendi eşleniklik ile korunum vektörleri elde edilmiştir.

Tüm bu elde edilen sonuçların yanında ileride çalışılması düşünülen açık problemler de mevcuttur. Örneğin, yerel olmayan simetrileri bulmak için genel literatürde henüz bir genel yaklaşım yoktur. Bunu bulmak için ilerideki çalışmalarda algoritmik bir yöntem geliştirmek istiyorum. Bir diğer açık problem kesirli mertebeli diferensiyel denklemler için yerel olmayan simetrilerin araştırılmasıdır. Ayrıca zaman kesirli terimin yanına uzay kesirli terimin çarpım olarak gelmesi halinde Lie grup analizinin araştırılması da açık problemlerdendir. Bu tez çalışmasında R-L anlamında kesirli mertebeli türev operatörü kullanılmıştır. Bunun haricinde Caputo anlamında kesirli türev operatörü için de Lie simetri analizi ve korunum kanunlarının oluşturulması ilerideki çalışma konularından olacaktır. Bir diferensiyel denklem (veya sistem) homojen dengeleme özelliğine sahip değilse tam çözümlerin nasıl elde edileceği açık bir problem olarak durmaktadır. Bu problemi ele alacak bir yaklaşım geliştirmek istiyoruz.

KAYNAKLAR

Ahmad, A. 2005. Symmetry solutions of some nonlinear PDE's. *Master Thesis*, Deanship of Graduate Studies, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran Saudi Arabia.

Akbulut, A., Taşcan, F. 2017. Lie symmetries, symmetry reductions and conservation laws of time fractional modified Korteweg–de Vries (mkdv) equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 100: 1-6.

Anco, S.C., Bluman, G.W. 2002. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations, Part II. General treatment. *European Journal of Applied Mathematics*, 13(5): 567-585.

Biswas, A. 2009. Solitary wave solution for the generalized Kawahara equation. *Applied Mathematics Letters*, 22(2): 208-210.

Bluman, G.W., Reid, G.J., Kumei, S. 1988. New classes of symmetries for partial differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 29(4): 806-811.

Bluman, G.W., Kumei, S. 1989. Symmetries and differential equations with 21 illustrations. Springer-Verlag, New York, 412p.

Bluman, G.W., Anco, S.C. 2002. Symmetry and integration methods for differential equations with 18 illustrations. Springer-Verlag, New York, 419p.

Bluman, G.W., Cheviakov, A.F., Anco, S.C. 2010. Applications of symmetry methods to partial differential equations. New York: Springer, 168p.

Bokhari, A.H., Al-Dweik, A.Y., Zaman, F.D., Kara, A. H., Mahomed, F. M., 2010. Generalization of the double reduction theory. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(5): 3763-3769.

Cheviakov, A.F. 2007. GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations. *Computer Physics Communications*, 176(1): 48-61.

Cheviakov, A.F., Naz, R. 2017. A recursion formula for the construction of local conservation laws of differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 448(1): 198-212.

Conte, R., Musette, M. 1989. Painleve analysis and Bäcklund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(2): 169-177.

Ericksonn, M. 2008. Symmetries and conservation laws obtained by Lie goup analysis for certain physical systems. *M.S. Thesis*, Uppsala School of Engineering.

Fan, E.G. 2000. Extended $tanh$-function method and its applications to nonlinear equations. *Physics Letters A*, 277(4): 212-218.

Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M. 1974. Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. methods for exact solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27(1): 97-133.

Gazizov, R.K., Kasatkin, A.A., Lukashchuk, S.Y. 2007. Continuous transformation groups of fractional differential equations. *Vestnik USATU*, 9: 125-135.

Gazizov, R.K, Kasatkin, A.A, Lukashchuk, S.Y. 2009. Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Phys.Scr.*, T136(014016): 1-5.

Gilmore, R. 1974. Lie groups, Lie algebras, and some of their applications. A. Wiley-Inter Science Publication, Canada, 589p.

Gilmore, R. 2008. Lie group, physics and geometry. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 504p.

Hilfer, R. 2000. Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, Singapore, 464p.

Hirota, R. 2004. The direct method in soliton theory. Cambridge University Press, 204p.

Hydon, P.E. 2000. Symmetry methods for differential equations a beginner's guide. Cambridge University Press, New York, 215p.

Huang, Q., Zhdanov, R. 2014. Symmetries and exact solutions of the time fractional Harry-Dym equation with Riemann-Liouville derivative. *Phys. A*, 409: 110–118.

Ibragimov, N.H. 1993. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Volume 1. Symmetries exact eolutions and conservation laws. CRC Press, 552p.

Ibragimov, N.H. 2001. Transformation groups applied to mathematical physics Volume 3. Springer Science & Business Media, 403p.

Ibragimov, N.H. 2007. A new conservation theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 333(1): 311-328.

Ibragimov, N.H. 2011. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws. arXiv preprint arXiv:1109.1728.

Kadomtsev, B.B., Petviashvili, V.I. 1970. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *In Sov. Phys. Dokl*, 15(6): 539-541.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. 2006. Theory and application of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 189p.

Kiraz Açıl, F. 2007. Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin Lie simetrileri üzerine. *Doktora Tezi*, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir.

Konno, K., Wadati, M. 1975. Simple derivation of Bäcklund transformation from Riccati form of inverse method. *Progress of Theoretical Physics*, 53(6): 1652-1656.

Kudryashov, N.A. 1988. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics. *In Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 52(3): 361-365.

Kudryashov, N.A. 2005. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(5): 1217-1231.

Kudryashov, N.A. 2008. Solitary and periodic solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Regular and Chaotic Dynamics*, 13(3): 234-238.

Kudryashov A.A. 2012. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6): 2248-2253.

Li, L.X., Li, E.Q., Wang, M.L. 2010. The $(G'/G, 1/G)$-expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 25(4): 454-462.

Lukashchuk, S.Y. 2015. Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations. *Nonlinear Dynamics*, 80(1-2): 791-802.

Ma, W.X. 2004. Wronskians, generalized Wronskians and solutions to the Korteweg-de Vries equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 19(1): 163-170.

Ma, Y., Geng, X. 2012. Darboux and Bäcklund transformations of the bidirectional Sawada-Kotera Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 218(12): 6963-6965.

Malfliet, W., Hereman, W. 1996. The $tanh$ method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 54(6): 563.

Noether, E. 1918. Invariante variations probleme. *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse Heft*, 2: 235-257. English translate:1971 *Transport Theory Statist. Phys.* 1(3): 186-207.

Olver, P.J. 1993. Application of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag, New York. 514p.

Olver, P.J. 2000. Applications of Lie groups to differential equations. Vol. 107, Springer Science & Business Media, 517p.

Osler, T.J. 1970. Leibniz rule for fractional derivatives generalized and an application to infinite series. *SIAM J. Appl. Math.*, 18: 658-674.

Ovsyannikov, L.V. 1982. Group analysis of differential equations. Academic Pres, New York, 416p.

Özceylan, M. 2007. Bir parametreli Lie gruplarının diferensiyel denklemlere uygulanması. *Y. Lisans Tezi*, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Edirne.

Parkes, E.J. 1994. Exact solutions to the two-dimensional Korteweg-de Vries-Burgers equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(13): L497-L501.

Parkes, E.J., Duffy, B.R. 1996. An automated $tanh$-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. *Comput. Phys. Commun.*, 98: 288-300.

Podlubny, I. 1999. Fractional differential equations. Academic Press, San Diego, 341p.

Pucci, E., Saccomandi, G. 1993. Potential symmetries and solutions by reduction of partial differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(3): 681-690.

Ryabov, P.N. 2010. Exact solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7): 3585-3590.

Sahadevan, R., Bakkyaraj, T. 2012. Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 393: 341–347.

San, S. 2011. Kısmi diferensiyel denklemlerin simetrileri ve çözümleri. *Y.L. Tezi*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı, Eskişehir.

San, S. 2014. Kısmi diferensiyel denklemlerin korunum kanunları ve indirgemeleri. *Doktora Tezi*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı, Eskişehir.

San, S., Yaşar, E. 2015. On the conservation laws of Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1): 1297-1304.

San, S. 2016. Invariant analysis of nonlinear time fractional Qiao equation. *Nonlinear Dynamics*, 85(4): 2127-2132.

Sen, A., Ahalpara, D.P., Thyagaraja, A., Krishnaswami, G.S. 2012. A KdV-like advection-dispersion equation with some remarkable properties. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(11): 4115-4124.

Singla, K., Gupta, R.K. 2016. On invariant analysis of some time fractional nonlinear systems of partial differential equations. I. *Journal of Math. Phys.*, 57(101504): 1-14.

Stephani, H. 1989. Differential equations: their solution using symmetries. Cambridge University Press, 264p.

Steudel, H. 1962. Über die zuordnung zwischen invarianzeigenschaften und Erhaltungssätzen. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 17(2): 129-132.

Vitanov, N.K. 2010. Application of simplest equations of Bernoulli and Riccati kind for obtaining exact traveling-wave solutions for a class of PDEs with polynomial nonlinearity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(8): 2050-2060.

Yakut, A. 2012. Kısmi diferensiyel denklemler için korunum kanunları. *Yükseklisans*

Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı, Eskişehir.

Yaşar, E. 2009. Oluşum türü denklemlerin yerel ve yerel olmayan yeni korunum kanunları. *Doktora Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Yaşar, E., Yıldırım, Y., Khalique, C.M. 2016. Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada–Kotera–Ito equation. *Results in Physics*, 6: 322-328.

Wang, M., Li, X., Zhang, J. 2008. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4): 417-423.

Wang, G.W., Liu, X.Q., Zhang, Y.Y. 2013. Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 18: 2321–2326.

Wazwaz, A.M. 2015. Peakon and solitonic solutions for KdV-like equations. *Physica Scripta*, 90(4): 1-9.

Wazwaz, A.M. 2016. Gaussian solitary wave solutions for nonlinear evolution equations with logarithmic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 83(1-2): 591-596.

Zayed, E.M.E., Abdelaziz, M.A.M. 2012. The two-variable $(G'/G, 1/G)$-expansion method for solving the N-nonlinear KdV-mKdV equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012: 1-14.

Zheng, S. 2004. Nonlinear evolution equations. CRC Press, 287p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	İlker Burak GİRESUNLU
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Amasya 22/08/1985
Yabancı Dil	:	İngilizce
Eğitim Durumu		
Lise	:	Amasya Anadolu Lisesi (2003)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2008)
Yüksek Lisans	:	Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2013)
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2010-2011) Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2011-2016) Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2016-)
İletişim(e–posta)	:	ilkergiresunlu@gmail.com

Yayınlar

Giresunlu İ.B., Yasar E. 2015. First integrals and exact solutions for path equation describing minimum drag work. *Int. J. Adv. Appl. Math. and Mechi*, 2(4): 41-52.

Yaşar E., Giresunlu İ.B. 2015. Lie symmetry reductions, exact solutions and conservation laws of the third order variant Boussinesq system. *Acta Physica Polonica A*, 128(3): 252-255.

Yaşar E., Giresunlu İ.B. 2016. The $(G'/G, 1/G)$-expansion method for solving nonlinear space–time fractional differential equations. *Pramana*, 87(2): 1-7.

Yaşar E., Yıldırım Y., Giresunlu İ.B. 2016. First integrals and analytical solutions of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient. *Pramana*, 87(2): 1-9.

Yaşar E., Giresunlu İ.B. 2016. Exact traveling wave solutions and conservation laws of (2+1) dimensional Konopelchenko-Dubrovsky system. *International Journal of Nonlinear Science*, 22(2): 118-128.

Giresunlu İ.B., Özkan Y.S., Yaşar E. 2017. On the exact solutions, lie symmetry analysis, and conservation laws of Schamel-Korteweg-de Vries equation. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 40: 3927–3936.

Yaşar E., Giresunlu İ.B. 2017. Symmetry reductions, exact solutions and conservation laws for the coupled nonlinear Klein-Gordon system. *Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 13(3): 593-599.