



**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDAKİ
YÜZEYLERİN GRASSMANN GÖRÜNTÜLERİ**

ERAY DEMİRBAŞ



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDAKİ YÜZEYLERİN GRASSMANN
GÖRÜNTÜLERİ

Eray DEMİRBAŞ

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2018
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Eray DEMİRBAŞ tarafından hazırlanan “4-Boyutlu Öklid Uzayındaki Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN



Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN



İmza

Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN



İmza

Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı

Üye: Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN



İmza

Bursa Teknik Üniversitesi

Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım



Prof. Dr. Ali BAYRAM

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.././....

İmza

Ad ve Soyadı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDAKİ YÜZEYLERİN GRASSMANN GÖRÜNTÜLERİ

Eray DEMİRBAŞ

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmanın amacı \mathbb{R}^4 deki yüzeylerin Grassmann görüntüleri ile ilgili sonuçları vermektir. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde sonraki bölümde kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde \mathbb{R}^4 deki rotasyon yüzeyleri, Aminov yüzeyi, tensör çarpım yüzeylerinin Grassmann görüntüleri ve bu yüzeylerin $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Grassmann manifoldu, Yüzeylerin Grassmann görüntüleri.

2018, vi+36 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

GRASSMANN IMAGE OF SURFACES IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Eray DEMİRBAŞ

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

The aim of this thesis is to give the results of the Grassmann images of surfaces in \mathbb{R}^4 .

This thesis consist of three chapters.

First chapter is introduction.

Second chapter consist of some basic definitions which will be use in the other chapters.

In the third chapter of rotation surfaces in \mathbb{R}^4 , Aminov surface, Grassmann images of tensor product surfaces and the surfaces are given the necessary and sufficient conditions to lay on the $S_1^2 \times S_2^2$ product manifold.

Key Words: Grassmann manifolds, Grassmann image of surfaces.

2018, vi+36 pages.

TEŞEKKÜR

Gerek lisans, gerek yüksek lisans eğitimim boyunca engin bilgilerinden çokça yararlandığım, maddi manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini çok gördüğüm, kendisinden çok şey öğrendiğim sayın Doç. Dr. Betül BULCA' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Beni bugünlere getiren, bana gösterdikleri sevgiyle ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan kıymetli aileme sonsuz teşekkürler.

Eray DEMİRBAŞ

.././....

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. GRASSMANN MANİFOLDLARI.....	7
3.1. Dış Çarpım.....	7
3.2. $G(2,4)$ Grassmann Manifoldları	9
3.3. \mathbb{R}^4 deki Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri.....	11
3.4. $G(2,4)$ Grassmann Manifoldu $S_1^2 \times S_2^2$ Manifolduna İzometrik Olması... ..	15
3.5. \mathbb{R}^4 de 1. Tip Rotasyonel Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri	16
3.6. \mathbb{R}^4 de 2. Tip Rotasyonel Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri	22
3.7. \mathbb{R}^4 de Kapalı Denklemlerle Verilen Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri..	25
3.8. \mathbb{R}^4 de Tensör Çarpım Yüzeylerinin Grassmann Görüntüleri	30
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ.....	36

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

\mathbb{R}^n	n-boyutlu Öklid uzayı
M^n	n-boyutlu manifold
δ	Meridyen eğrisi
$G(2,4)$	Grassmann Manifold
Ψ	Grassmann Dönüşümü
$\Psi(M^n)$	Teğetsel Görüntü
$(f \otimes h)$	Tensör Çarpım
M	Riemann Manifold
$\ \cdot \ $	Norm
X	Regüler yama
M^2	Yüzey
C^∞	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	\mathbb{R}^n de Riemann koneksiyonu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
L_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
\wedge	Dış Çarpım
δ_{ij}	Kronecker delta
$ $	Determinant
P_{ij}	Plücker Koordinatlar
ξ, η	Birim Normal
Γ^2	Grassmann Görüntü
$S_1^2 \times S_2^2$	Çarpım Manifoldu
φ	Türevlenebilir Fonksiyon

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Genelleştirilmiş Rotasyon Yüzeyinin İzdüşümü.....	22
Şekil 3.2.a 1. Otsuiki Küresinin İzdüşümü.....	23
Şekil 3.2.b 2. Otsuiki Küresinin İzdüşümü	23



1. GİRİŞ

Son 40-45 yıldır diferansiyel geometride Grassmann manifoldları konusunda artan bir ilgi görülmektedir. Grassmann manifoldları klasik anlamda diferansiyellenebilir manifoldlar olup bunların topolojileri iyi tanımlıdır.

\mathbb{R}^{n+d} , $(n+d)$ -boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $0 \in \mathbb{R}^{n+d}$ orjin noktasından geçen n -boyutlu tüm düzlemlerin kümesi *Grassmann manifoldunu* oluşturur ve bu manifold $G(n, n+d)$ ile gösterilir (Borisenko ve Nikolaevskii 1991). Bu düzlemler Grassmann manifoldunun noktaları olarak ifade edilir. n -boyutlu manifold M^n olmak üzere

$$\Psi : M^n \rightarrow G(n, n+d), \Psi(x) = p$$

dönüşümü M^n nin görüntüsü $G(n, n+d)$ Grassmann manifoldunun içinde yatacak şekilde tanımlansın. Bu dönüşüme M^n nin *Grassmann dönüşümü*, $\Psi(M^n)$ ye ise M^n nin Ψ altındaki *Grassmann görüntüsü* (Borisenko ve Nikolaevskii 1991) ya da *genelleştirilmiş küresel görüntüsü* veya *teğetsel görüntüsü* (Aminov 2001) adı verilir. 4-boyutlu Öklid uzayında Rotasyonel yüzeyler ilk defa 1890 yılında Cole tarafından tanımlanmıştır (Cole 1890). Daha sonra D. Moore genelleştirilmiş rotasyon yüzeylerini

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(u, v) &= x_1(u) \cos cv - x_2(u) \sin cv \\ \tilde{X}_2(u, v) &= x_1(u) \sin cv + x_2(u) \cos cv \\ \tilde{X}_3(u, v) &= x_3(u) \cos dv - x_4(u) \sin dv \\ \tilde{X}_4(u, v) &= x_3(u) \sin dv + x_4(u) \cos dv \end{aligned} \quad (1.1)$$

parametrizasyonu ile tanımlanmıştır (Moore 1919).

Burada $\delta(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u), x_4(u))$ meridyen eğrisi ve $c, d \in R$ dir. Eğer $c = 0$ ya da $d = 0$ alınırsa (1.1) denklemi ile verilen yüzey (*basit*) *rotasyon yüzeyi* olarak adlandırılır. Gauss eğrilikli rotasyon yüzeylerinin bir karakterizasyonu (Wong 1946) ve (Cuong 2012) de verilmiştir. Eğer $\delta(u)$ meridyen eğrisi x_1, x_3 - düzleminde yatan bir eğri; yani $\delta(u) = (x_1(u), 0, x_3(u), 0)$ olarak alınırsa bu takdirde rotasyon yüzeyi

$$M_1 : x(u, v) = (x_1(u) \cos cv, x_1(u) \sin cv, x_3(u) \cos dv, x_3(u) \sin dv)$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır. Burada $u \in I \subset R$, $v \in (0, 2\pi)$ ve I üzerinde $c^2 x_1^2(u) + d^2 x_3^2(u) > 0$ dir (Arslan ve ark. 2012), (Ganchev ve Milousheva 2010),

(Dursun ve Turgay 2012) ve (Yoon 2003). Bu tür yüzeyler *1.tip rotasyon yüzeyi* olarak adlandırılır (Arslan ve ark. 2012). Eğer $c = d = 1$ ve $x_1(u) = r(u)\cos u$, $x_2(u) = r(u)\sin u$ alınrsa rotasyon yüzeyi *Vranceanu rotasyon yüzeyidir* (Vranceanu 1977).

Eğer meridyen eğrisi $\delta(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ olarak alınrsa bu takdirde rotasyon yüzeyi $M_2 : y(u, v) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u)\cos v, x_4(u)\sin v)$ parametrizasyonuna sahiptir. Burada $u \in I$, $v \in (0, 2\pi)$ dir. Bu yüzey $\delta(u)$ meridyen eğrisinin birim çember etrafında döndürülmesiyle elde edilir (Ganchev ve Milousheva 2008), (Otsuiki 1966). Bu tür yüzeyler *2.tip rotasyonel yüzeyler* olarak bilinir (Arslan ve ark. 2017). Bulca ve ark. 2012 yılında yaptıkları çalışmada bu yüzeylere \mathbb{R}^4 de *küresel çarpım yüzeyleri* olarak da adlandırmışlardır (Bulca ve ark. 2012). Eğer $\delta(u) = (x_1(u), x_2(u), \sin u)$ olarak alınrsa rotasyonel yüzey *Otsuiki yüzeyi* adını alır (Otsuiki 1966).

Bu çalışmanın amacı Grassmann manifold kavramını tanımlayıp \mathbb{R}^4 deki bazı yüzeylerin Grassmann görüntülerinin bir sınıflandırmasını vermektir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olup tezde yapılan çalışmanın bir özetini içerir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak olan temel tanım ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde \mathbb{R}^4 deki yüzeylerin Grassmann görüntüleri ile ilgili temel sonuçlar verilmiştir. Bu bölüm 8 kısımdan oluşmakta olup orijinal sonuçlar içermektedir. Birinci kısımda n-boyutlu Öklid uzayında dış çarpım tanımlanmış olup dış çarpımla ilgili bazı sonuçlar ve örnekler verilmiştir. İkinci kısımda $G(2,4)$ Grassmann manifoldları verilmiş ve Plücker bağıntıları ele alınmıştır. Üçüncü kısımda \mathbb{R}^4 deki Grassmann görüntüleri ile ilgili bazı temel sonuçlar verilmiş ve tor yüzeyinin Grassmann görüntüsünün Clifford tor yüzeyi olduğu görülmüştür. Dördüncü kısımda $G(2,4)$ Grassmann manifoldunun $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifolduna izometrik olduğuna dair temel özellikler incelenmiştir. Beşinci kısımda \mathbb{R}^4 de 1.tip rotasyonel yüzeylerinin Grassmann görüntüleri ele alınmıştır. Bu görüntü yüzeyinin $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Altıncı kısımda \mathbb{R}^4 de 2.tip rotasyonel yüzeylerin Grassmann

görüntüleri ele alınmıştır. Bu yüzeylerin $S_1^2 \times S_2^2$ üzerinde yatması için rotasyonel yüzeyin Otsuki yüzeyi olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Yedinci kısımda \mathbb{R}^4 de kapalı denklemlerle verilen Grassmann görüntüsü ele alınmıştır. Aminov yüzeyinin Grassmann görüntüsünün $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldunda yatması için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Son kısımda \mathbb{R}^4 de tensör çarpım yüzeyinin Grassmann görüntüsü ele alınmıştır. Görüntü yüzeyinin $S_1^2 \times S_2^2$ manifoldunda yatması için gerek ve yeter şart Aminov yüzeyin Clifford tor yüzeyi olması gerektiği sonucuna varılmıştır.

M ve N diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere

$$f : M \rightarrow R^m, h : N \rightarrow R^n$$

immersiyonları verilsin. Bu immersiyonların tensör çarpım dönüşümü

$$(f \otimes h)(p, q) = f(p)h(q)$$

biçiminde tanımlanır. $(f \otimes h)$ immersiyon olması için gerek ve yeter şartlar (Decruyenaere ve ark 1993) çalışmasında verilmiştir. Daha sonraları küresel ve equivariant immersiyonların tensör çarpımları (Decruyenaere ve ark.1994) çalışmasında ele alınmıştır. $c_1(u) = (\lambda(u), \delta(u))$ ve $c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ düzlemsel eğriler olmak üzere bu iki eğrinin tensör çarpımı

$$f = c_1 \otimes c_2 : R^2 \rightarrow R^4$$

$$f(u, v) = (\alpha(v)\lambda(u), \beta(v)\lambda(u), \alpha(v)\delta(u), \beta(v)\delta(u))$$

biçiminde tanımlanır (Mihai ve ark. 1994), (Decruyenaere ve ark. 1994). Eğer c_1 eğrisi orijin merkezli çember alınırsa tensör çarpım yüzeyi

$$M : f(u, v) = (\alpha(v)\cos u, \beta(v)\cos u, \alpha(v)\sin u, \beta(v)\sin u)$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır (Mihai ve Rouxel 1995), (Mihai ve ark. 1995), (Arslan ve ark. 2001).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1.: M bir diferansiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den \mathbb{R} ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı, simetrik ve 2-lineer g dönüşümüne Riemann metriği ve g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *Bağlantılı manifold* adı verilir (O'Neill 1966).

Tanım 2.2.: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü

$$i) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (2.2.2)$$

$$ii) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (2.2.3)$$

şartları sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *Sıfır Torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi Civita Koneksiyonu* adı verilir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.: M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M), \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^∞ $X, Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. $\forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} i) \nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \\ ii) \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y, \\ iii) \nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ iv) \nabla_X (fY) &= f \nabla_X Y + X(f)Y \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

özelliklerini sağlayan ∇ ya *Lineer Koneksiyon* (veya *Kovaryant Türev*) adı verilir (O'Neill 1983).

M^2 yüzeyi $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ yaması ile verilsin. M^2 nin $x \in x(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_x(M^2)$, x_u ve x_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M^2 nin *birinci temel formu*

$$I = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (2.2.6)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_u, x_u \rangle \\ g_{12} &= \langle x_u, x_v \rangle \\ g_{22} &= \langle x_v, x_v \rangle \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

1. *temel form katsayıları* olup $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ den indirgenmiş Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2.7) yardımıyla

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (2.2.8)$$

Riemann metriği elde edilir. Eğer $g \neq 0$ ise $x(u,v)$ yaması *regülerdir* denir (Gray 1993). Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $x(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir.

Tanım 2.4.: $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $x(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. \mathbb{R}^n de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X_i, X_j \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M) ; h(X_i, X_j) = \tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j, \quad (2.2.9)$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.9) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.5.: $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $x(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde N_1, N_2, \dots, N_{n-2} , M nin normal vektörleri ve $\forall X_i \in \chi(M)$ olmak üzere M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A : \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_{N_\alpha} X_i = -\tilde{\nabla}_{X_i} N_\alpha + \nabla_{X_i}^\perp N_\alpha \quad (2.2.10)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_{N_\alpha} X_i$, N_α ya karşılık gelen şekil operatörü ve ∇^\perp ise $\chi^\perp(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Literatürde (2.2.10) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.6.: $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $x(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $x(u,v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} ve normal vektör alanları N_1, N_2, \dots, N_{n-2} olmak üzere M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} L_{11}^\alpha &= \langle x_{uu}, N_\alpha \rangle, \\ L_{12}^\alpha &= \langle x_{uv}, N_\alpha \rangle, \quad 1 \leq \alpha \leq n-2 \\ L_{22}^\alpha &= \langle x_{vv}, N_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

Herhangi $X_i, X_j \in T_p(M)$ için

$$\langle A_{N_\alpha} X_i, X_j \rangle = \langle h(X_i, X_j), N_\alpha \rangle = L_{ij}^\alpha, \quad 1 \leq i, j \leq 2, 1 \leq \alpha \leq n-2, \quad (2.2.12)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$h(X_i, X_j) = \sum_{\alpha=1}^{n-2} L_{ij}^\alpha N_\alpha, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (2.2.13)$$

dir.

3. GRASSMANN MANİFOLDLARI

Bu bölümde Grassmann manifold tanımlanmış ve $G(2,4)$ Grassmann manifoldunun özellikleri verilmiştir. Bu bölümde \mathbb{R}^4 deki bazı yüzeylerin Grassmann görüntüleri incelenmiş ve bunlarla ilgili orijinal sonuçlar verilmiştir.

3.1. Dış Çarpım:

\mathbb{R}^n , n-boyutlu Öklid uzayı ($n \geq 1$) olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den \mathbb{R}^N ye $\left(N = \frac{n(n-1)}{2} \right)$

tanımlı

$$\wedge : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N; (v, w) \rightarrow v \wedge w \in \mathbb{R}^N \quad (3.1.1)$$

dönüşümü aşağıdaki şartlar sağlar ise \wedge ye \mathbb{R}^n de *dış çarpım* adı verilir;

E1) $(v, w) \rightarrow v \wedge w$ dönüşümü 2-lineerdir.

Yani $\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ve $v, w, v_i, w_i \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \wedge (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \alpha_1 \beta_1 v_1 \wedge w_1 + \alpha_1 \beta_2 v_1 \wedge w_2 \\ &+ \alpha_2 \beta_1 v_2 \wedge w_1 + \alpha_2 \beta_2 v_2 \wedge w_2 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

E2) $(v, w) \rightarrow v \wedge w$ dönüşümü ters simetriktir.

Yani $v \wedge w = -w \wedge v$ dir. Bunun yardımıyla $v \wedge v = 0$ dir.

E3) $e_i = (\delta_i, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_n})$, $1 \leq i \leq n$ birim vektörleri için

$$e_1 \wedge e_2 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_1 \wedge e_3 = (0, 1, \dots, 0)$$

.....

$$e_{n-1} \wedge e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

birim vektörleri \mathbb{R}^N nin elemanlarıdır. Burada δ_{ij} Kronecker deltadır. Böylece (3.1.3)

bivektörleri \mathbb{R}^N nin bir bazını oluşturur. Yani

$$\langle e_i \wedge e_k, e_j \wedge e_l \rangle = \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ 0, & i \neq k, j \neq l \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Burada $\langle \rangle$ ifadesi \mathbb{R}^N nin iç çarpımıdır.

Önerme 3.1.1.: \mathbb{R}^n deki $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörlerinin dış çarpımı

$$v \wedge w = \sum_{1 < i < j < n} \begin{vmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix} e_i \wedge e_j \quad (3.1.5)$$

dır (Fröhlich 2013). Burada $\det(v, w)$ determinanı ifade etmektedir.

İspat: \mathbb{R}^n deki

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, \quad w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$$

vektörlerinin dış çarpımı

$$\begin{aligned} v \wedge w &= \left(\sum_{i=1}^n v_i e_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n w_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i w_j (e_i \wedge e_j) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$v \wedge w = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (v_i w_j - v_j w_i) e_i \wedge e_j \quad (3.1.6)$$

elde edilir. \square

Örnek 3.1.2.: $n = 3$ alındığında $N = 3$ olup bu durumda

$$e_1 \wedge e_2 = (1, 0, 0)$$

$$e_1 \wedge e_3 = (0, 1, 0)$$

$$e_2 \wedge e_3 = (0, 0, 1)$$

dir. Böylece

$$v = (v_1, v_2, v_3), \quad w = (w_1, w_2, w_3)$$

vektörlerinin dış çarpımı

$$v \wedge w = (v_1 w_2 - v_2 w_1) e_1 \wedge e_2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1) e_1 \wedge e_3 + (v_2 w_3 - v_3 w_2) e_2 \wedge e_3$$

olarak bulunur. Halbuki bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

olacaktır. Buradan $v \wedge w \neq v \times w$ olduğu görülür.

Örnek 3.1.3.: $n = 4$ alındığında $N = 6$ olup bu durumda

$$e_1 \wedge e_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$e_1 \wedge e_3 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$e_1 \wedge e_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$e_2 \wedge e_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$e_2 \wedge e_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$e_3 \wedge e_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

dir. Böylece

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

vektörlerinin dış çarpımı

$$v \wedge w = (v_1 w_2 - v_2 w_1, v_1 w_3 - v_3 w_1, v_1 w_4 - v_4 w_1, v_2 w_3 - v_3 w_2, v_2 w_4 - v_4 w_2, v_3 w_4 - v_4 w_3)$$

olarak bulunur. Buradan

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix} \quad (3.1.7)$$

Plücker koordinatları yardımıyla

$$v \wedge w = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}) \quad (3.1.8)$$

elde edilir.

3.2. $G(2,4)$ Grassmann Manifoldları

4-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^4 ün kartezyen koordinatları x_1, x_2, x_3, x_4 olsun. Böylece

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$$

birim vektörlerinin oluşturduğu 2-düzlem Π olsun. Böylece

$$p = \xi \wedge \varphi \quad (3.2.1)$$

bivektörünün bileşenleri (3.1.6) yardımıyla

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \varphi_i & \varphi_j \end{vmatrix}, 1 \leq i < j \leq 4 \quad (3.2.2)$$

tanımlansın. Böylece $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ bileşenleri p nin Plücker koordinatları olacaktır. Bu koordinatlar $G(2,4)$ Grassmann manifoldunun bir p noktasının pozisyon vektörüne karşılık gelir.

Önerme 3.2.1.: $p \in G(2,4)$ noktasının Plücker koordinatları aşağıdaki bağıntıları (Plücker bağıntıları) sağlar;

$$(F1) \langle p, p \rangle = 1, \quad (3.2.3)$$

$$(F2) p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0, \quad (3.2.4)$$

dir.

İspat: $p = \xi \wedge \varphi \in G(2,4)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle p, p \rangle &= \langle \xi \wedge \varphi, \xi \wedge \varphi \rangle \\
&= \langle \xi, \xi \rangle \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \xi, \varphi \rangle \langle \varphi, \xi \rangle \\
&= \sum_{i < j} p_{ij}^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize birinci Plücker bağıntısının ispatını verir.

İkinci olarak

$$p_{1i} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_i \\ \varphi_1 & \varphi_i \end{vmatrix} = \xi_1 \varphi_i - \varphi_1 \xi_i \quad (3.2.5)$$

yardımla (3.2.4) eşitliğinin sol tarafı

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = \xi_1 (\varphi_2 p_{34} + \varphi_3 p_{42} + \varphi_4 p_{23}) - \varphi_1 (\xi_2 p_{34} + \xi_3 p_{42} + \xi_4 p_{23}) \quad (3.2.6)$$

biçimine dönüşür.

Bununla birlikte ξ_1 ve φ_1 in katsayıları sırasıyla

$$\varphi_2 p_{34} + \varphi_3 p_{42} + \varphi_4 p_{23} = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\xi_2 p_{34} + \xi_3 p_{42} + \xi_4 p_{23} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.8)$$

Böylece (3.2.7) ve (3.2.8) yardımıyla ikinci Plücker bağıntısı elde edilir. \square

\mathbb{R}^4 deki ξ ve φ vektörlerinin oluşturduğu Π düzlemine dik olan Π^\perp düzlemi verilsin.

Böylece Π^\perp düzlemi ξ ve φ vektörlerinin her ikisine birden dik olan τ ve ν vektörleri tarafından gerilir. Buradan

$$q = \tau \wedge \nu \quad (3.2.9)$$

bivektörü $p = \xi \wedge \varphi$ nin dik bileşeni olup ξ, φ, τ ve ν vektörleri \mathbb{R}^4 ün pozitif yönlü ortonormal bazını oluşturur. Bu nedenle

$$\langle p, q \rangle = \langle \xi \wedge \varphi, \tau \wedge \nu \rangle = \langle \xi, \tau \rangle \langle \varphi, \nu \rangle - \langle \xi, \nu \rangle \langle \varphi, \tau \rangle = 0 \quad (3.2.10)$$

dir. Diğer bir deyişle q nun q_{ij} bileşenleri p nin p_{ij} bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned}
q_{12} &= p_{34} \\
q_{13} &= -p_{24} \\
q_{14} &= p_{23} \\
q_{23} &= p_{14} \\
q_{24} &= -p_{13} \\
q_{34} &= p_{12}
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

biçiminde ifade edilir (Aminov 2001). Böylece $\langle p, q \rangle = 0$ yardımıyla

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i < j} p_{ij} q_{ij} = 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}) = 0$$

elde edilir.

İkinci Plücker bağıntısının sağlandığı görülür. Sonuç olarak $p \in G(2,4)$ noktası başlangıcı \mathbb{R}^6 nin orijini ve bitim noktası $p = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ olan bir pozisyon vektörü olarak da görülebilir. Plücker koordinatlar (F1) ve (F2) Plücker bağıntılarını sağladığından bu noktalar cebirsel olarak \mathbb{R}^6 da yatan 4-boyutlu altmanifold oluşturur. Bu altmanifold \mathbb{R}^6 ya gömülmüş olan $G(2,4)$ Grassmann manifoldudur. Farzedelim ki $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ \mathbb{R}^6 nin kartezyen koordinatları olsun. Bu takdirde Plücker bağıntıları yardımıyla $G(2,4)$ altmanifoldunun normal vektörleri

$$p = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}), q = (p_{34}, -p_{24}, p_{23}, p_{14}, -p_{13}, p_{12}) \tag{3.2.12}$$

dir. Ayrıca $\langle p, q \rangle = 0$ ve $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$ olduğundan bu vektörler ortogonaldır.

Bununla birlikte (F1) Plücker bağıntısından anlaşılacağı üzere $G(2,4)$ Grassmann manifoldu \mathbb{R}^6 nin birim hiperküresi $S^5 \subset \mathbb{R}^6$ da yatan bir altmanifold olup $q \in \mathbb{R}^6$ bivektörü S^5 in birim normalidir. Burada \langle, \rangle metriği \mathbb{R}^6 dan indirgenmiş metriktir.

3.3. \mathbb{R}^4 deki Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri

M^2 yüzeyi $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ regüler yaması ile verilen bir lokal yüzey olsun. M^2 nin $x(u, v)$ noktasındaki tanjant uzayı

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$$

vektörleri tarafından gerilir. Gram Schmidt dikleştirme yöntemi bu vektörlere uygulanılırsa

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{x_u}{\sqrt{g_{11}}} \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g}}(g_{11}x_v - g_{12}x_u) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

ortonormal vektörler elde edilir.

Burada g_{ij} bileşenleri M^2 nin metrik tensörü olup $g = \det(g_{ij})$ dir. Π_x normal düzlemi M^2 nin n_1, n_2 normal vektörleri tarafından gerilen bir düzlem olsun. Böylece

$$p = n_1 \wedge n_2 \quad (3.3.2)$$

bivektörü iyi tanımlıdır. Buradan n_1, n_2 birim normal vektörleri u ve v parametresine bağlı olduklarından p bivektörü de bu parametrelere bağlıdır. Yani $p = p(u, v)$ dir.

Böylece M^2 yüzeyinden $G(2,4)$ Grassmann manifoldu üzerine

$$\Psi : M^n \rightarrow G(2,4); x(u, v) \rightarrow \Psi(x(u, v)) = p(u, v) \quad (3.3.3)$$

biçiminde *Grassmann dönüşümü* tanımlanır. Bu dönüşüm $G(2,4)$ de yatan 2-boyutlu Γ^2 yüzeyini tanımlar. Böylece, aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

Önerme 3.3.1.: M^2 yüzeyi $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ regüler yaması ile verilsin. M^2 nin birim teğet vektörleri X_1, X_2 olmak üzere

$$X_1 \wedge X_2 = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{g}} \quad (3.3.4)$$

dir.

İspat: (3.3.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} X_1 \wedge X_2 &= \frac{x_u}{\sqrt{g_{11}}} \wedge \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g}}(g_{11}x_v - g_{12}x_u) \\ &= \frac{g_{11}}{g_{11}\sqrt{g}}(x_u \wedge x_v) - \frac{g_{12}}{g_{11}\sqrt{g}}(x_u \wedge x_u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}(x_u \wedge x_v) \end{aligned}$$

elde edilir. \square

Önerme 3.3.2.:

$$q = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{g}} \quad (3.3.5)$$

$$p = n_1 \wedge n_2$$

bivektörleri birbirinin ortonormal bileşenleridir. Yani

$$\langle p, q \rangle = \left\langle n_1 \wedge n_2, \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{g}} \right\rangle = 0$$

dir.

İspat: (3.1.4) ve (3.1.5) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 3.3.3.: $G(2,4)$ Grassmann altmanifoldunun tanjant uzayı

$$X_{11} = X_1 \wedge n_1 = \frac{x_u \wedge n_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$X_{12} = X_1 \wedge n_2 = \frac{x_u \wedge n_2}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$X_{21} = X_2 \wedge n_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g}} (g_{11}x_v \wedge n_1 - g_{12}x_u \wedge n_1)$$

$$X_{22} = X_2 \wedge n_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g}} (g_{11}x_v \wedge n_2 - g_{12}x_u \wedge n_2)$$
(3.3.6)

bivektörleri tarafından gerilir. Burada $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, M^2 nin Riemann metriğidir.

İspat: (3.1.4) ve (3.1.5) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 3.3.4.: M^2 yüzeyi $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ regüler ortogonal yaması ile verilirse (yani $g_{12} = 0$ ise) $G(2,4)$ Grassmann altmanifoldunun tanjant uzayı

$$X_{11} = X_1 \wedge n_1 = \frac{x_u \wedge n_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$X_{12} = X_1 \wedge n_2 = \frac{x_u \wedge n_2}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$X_{21} = X_2 \wedge n_1 = \frac{x_v \wedge n_1}{\sqrt{g_{22}}}$$

$$X_{22} = X_2 \wedge n_2 = \frac{x_v \wedge n_2}{\sqrt{g_{22}}}$$
(3.3.7)

bivektörleri tarafından gerilir.

Sonuç 3.3.5.: $G(2,4)$ Grassmann altmanifoldunun p noktasındaki normal uzayı (3.3.5) de verilen

$$q = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{g}}$$

$$p = n_1 \wedge n_2$$

bivektörleri tarafından gerilir.

Böylece yukarıdaki sonuç gereği $\Psi : M^2 \rightarrow G(2,4)$ Grassmann dönüşümünün görüntüsü

$$x(u, v) \rightarrow \Psi(x(u, v)) = p(u, v) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{34} \\ -q_{24} \\ q_{23} \\ q_{14} \\ -q_{13} \\ q_{12} \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

Örnek 3.3.6.: $\Gamma^2 \subset \mathbb{R}^4$ tor yüzeyi

$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v) \quad (3.3.9)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu yüzeyin teğet vektörleri

$$x_u = (-\sin u, \cos v, 0, 0)$$

$$x_v = (0, 0, -\sin v, \cos v)$$

olmak üzere $q = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{g}}$ bivektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} q_{12} &= p_{34} = 0 \\ q_{13} &= -p_{24} = \sin u \sin v \\ q_{14} &= p_{23} = -\sin u \cos v \\ q_{23} &= p_{14} = -\cos u \sin v \\ q_{24} &= -p_{13} = \cos u \cos v \\ q_{34} &= p_{12} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

bulunur. Buradan $p_{12} = p_{34} = 0$ olduğundan Γ^2 yüzeyi

$$\Gamma^2 : p(u, v) = \psi(x(u, v)) = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır. Bu yüzey \mathbb{R}^4 de yatan 2-boyutlu Clifford tor yüzeyidir. Bu yüzeyin Riemann metriği

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

dir. Böylece (3.3.9) yüzey yaması ile verilen tor yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Clifford tor yüzeyinin yüzey alanı

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dudv = 4\pi^2$$

dir. Bununla birlikte $\|p(u, v)\| = \sqrt{2}$ olduğundan bu yüzey $\sqrt{2}$ yarıçaplı $S^3(\sqrt{2})$ küresi üzerinde yatar (Aminov 2001).

3.4. $G(2,4)$ Grassmann Manifoldu $S_1^2 \times S_2^2$ Çarpım Manifolduna İzometrik Olması

(3.2.3) ve (3.2.4) Plücker bağıntılarından $G(2,4)$ Grassmann manifoldu $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifolduna izometriktir, yani; $G(2,4) \cong S_1^2 \times S_2^2$ dir.

$S_1^2 \subset \mathbb{R}^3$ ve $S_2^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim kürelerinin birim normalleri sırasıyla $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ve $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ alınır

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_{12} + p_{34} & \eta_1 &= p_{12} - p_{34} \\ \xi_2 &= p_{13} + p_{42} & \eta_2 &= p_{13} - p_{42} \\ \xi_3 &= p_{14} + p_{23} & \eta_3 &= p_{14} - p_{23} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

olacaktır. Böylece Plücker bağıntılarından

$$\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = \sum_{i=1}^3 \eta_i^2 = 1 \quad (3.4.2)$$

elde edilir (Aminov 2001).

\mathbb{R}^6 de yatan 4-boyutlu $S_1^2 \times S_2^2$ altmanifoldu

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

standart immersiyon ile verilsin. Böylece

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos \theta & x_4 &= \cos \phi \cos \psi \\
x_2 &= \sin \theta \sin \omega & x_5 &= \sin \psi \\
x_3 &= \sin \theta \cos \omega & x_6 &= \sin \phi \cos \psi
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

seçilirse $S_1^2 \times S_2^2$ altmanifoldu \mathbb{R}^6 da

$$\rho(\theta, \omega, \phi, \psi) = (\cos \theta, \sin \theta \sin \omega, \sin \theta \cos \omega, \cos \phi \cos \psi, \sin \psi, \sin \phi \cos \psi) \tag{3.4.5}$$

pozisyon vektörüne sahip olacaktır. Burada $\theta, \omega, \phi, \psi$ parametreleri reel değerli fonksiyonlardır. Böylece $S_1^2 \subset \mathbb{R}^3$ ve $S_2^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim kürelerinin birim normalleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos \theta & \eta_1 &= \cos \phi \cos \psi \\
\xi_2 &= \sin \theta \sin \omega & \eta_2 &= \sin \psi \\
\xi_3 &= \sin \theta \cos \omega & \eta_3 &= \sin \phi \cos \psi
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

olduğu aşıkardır.

Açıklama 3.4.1.: Eğer (3.4.6) denklemde $\psi = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos \theta & \eta_1 &= \cos \phi \\
\xi_2 &= \sin \theta \sin \omega & \eta_2 &= 0 \\
\xi_3 &= \sin \theta \cos \omega & \eta_3 &= \sin \phi
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

bulunur. Burada $\theta = \theta(t)$ ve $\phi = \phi(t)$ alınırsa ikinci parametrisasyon S_1^2 de bir çember belirtecektir. Böylece (3.4.5) immersiyonu \mathbb{R}^5 de yatan bir yüzey oluşturur. Bu parametrisasyon bize yüzeylerin Grassmann görüntülerini hesaplamada kolaylık sağlayacaktır.

3.5. \mathbb{R}^4 de 1.Tip Rotasyonel Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri

\mathbb{R}^4 de

$$M^2 : x(t, \alpha) = (f(t) \cos \alpha, f(t) \sin \alpha, g(t) \cos \alpha, g(t) \sin \alpha) \tag{3.5.1}$$

parametrisasyonu ile verilen yüzeye *1.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi* denir. Burada $f(t)$ ve $g(t)$ türevlenebilir fonksiyonlardır (Arslan ve ark. 2012). M^2 yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} x_t &= (f' \cos \alpha, f' \sin \alpha, g' \cos \alpha, g' \sin \alpha) \\ x_\alpha &= (-f \sin \alpha, f \cos \alpha, -g \sin \alpha, g \cos \alpha) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece M^2 nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_t, x_t \rangle = (f')^2 + (g')^2, \\ g_{12} &= \langle x_t, x_\alpha \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = (f)^2 + (g)^2, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

dir. Ayrıca basitliğin hatırına

$$\lambda^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = ((f')^2 + (g')^2)((f)^2 + (g)^2) \quad (3.5.4)$$

alınsın.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.1.: (3.5.1) parametrizasyonu ile verilen 1.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi

$$r(t, \alpha) = \psi(x(t, \alpha)) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \sigma \sin \gamma \\ -\sin(\gamma - \sigma) \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \sigma \sin \gamma \sin^2 \alpha - \sin \sigma \cos \gamma \cos^2 \alpha \\ \cos \sigma \sin \gamma \cos^2 \alpha + \sin \sigma \cos \gamma \sin^2 \alpha \\ -\sin(\sigma - \gamma) \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \sigma \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3.5.5)$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada

$$\begin{aligned} \frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2}} &= \cos \gamma, & \frac{g}{\sqrt{f^2 + g^2}} &= \sin \gamma \\ \frac{f'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} &= \cos \sigma, & \frac{g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} &= \sin \sigma \end{aligned}$$

dır.

İspat: M^2 yüzeyi (3.5.1) yamasıyla verilen 1.tip rotasyonel yüzey olsun. Böylece (3.5.1) parametrizasyonu ile verilen 1.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü $\Gamma^2 \subset \mathbb{R}^6$ olsun. Bu yüzeyin pozisyon vektörü

$$\bar{q} = \frac{x_i \wedge x_\alpha}{\sqrt{g}} = (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34})$$

olduğundan (3.2.11) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} q_{12} = p_{34} &= \frac{ff'}{\lambda} \\ q_{13} = -p_{24} &= \frac{(fg' - gf')\cos\alpha \sin\alpha}{\lambda} \\ q_{14} = p_{23} &= \frac{gf' \cos^2\alpha + fg' \sin^2\alpha}{\lambda} \\ q_{23} = p_{14} &= -\frac{gf' \sin^2\alpha + fg' \cos^2\alpha}{\lambda} \\ q_{24} = -p_{13} &= \frac{(gf' - fg')\cos\alpha \sin\alpha}{\lambda} \\ q_{34} = p_{12} &= \frac{gg'}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

elde edilir. Basitliğin hatırına

$$\frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2}} = \cos\gamma, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2 + g^2}} = \sin\gamma \quad (3.5.7)$$

$$\frac{f'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} = \cos\sigma, \quad \frac{g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} = \sin\sigma \quad (3.5.8)$$

alınırsa (3.5.6) daki eşitlikler

$$\begin{aligned} p_{12} &= \sin\sigma \sin\gamma \\ p_{13} &= -\sin(\gamma - \sigma)\cos\alpha \sin\alpha \\ p_{14} &= -\cos\sigma \sin\gamma \sin^2\alpha - \sin\sigma \cos\gamma \cos^2\alpha \\ p_{23} &= \cos\sigma \sin\gamma \cos^2\alpha + \sin\sigma \cos\gamma \sin^2\alpha \\ p_{24} &= -\sin(\sigma - \gamma)\cos\alpha \sin\alpha \\ p_{34} &= \cos\sigma \cos\gamma \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

biçimine dönüşür. Böylece (3.5.9) ve (3.3.8) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Açıklama 3.5.2. $G(2,4)$ Grassmann manifoldu $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifolduna izometriktir, yani; $G(2,4) \cong S_1^2 \times S_2^2$ olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.5.3.: (3.5.1) parametrizasyonu ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} f(t) &= \rho(t) \cos \gamma(t), \\ g(t) &= \rho(t) \sin \gamma(t), \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

olmasıdır. Burada

$$\rho = ce^{-\int_0^t \cot \theta \gamma' dt}, \quad \gamma = \frac{\phi + \theta}{2} \quad (3.5.11)$$

dır (Aminov ve ark. 2004).

İspat. (3.4.1) ve (3.5.9) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_{12} + p_{34} = \cos(\gamma - \sigma), & \eta_1 &= p_{12} - p_{34} = -\cos(\gamma + \sigma), \\ \xi_2 &= p_{13} + p_{42} = \sin(\gamma - \sigma) \sin(-2\alpha), & \eta_2 &= p_{13} - p_{42} = 0, \\ \xi_3 &= p_{14} + p_{23} = \sin(\gamma - \sigma) \cos(-2\alpha), & \eta_3 &= p_{14} - p_{23} = -\sin(\gamma + \sigma), \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

bulunur. Böylece (3.4.7) ve (3.5.12) deki eşitlikler birbiriyle kıyaslandığında

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma - \sigma \\ \phi &= \gamma + \sigma \\ \omega &= -2\alpha \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\phi + \theta}{2} \\ \sigma &= \frac{\phi - \theta}{2} \\ \alpha &= -\frac{\omega}{2} \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

dır. Bununla birlikte

$$\rho = \rho(t) = \sqrt{f^2 + g^2} \quad (3.5.15)$$

olmak üzere (3.5.5) ve (3.5.14) yardımıyla

$$f = \rho \cos\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right), g = \rho \sin\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right) \quad (3.5.16)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.5.8) ve (3.5.14) yardımıyla

$$\frac{f'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} = \cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right), \frac{g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} = \sin\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right) \quad (3.5.17)$$

dir. Bununla birlikte (3.5.16) daki fonksiyonların t parametresine göre türevi

$$\begin{aligned} f' &= \rho' \cos \gamma - \gamma' \rho \sin \gamma \\ g' &= \rho' \sin \gamma + \gamma' \rho \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

olup bunların yardımıyla

$$\sqrt{(f')^2 + (g')^2} = \sqrt{(\rho')^2 + (\gamma')^2} \rho^2 \quad (3.5.19)$$

bulunur. Böylece (3.5.17) ve (3.5.19) dan

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\rho'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 \left(\frac{\theta' + \phi'}{2}\right)^2}} \\ -\sin \theta &= \frac{\rho \left(\frac{\theta' + \phi'}{2}\right)}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 \left(\frac{\theta' + \phi'}{2}\right)^2}} \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

elde edilir. Burada

$$\lambda = \rho \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 \left(\frac{\theta' + \phi'}{2}\right)^2} \neq 0$$

dır. Böylece (3.5.20) eşitliklerinden

$$\rho' \sin \theta + \rho \gamma' \cos \theta = 0 \quad (3.5.21)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözümünden

$$\rho = ce^{-\int_{t_0}^t \cot \theta \gamma' dt} \quad (3.5.22)$$

dir. Böylece (3.5.16) dan

$$\begin{aligned} f &= ce^{-\int_{t_0}^t \cot \theta \gamma' dt} \cos\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right), \\ g &= ce^{-\int_{t_0}^t \cot \theta \gamma' dt} \sin\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını verir \square

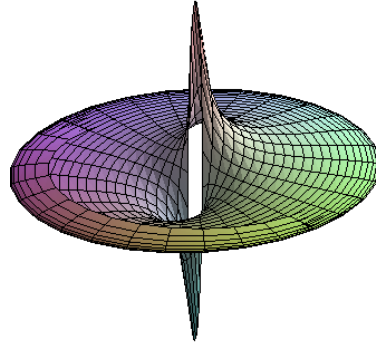
Örnek 3.5.4.: (3.5.14) eşitliklerinde $\theta = t^2$ ve $\phi = t^2$ alınırsa

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos t^2 & \eta_1 &= \cos t^2 \\ \xi_2 &= \sin t^2 \sin \omega & \eta_2 &= 0 \\ \xi_3 &= \sin t^2 \cos \omega & \eta_3 &= \sin t^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu parametrik ifadeler sırasıyla $S_1^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küresi ve $S_2^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küresi üzerinde bir çember belirtir. Böylece (3.5.1) parametrizasyonu ile verilen 1.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatacağından $\theta = t^2$, $\phi = t^2$ ve (3.5.23) yardımıyla

$$\begin{aligned} f(t) &= ce^{\frac{-1}{2} \ln(\sin t^2)} \cos t^2, \\ g(t) &= ce^{\frac{-1}{2} \ln(\sin t^2)} \sin t^2, \end{aligned}$$

elde edilir. 1.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin izdüşümünün $c = 3$ için grafiği Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1. 1.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin izdüşümü

3.6. \mathbb{R}^4 de 2.Tip Rotasyonel Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri

\mathbb{R}^3 de

$$\delta(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$$

birim hızlı meridyen eğrisi ile $\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ çemberinin küresel çarpımı

$$x(u, v) = \delta(u) \otimes \beta(v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u) \cos v, f_3(u) \sin v), \quad f_3 > 0 \quad (3.6.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq v \leq 2\pi$ dir (Ganchev ve Milousheva 2008), (Arslan ve ark. 2017). (3.6.1) yaması ile verilen yüzeyler 2.tip rotasyon yüzeyleri olarak adlandırılır.

Örnek 3.6.1.: (Otsuiki Küresi)

$\delta(t) = (f_1(t), f_2(t), \sin t)$ meridyen eğrisi ve $\beta(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ çemberi alındığında küresel çarpım

$$x(t, \alpha) = (f_1(t), f_2(t), \sin t \cos \alpha, \sin t \sin \alpha) \quad (3.6.2)$$

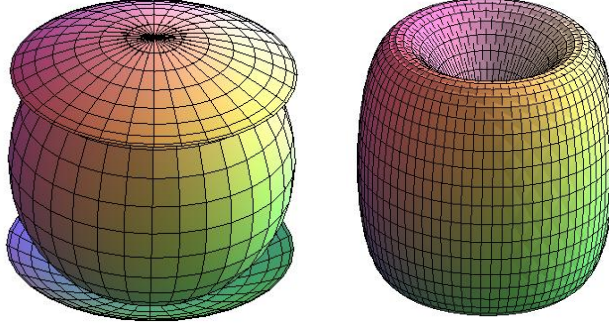
şeklinde tanımlanır. Burada $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ve $(f_1')^2 + (f_2')^2 = \sin^2 t$ dir.

Bu çarpımı ilk defa T. Otsuiki 1966 yılında (Otsuiki 1966) da tanımlamıştır. Aynı çalışmasında ayrıca

$$\text{a) } f_1(t) = \frac{4}{3} \cos^3\left(\frac{t}{2}\right), f_2(t) = \frac{4}{3} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right), f_3(t) = \sin t,$$

$$\text{b) } f_1(t) = \frac{1}{2} \sin^2 t \cos(2t), f_2(t) = \frac{1}{2} \sin^2 t \sin(2t), f_3(t) = \sin t$$

durumlarını da göz önüne almıştır. a) durumu için $x(t, \alpha)$ yamasıyla verilen yüzey \mathbb{R}^4 ün 3-boyutlu alt uzayında yatmayan *Otsuiki küresi (non-round)* olarak adlandırılır. Bu yüzeylerin \mathbb{R}^3 deki izdüşümleri Şekil 3.2 de verilmiştir.



a) 1.Otsuiki küresinin izdüşümü

b) 2.Otsuiki küresinin izdüşümü

Şekil 3.2. Otsuiki kürelerinin \mathbb{R}^3 deki izdüşümleri

Önerme 3.6.2.: (3.6.1) parametrizasyonu ile verilen 2.tip rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi

$$r(t, \alpha) = \psi(x(t, \alpha)) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_3 \\ -f'_2 \cos \alpha \\ -f'_2 \sin \alpha \\ f'_1 \cos \alpha \\ f'_1 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.3)$$

parametrizasyonuna sahiptir.

İspat: M^2 yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} x_t &= (f'_1, f'_2, f'_3 \cos \alpha, f'_3 \sin \alpha) \\ x_\alpha &= (0, 0, -f_3 \sin \alpha, f_3 \cos \alpha,) \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece M^2 nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_t, x_t \rangle = 1, \\ g_{12} &= \langle x_t, x_\alpha \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = f_3^2, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

dir. Ayrıca basitliğin hatırına

$$\lambda^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = f_3^2 \quad (3.6.6)$$

alalım. Böylece (3.6.1) parametrizasyonu ile verilen 2.tip rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü $\Gamma^2 \subset \mathbb{R}^6$ olsun. Bu yüzeyin pozisyon vektörü

$$\vec{q} = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{g}} = (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34})$$

olduğundan (3.2.11) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} q_{12} &= p_{34} = 0 \\ q_{13} &= -p_{24} = -f_1' \sin \alpha \\ q_{14} &= p_{23} = f_1' \cos \alpha \\ q_{23} &= p_{14} = -f_2' \sin \alpha \\ q_{24} &= -p_{13} = f_2' \cos \alpha \\ q_{34} &= p_{12} = f_3' \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

elde edilir. Böylece (3.6.7) ve (3.3.8) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Teorem 3.6.3.: (3.6.1) parametrizasyonu ile verilen 2.tip genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} f_3'(t) &= \cos \theta(t), \\ \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2} &= \sin \theta(t) \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

olmasıdır.

İspat. (3.4.1) ve (3.6.7) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_{12} + p_{34} = f_3' & \eta_1 &= p_{12} - p_{34} = f_3' \\ \xi_2 &= p_{13} + p_{42} = -f_2' \cos \alpha - f_1' \sin \alpha & \eta_2 &= p_{13} - p_{42} = -f_2' \cos \alpha + f_1' \sin \alpha \\ \xi_3 &= p_{14} + p_{23} = -f_2' \sin \alpha + f_1' \cos \alpha & \eta_3 &= p_{14} - p_{23} = -f_2' \sin \alpha - f_1' \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

bulunur. Böylece (3.4.6) ve (3.6.9) deki eşitlikler birbiriyle kıyaslandığında istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.4.: Örnek 3.6.1 de verilen Otsuki yüzeylerinin Grassmann görüntüleri olan Γ^2 yüzeyleri $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatarlar.

3.7. \mathbb{R}^4 de Kapalı Denklemlerle Verilen Yüzeylerin Grassmann Görüntüleri

$M^2 \subset \mathbb{R}^4$ de

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0\end{aligned}\tag{3.7.1}$$

kapalı denklemler ile verilsin. Türevlenebilir olan bu fonksiyonların gradiyentleri

$$grad\varphi_\alpha = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)\tag{3.7.2}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Bu vektör alanlarının normları

$$\lambda_\alpha = \|grad\varphi_\alpha\|\tag{3.7.3}$$

olarak tanımlansın.

Genel olarak $grad\varphi_1$ ile $grad\varphi_2$ birbirine dik olmak zorunda değildir.

$$grad\varphi_1 \wedge grad\varphi_2 \neq 0 \text{ olsun.}\tag{3.7.4}$$

Böylece

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{1}{\lambda_1} grad\varphi_1 \\ n_2 &= a grad\varphi_1 + b grad\varphi_2\end{aligned}\tag{3.7.5}$$

ortonormal vektörleri tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned}\langle n_1, n_2 \rangle &= 0 \\ \langle n_1, n_1 \rangle &= \langle n_2, n_2 \rangle = 1\end{aligned}\tag{3.7.6}$$

olduğundan

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{\lambda_1^2} \eta\tag{3.7.7}$$

$$a^2 \lambda_1^2 + 2ab\eta + b^2 \lambda_2^2 = 1\tag{3.7.8}$$

bulunur. Burada $\eta = \langle \text{grad}\varphi_1, \text{grad}\varphi_2 \rangle$ dir. Ayrıca

$$\Delta = |\text{grad}\varphi_1 \wedge \text{grad}\varphi_2| = \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \eta^2\tag{3.7.9}$$

fonksiyonu tanımlansın. Böylece (3.7.8) ve (3.7.9) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1}{\lambda_1 \sqrt{\Delta}} \eta \\ b &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \lambda_1\end{aligned}\tag{3.7.10}$$

bulunur. O halde (3.7.1) kapalı denklemleri verilen M^2 yüzeyinin ortonormal vektör alanları

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \text{grad}\varphi_1 \\ n_2 &= -\frac{\eta}{\lambda_1 \sqrt{\Delta}} \text{grad}\varphi_1 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}} \text{grad}\varphi_2\end{aligned}\tag{3.7.11}$$

biçimine dönüşür (Aminov ve Szojewski 2004).

Tanım 3.7.1.: (3.7.1) de verilen φ_1 ve φ_2 türevlenebilir fonksiyonlar açık denklem olarak

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_1, x_2) - x_3 = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= g(x_1, x_2) - x_4 = 0\end{aligned}\tag{3.7.12}$$

biçiminde tanımlanırsa $M^2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi parametrik olarak

$$x(t, \alpha) = (t, \alpha, f(t, \alpha), g(t, \alpha)) \quad (3.7.13)$$

Monge yaması ile verilen bir regüler yüzeydir (Bulca ve Arslan 2013).

Böylece bu yüzeyin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} x_t &= (1, 0, f_t, g_t) \\ x_\alpha &= (0, 1, f_\alpha, g_\alpha) \end{aligned}$$

vektörleri tarafından gerilir. Buradan M^2 nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_t, x_t \rangle = 1 + f_t^2 + g_t^2 \\ g_{12} &= \langle x_t, x_\alpha \rangle = f_t f_\alpha + g_t g_\alpha \\ g_{22} &= \langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = 1 + f_\alpha^2 + g_\alpha^2 \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

dir. Buradan $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ sıfırdan farklı olduğundan $x(t, \alpha)$ yaması regülerdir.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.7.2.: (3.7.13) parametrizasyonu ile verilen yüzeyin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyinin parametrizasyonu

$$r(t, \alpha) = \psi(x(t, \alpha)) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} f_t g_\alpha - f_\alpha g_t \\ g_t \\ -f_t \\ g_\alpha \\ -f_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.7.15)$$

dır.

İspat. M^2 yüzeyi (3.7.13) parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. Böylece (3.1.5)

kullanılarak $q = \frac{x_t \wedge x_\alpha}{\sqrt{g}}$ vektörü bileşenleri

$$p_{12} = \frac{f_t g_\alpha - f_\alpha g_t}{\sqrt{g}}$$

$$p_{13} = \frac{g_t}{\sqrt{g}}$$

$$p_{14} = \frac{-f_t}{\sqrt{g}}$$

$$p_{23} = \frac{g_\alpha}{\sqrt{g}}$$

$$p_{24} = \frac{-f_\alpha}{\sqrt{g}}$$

$$p_{34} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

dir. Böylece (3.7.15) ile (3.3.8) eşitlikleri yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 3.7.3.: M^2 yüzeyi

$$\begin{aligned} f(t, \alpha) &= r(t) \cos \alpha \\ g(t, \alpha) &= r(t) \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

parametrizasyonu ile verildiğinde $M^2 \subset \mathbb{R}^4$ ye *Aminov yüzeyi* denir. Burada $r(t)$ türevlenebilir fonksiyondur (Aminov 1994), (Bulca ve Arslan 2013).

Teorem 3.7.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.7.4.: (3.7.16) parametrizasyonu ile verilen Aminov yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi

$$p(t, \alpha) = \psi(x(t, \alpha)) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} rr' \\ r' \sin \alpha \\ -r' \cos \alpha \\ r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.7.17)$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada

$$\lambda = \sqrt{1+r^2} \sqrt{1+(r')^2} \neq 0$$

türevlenebilir fonksiyondur.

Teorem 3.7.5.: (3.7.16) parametrizasyonu ile verilen Aminov yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul

$$r(t) = \pm \sqrt{2t+c}. \quad (3.7.18)$$

olmasıdır.

İspat. (3.4.1) ve (3.7.17) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \xi_1 = p_{12} + p_{34} &= \frac{1+rr'}{\lambda}, & \eta_1 = p_{12} - p_{34} &= \frac{ff'-1}{\lambda}, \\ \xi_2 = p_{13} + p_{42} &= -\frac{(r'-r)\sin(-\alpha)}{\lambda}, & \eta_2 = p_{13} - p_{42} &= -\frac{(r'+r)\sin(-\alpha)}{\lambda}, \\ \xi_3 = p_{14} + p_{23} &= -\frac{(r'-r)\cos(-\alpha)}{\lambda}, & \eta_3 = p_{14} - p_{23} &= -\frac{(r'+r)\cos(-\alpha)}{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

bulunur. Basitliğin hatırına

$$\frac{1+rr'}{\lambda} = \cos \gamma, \quad \frac{r'-r}{\lambda} = \sin \gamma \quad (3.7.20)$$

$$\frac{rr'-1}{\lambda} = \cos \sigma, \quad \frac{r'+r}{\lambda} = \sin \sigma \quad (3.7.21)$$

alınırsa (3.7.19) deki eşitlikler

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \gamma, & \eta_1 &= \cos \sigma, \\ \xi_2 &= -\sin \gamma \sin(-\alpha), & \eta_2 &= -\sin \sigma \sin(-\alpha), \\ \xi_3 &= -\sin \gamma \cos(-\alpha), & \eta_3 &= -\sin \sigma \cos(-\alpha), \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

biçimine dönüşür. Böylece (3.7.22) denklemlerinde $\gamma = \frac{\pi}{2}$ veya $\sigma = \frac{\pi}{2}$ alınırsa S_1^2

veya S_2^2 çemberi elde edilir. Buradan şu diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$1 + rr' = 0, rr' - 1 = 0$$

Bunların sıfırdan farklı çözümü $r(t) = \pm\sqrt{2t+c}$ veya $r(t) = \pm\sqrt{-2t+c}$ olarak bulunur.

Bu da bize teoremin ispatını verir \square

3.8. \mathbb{R}^4 de Tensör Çarpım Yüzeylerinin Grassmann Görüntüleri

$M^2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi

$$x(u, v) = (\alpha(v) \cos u, \beta(v) \cos u, \alpha(v) \sin u, \beta(v) \sin u) \quad (3.8.1)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu yüzey $c_1(u) = (\cos u, \sin u)$ çemberiyle $c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ düzlemsel eğrisinin tensör çarpım yüzeyidir (Arslan ve ark. 2001).

M^2 nin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} x_u &= (-\alpha \sin u, -\beta \sin u, \alpha \cos u, \beta \cos u) \\ x_v &= (\alpha' \cos u, \beta' \cos u, \alpha' \sin u, \beta' \sin u) \end{aligned}$$

vektörleri tarafından gerilir. Böylece M^2 nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_u, x_u \rangle = \alpha^2 + \beta^2 \\ g_{12} &= \langle x_u, x_v \rangle = 0 \\ g_{22} &= \langle x_v, x_v \rangle = (\alpha')^2 + (\beta')^2 \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

dır.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.8.2.: (3.8.3) parametrizasyonu ile verilen tensör çarpım yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyi

$$p(u, v) = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} (\alpha\beta' - \alpha'\beta) \cos u \sin u \\ \beta\beta' \\ -\alpha'\beta \sin^2 u - \alpha\beta' \cos^2 u \\ -\alpha\beta' \sin^2 u - \alpha'\beta \cos^2 u \\ \alpha\alpha' \\ (\alpha'\beta - \alpha\beta') \cos u \sin u \end{bmatrix} \quad (3.8.3)$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada

$$\lambda^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

M^2 nin Riemann metriğidir.

İspat. $q = \frac{x_u \wedge x_v}{\lambda}$ bivektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} q_{12} = p_{34} &= \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta') \cos u \sin u}{\lambda} \\ q_{13} = p_{42} &= -\frac{\alpha\alpha'}{\lambda} \\ q_{14} = p_{23} &= \frac{-\alpha\beta' \sin^2 u - \alpha'\beta \cos^2 u}{\lambda} \\ q_{23} = p_{14} &= \frac{-\alpha'\beta \sin^2 u - \alpha\beta' \cos^2 u}{\lambda} \\ q_{24} = p_{31} &= -\frac{\beta\beta'}{\lambda} \\ q_{34} = p_{12} &= \frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta) \cos u \sin u}{\lambda} \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

dır. Böylece (3.8.4) deki bileşenler (3.3.8) de yerine yazılırsa (3.8.3) elde edilir.

Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.8.3.: (3.8.1) parametrizasyonu ile verilen tensör çarpım yüzeyinin Grassmann görüntüsü olan Γ^2 yüzeyinin $S_1^2 \times S_2^2$ çarpım manifoldu üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul M^2 nin Clifford tor yüzeyi olmasıdır.

İspat. (3.4.1) ve (3.8.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_{12} + p_{34} = 0 \\ \xi_2 &= p_{13} + p_{42} = \frac{\beta\beta' - \alpha\alpha'}{\lambda} \\ \xi_3 &= p_{14} + p_{23} = -\frac{\alpha\beta' + \alpha'\beta}{\lambda} \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= p_{12} - p_{34} = \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta')\sin(-2u)}{\lambda} \\
\eta_2 &= p_{13} - p_{42} = \frac{\beta\beta' + \alpha\alpha'}{\lambda} \\
\eta_3 &= p_{14} - p_{23} = \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta')\cos(-2u)}{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.8.6}$$

bulunur. Böylece basitliğin hatırına

$$\begin{aligned}
\beta\beta' - \alpha\alpha' &= \phi, & \beta\beta' + \alpha\alpha' &= \mu \\
-(\alpha'\beta + \alpha\beta') &= \theta, & (\alpha'\beta - \alpha\beta') &= \psi
\end{aligned} \tag{3.8.7}$$

olarak alabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= p_{12} + p_{34} = 0 \\
\xi_2 &= p_{13} + p_{42} = \frac{\phi}{\lambda} \\
\xi_3 &= p_{14} + p_{23} = \frac{\theta}{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.8.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= p_{12} - p_{34} = \frac{\psi \sin(-2u)}{\lambda} \\
\eta_2 &= p_{13} - p_{42} = \frac{\mu}{\lambda} \\
\eta_3 &= p_{14} - p_{23} = \frac{\psi \cos(-2u)}{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.8.9}$$

elde edilir. Böylece $\psi = \text{sabit}$ ve $\mu = 0$ değerleri alındığında (3.8.9) parametrizasyonu S^2 küresi üzerinde yatan bir çember belirtir. Buradan $\psi = \text{sabit}$ ve $\mu = 0$ değerleri (3.8.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha'\beta - \alpha\beta' &= c, \\
\alpha\alpha' + \beta\beta' &= 0,
\end{aligned} \tag{3.8.10}$$

bulunur. Böylece (3.8.10) diferansiyel denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözümü

$$\alpha(v) = r \cos\left(\frac{cv}{r^2}\right),$$

$$\beta(v) = r \sin\left(\frac{cv}{r^2}\right),$$

dir. Yani M^2 yüzeyi \mathbb{R}^4 de yatan bir Clifford tor yüzeyi olacaktır.



KAYNAKLAR

- Aminov, Yu. A. 1994.** Surfaces in E^4 with a Gaussian curvature coinciding with a Gaussian torsion up to the sign. *Mathematical Notes*, 56(6): 1211-1215.
- Aminov, Yu. A. 2001.** The geometry of submanifolds. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore, 12pp.
- Aminov, Yu., A. Gorkavy., V.O and Sviatovets A.V. 2004.** On the reconstruction two-dimensional closed surface in E^4 from a given closed Grassmann image. *Math. Fiz. Anal. Geom.*, 1:3-24.
- Aminov, Yu., A., Szojewski, 2004.** Grassmann torsion of a 2-dimensional defined implicitly in 4-dimensional Euclidean space. *Sbornik Mathematics*, 195(11): 1545-1556.
- Arslan, K., Ezentas, R., Mihai, I., Murathan., C. and Özgür, C. 2001.** Tensor product surfaces of Euclidean space curve and a Euclidean plane curve. *Cont. Algebra and Geom.*, 42(2): 523-530.
- Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., Öztürk, G. 2012.** Generalized rotation surfaces in E^4 , *Results. Math.* 61: 315- 327.
- Arslan, K., Bulca, B. and Kosova, D., 2017.** On generalized rotational surfaces in Euclidean spaces, *J. Korean Math. Soc.*, 57(3): 999-1013.
- Borisenko A., Nickolaevsky Yu., 1991.** Grassmann manifolds and Grassmann image of submanifolds. *Uspehi Math. Nauk*, 46(2): 41-83 (In Russian).
- Bulca, B. 2012.** E^4 deki yüzeylerin bir karakterizasyonu, *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, Bursa.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K. and Öztürk, G. 2012.** Spherical product surfaces in E^4 . *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 20: 41-54.
- Bulca, B., Arslan, K. 2013.** Surfaces given with the Monge patch in E^4 . *J. Math. Physics Anal. Geom.*, 9(4): 435-447.
- Chen, B. Y. 1973.** Geometry of submanifolds, Dekker, New York, 298p.
- Cole, F.N. 1890.** On rotations in space of four dimensions. *Amer. J. Math.*, 12:191-210.
- Cuong, D.V. 2017.** Surfaces of revolution with constant Gaussian curvature in four-space. *Asian- European Journal of Mathematics*, 6: 1-8.
- Dursun U., Turgay, N.C. 2012.** General rotational surfaces in Euclidean space E^4 with pointwise 1-type Gauss map. *Math. Commun.*, 17: 71-81
- Decruyenaere, F., Dillen, F., Verstraelen, L. Vrancken, L. 1993.** The semiring of immersions of manifolds. *Beitrage Algebra Geom.*, 34: 209-215.
- Decruyenaere, F., Dillen, F., Mihai, I. and Verstraelen, L. 1994.** Tensor products of spherical and equivariant immersions. *Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin*, 1: 643-648.
- Fröhlich, S. 2013.** <https://www.scribd.com/document/174065325>, Surfaces in Euclidean spaces.
- Ganchev, G. and Milousheva, V. 2008.** On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space. *Kodai Math. J.*, 31: 183-198.
- Ganchev, G. and Milousheva, V. 2010.** Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in R^4 . *Cent. Eur. J. Math.*, 8(6): 993-1008.
- Gray, A. 1993.** Modern differential geometry of curves and surfaces. CRC Pres Inc., USA, 398 pp.
- Hacısalihoğlu, H. H. 1983.** Diferensiyel geometri, İnönü Üniversitesi, 895s.
- Kobayashi, S. and Nomizu, K. 1963.** Foundations of differential geometry, volume I, Interscience Publishers, 329p.

- Kuiper, N.H. 1970.** Minimal total absolute curvature for immersions. *Invent. Math.*, 10: 209-238.
- Mello, L.F. 2003.** Mean directionally curved lines on surfaces immersed in R^4 . *Publ. Math.*, 47: 415-440.
- Mihai, A., Roca R., Verstraelen L., Vrancken, L. 1995.** Tensor product surfaces of Euclidean planar curves. *Rend. Sem. Mat. Messina*, 3:173-184.
- Mihai, A. and Rouxel, B. 1995.** Tensor product surfaces of Euclidean planar curves. *Result in Math*, 27: 308-315.
- Moore, C. 1919.** Surfaces of revolution in a space four dimension. *Ann. Math.*, 21: 81-93.
- O' neill, B. 1966.** Elementary differential geometry, Academic Press, USA, 411p.
- Otsuiki, T. 1966.** Surfaces in the four dimensional Euclidean space isometric to a sphere. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 18: 101-115.
- Vranceanu, G. 1977.** Surfaces de rotation dans E^4 . *Rev. Roumaine Math. Pures. Appl.*, 22: 857-862.
- Wong, Y.C. 1946.** Contributions to the theory of surfaces in 4-spaces of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59: 467-507.
- Yoon, D.W. 2003.** Some properties of the Clifford torus as rotation surfaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34: 907-915.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eray DEMİRBAŞ

Doğum Yeri ve Tarihi : İSTANBUL, 02.07.1991

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Gürlek Nakipoğlu Anadolu Lisesi, 2005-2009

Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2009-2015

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : 22.Yüzyıl Anadolu Lisesi, 2017-2018

İletişim (e-posta) : eray-demirbas@hotmail.com

Yayımları :

1. **Demirbaş, E., Arslan, K. 2018.** Grassmann images of tensor product surfaces in E^4 . *Balikesir Üniv. Fen Bil. Dergisi*. Yayına kabul edildi.
2. **Demirbaş, E., Arslan, K., Bulca, B. 2017.** Grassmann images of surfaces in 4-dimensional Euclidean spaces. 15th International Geometry Symposium, Amasya University, Amasya, Turkey, 3-6 July 2017.