



**T. C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
BİYOİSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**İSTATİSTİKSEL ŞEKİL ANALİZİNDE İKİ ÖRNEKLEM TESTLERİNİN  
KARŞILAŞTIRILMASI**

**Gökhan OCAKOĞLU**

**(DOKTORA TEZİ)**

**Bursa-2011**



T. C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
BİYOİSTATİSTİK ANABİLİM DALI

İSTATİSTİKSEL ŞEKİL ANALİZİNDE İKİ ÖRNEKLEM TESTLERİNİN  
KARŞILAŞTIRILMASI

Gökhan OCAKOĞLU

(DOKTORA TEZİ)

Danışman: Doç. Dr. İlker ERCAN

Bursa-2011

## İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ.....	II
TABLolar DİZİNİ .....	III
TÜRKÇE ÖZET.....	IV
SUMMARY .....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Şekil Analizi .....	4
2.2. Morfometri .....	7
2.2.1. Geleneksel Morfometri.....	9
2.2.2. Geometrik Morfometri .....	12
2.3. Morfometrik Veriler .....	16
2.3.1. Uzaklıklar, Açılar, Oranlar .....	16
2.3.2. Landmark Koordinatları .....	17
2.3.3. Dış Hatlar.....	20
2.4. Geometrik Morfometride Dış Hat Tabanlı Yaklaşımlar .....	21
2.4.1. Fourier Analizi.....	21
2.4.2. Fourier Şekil Analizi .....	22
2.4.3. Eliptik Fourier Şekil Analizi .....	22
2.4.4. Öz Şekil Analizi .....	24
2.5. Geometrik Morfometride Landmark Tabanlı Yaklaşımlar .....	24
2.5.1. İnce Levha Eğri Analizi (Thin Plate Spline Analysis – TPS) .....	25
2.5.2. Sonlu Eleman Morfometrisi / Ölçekleme Analizi (Finite element morphometry/scaling analysis – FEM / FESA).....	27
2.5.3. Procrustes Analizi.....	28
2.5.3.1. Şekil Uzaklığı ve Procrustes Eşlemesi .....	29
2.5.3.2. Süperimpozisyon .....	29
2.5.3.3. Tam Procrustes Uzaklığı .....	31
2.5.3.4. Ortalama Şeklin Tahmin Edilmesi .....	31
2.6. Şekil Koordinat Sistemleri.....	33
2.6.1. Tanjant Uzayı .....	34
2.6.2. Şekil Değişkenliği ve Tanjant Koordinatları.....	36
2.7. İstatistiksel Şekil Analizinde İki Örneklem Ait Şekil Ortalamalarının Karşılaştırmasında Kullanılan Testler .....	37
2.7.1. Bootstrap Yöntemi.....	37
2.7.2. Permütasyon Testi .....	39
2.7.3. İki Örneklem Hotelling $T^2$ Testi.....	39
2.7.4. James $F_j$ Testi .....	41
2.7.5. İki Örneklem Goodall F Testi.....	41
2.7.6. Minimum Lambda Test İstatistiği .....	42
3. GEREÇ VE YÖNTEM.....	44
4. BULGULAR .....	46
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	51
6. KAYNAKLAR.....	62
7. TEŞEKKÜR .....	66
8. ÖZGEÇMİŞ.....	67

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil-1: Izgara üzerinde bulunan şeklin, ızgaranın şeklinin bozulmasıyla hedef şekle uygun hale getirilmesi .....	6
Şekil-2: Eski Mısırda mezar ya da anıtları süslemek için kullanılan standartlaştırılmış kareler .....	8
Şekil-3: Da Vinci' nin Vitruvius Adamı .....	9
Şekil-4: Morfometrik veriler. Uzaklıklar, açılar, konturlar(dış hatlar) .....	10
Şekil-5: Geometrik morfometride landmark ve dış hat tabanlı yaklaşımlar .....	15
Şekil-6: İstatistiksel şekil analizinde iki boyutta kullanılan landmark işaretlemeleri .....	18
Şekil-7: İstatistiksel şekil analizinde üç boyutta kullanılan landmark işaretlemeleri .....	18
Şekil-8:Fourier şekil analizinin temeli .....	22
Şekil-9: Kapalı dış hattın eliptik Fourier analizi .....	23
Şekil-10: Afin dönüşüm .....	25
Şekil-11: Afin olmayan dönüşüm .....	26
Şekil-12: FEM için sonlu eleman ayrıştırması .....	27
Şekil-13: Düzlemdeki üçgenler için şekil uzayları .....	35
Şekil-14: Tanjant uzayları .....	35
Şekil-15: Simulasyon çalışmasında kullanılan kaynak veri seti için landmark işaretlemesi .....	44

## TABLolar DİZİNİ

- Tablo-1:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2= 0.001, 0.01, 0.05$  varyans değerleri için Şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlar için elde edilen tip I hata oranları..... 47
- Tablo-2:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2= 0.1, 0.5, 1$  varyans değerleri için Şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlar için elde edilen tip I hata oranları ..... 48
- Tablo-3:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2= 5, 737, 1703$  varyans değerleri için Şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlar için elde edilen tip I hata oranları..... 49
- Tablo-4:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2= 2949$  varyans değeriyle isotropik olmayan varyans yapısı için Şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlarda elde edilen tip I hata oranları ... 50

## ÖZET

Şekil; nesneden öteleme, ölçekleme ve döndürme etkileri kaldırıldığında geriye kalan geometrik bilgidir. İstatistiksel Şekil Analizi, şekillerin geometrik yapılarını incelemek için kullanılan yöntemleri içermektedir. İstatistiksel şekil analizi literatüründe iki örneklem karşılaştırma problemi üzerine temellenen testler mevcuttur. Bu çalışmada, istatistiksel şekil analizi literatüründe kullanılan Hotelling  $T^2$ , Goodall F, James  $F_j$  testleri ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin tip I hata oranına göre performanslarının karşılaştırılması amaçlanmıştır. Simulasyon çalışmasında, şekil uzayının seçimi, farklı örneklem büyüklükleri ve varyans değerleri göz önünde bulundurularak bu testlerin klasik, bootstrap ve permütasyon versiyonlarıyla birlikte ilgili p-değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca isotropik ve isotropik olmayan varyans yapıları da dikkate alınmıştır. Simulasyon sonuçları, incelenen tüm örneklem büyüklüklerinde ve varyans değerlerinde isotropik varyans yapısına göre tanjant şekil uzayında hesaplanan Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonunun en iyi performansa, şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanan  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonunun ise en kötü performansa sahip olduğunu göstermiştir. İsootropik olmayan varyans yapısı için şekil uzayı olarak tanjant uzayı kullanıldığında Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin bootstrap ve permütasyon versiyonları ve James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonu, şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalandığı durumda ise Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin permütasyon versiyonu, James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonu ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin permütasyon versiyonunun en iyi performansı gösterdiği görülmektedir. İsootropik olmayan varyans yapısı için, en kötü performansı şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durum içinde geçerli olmak üzere Goodall F testinin klasik versiyonu ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonunun gösterdiği görülmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Şekil uzayı, İstatistiksel şekil analizi, Procrustes analizi, Tip I hata oranı.

## SUMMARY

### COMPARISON OF TWO SAMPLE TESTS IN STATISTICAL SHAPE ANALYSIS

Shape is all geometrical information that remains when location, scale and rotational effects are removed from an object. Statistical Shape Analysis involves methods for examining the geometrical structures of shapes. In statistical shape analysis literature, there are several tests based on two sample comparison problem. In this study it is aimed to compare Hotelling  $T^2$ , Goodall F, James  $F_j$  tests and  $\lambda_{\min}$  test statistics performance with respect to type I error rate. Through the simulation study, tabular, bootstrap and permutation versions of these tests and related p-values were computed with considering the selection of shape space, different sample size and various variance values. Also isotropic and anisotropic variance structures were considered. For isotropic variance structure, simulation results showed that in all sample sizes and variance level conditions, for both selection of shape space permutation versions of Hotelling  $T^2$  tests computed in tangent space has the best performance while tabular version of  $\lambda_{\min}$  test statistic has the worst performance which uses complex arithmetic and exploit the geometry of the shape space. For anisotropic variance structure, simulation results showed that in all sample sizes permutation and tabular versions of Hotelling  $T^2$  test, bootstrap and permutation versions of Goodall F test and permutation version of James  $F_j$  test computed in tangent space, have the best performance, permutation and tabular versions of Hotelling  $T^2$  test, permutation version of Goodall F test, permutation version of James  $F_j$  test and permutation version of  $\lambda_{\min}$  test statistic which use complex arithmetic and exploit the geometry of the shape space have the best performance. For anisotropic variance structure in both usage of shape space, tabular version of Goodall F test and tabular version of  $\lambda_{\min}$  test statistic which uses complex arithmetic and exploit the geometry of the shape space have the worst performance.

**Key Words:** Shape space, Statistical shape analysis, Procrustes analysis, Type I error rate.

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda, şeklin istatistiksel analizine olan ilginin daha da fazla artmış olduğu gözlenmektedir (1). Morfometrik çalışmalarda, şekil; landmark olarak adlandırılan noktalara karşılık gelen, organizma veya organların üç boyutlu veya onların iki boyutlu uzaydaki imajlarının ilgili pozisyonlarıdır. Ayrıca şekil; nesneden konum, döndürme ve ölçekleme etkileri kaldırıldığında geriye kalan geometrik bilgi olarak tanımlanmaktadır (1-4). İstatistiksel şekil analizi, benzer şekillerin ya da benzer şekillerden oluşan farklı grupların özelliklerini tanımlamak amacıyla ölçülen istatistiklere ait şekiller kümesinin geometrik analizidir. İstatistiksel şekil analizi kullanılarak şekiller arasındaki uzaklığın ölçüsü elde edilebilmekte, ortalama şekil ve şekil değişkenliği tahmin edilebilmektedir (2).

Morfometri, organizmaların formlarındaki (büyüklük ve şekil) değişim ve dönüşümlerle ilgili çalışmalarla ilgilenen bir alan olup biyolojik formun nicel analizi olarak tanımlanabilir (5, 6). Son 25 yıllık bir zaman diliminde oldukça hızlı bir şekilde gelişen bu alan, günümüzde geleneksel morfometri ve geometrik morfometri olarak sınıflandırılmaktadır (6). Şekli tanımlamak için kullanılan biyolojik ve anatomik anlamlılığa sahip, landmark olarak isimlendirilen, noktalar arasındaki açı, uzunluk gibi geleneksel ölçümlerin kümesine çok değişkenli analiz yöntemlerin uygulandığı alan geleneksel morfometri olarak isimlendirilmekte olup, geometrik morfometri ise landmarklar üzerinde temellenen istatistiksel şekil analizi uygulamalarını içeren alan olarak tanımlanmaktadır.

Geleneksel morfometrik yaklaşımlar; uzaklık ölçümleri, oranlar ve açıların keyfi olarak toplanmış veri kümelerinin çok değişkenli analizleri üzerine temellenmiştir. Landmarklara göre hesaplanan uzaklık, oran ya da açı gibi ölçüm değerleri landmarkların pozisyonlarına ait bilginin sadece bir kısmını içermektedirler. Geleneksel morfometride kullanılan yöntemler, ölçülen değişkenler arasındaki uzaysal ilişkilerle ilgilenmemekte ve analiz aşamasında bu bilgidен yararlanmamaktadırlar. Sezgisel olarak, bu bilgiyi kullanan yöntemlerin şekil farklılıklarını belirlemede istatistiksel açıdan daha büyük bir güce sahip olacağı söylenebilir. Geleneksel yöntemler, şekle ait nümerik tanımlayıcıların istatistiksel ilişkilerini sadece görsel olarak görüntülenmesine imkan vermektedir. Ancak bu yöntemler kullanılarak şekillerin tahminleri görüntülenemez. Tanımlayıcılar arasında bulunan istatistiksel ilişkilerin tahminlenmesi daha yeni yaklaşım ve yöntemlerle mümkün olmaktadır (3).



Birçok biyolojik ve biyomedikal araştırmada, organ veya organizmaların formlarının analizinde kullanılan en etkili yol landmark noktalarının geometrik konumlarının kaydedilmesidir. Landmark koordinatları, uzaklıkların özel bir kümesi olup bu koordinatlar birbirine dik eksenlerde işaretlenmiş spesifik noktaların uzaklıklarıdır. Landmark koordinatlarının kullanılması landmarklar arasında bulunan uzaklık ya da açıların içindeki bilginin kısa ve net bir şekilde kodlanmasını sağlamaktadır. Toplanan verilerin analiz edilmesi ve görüntülenmesiyle geometrik bilginin tamamının korunması sonucunda koordinat tabanlı yaklaşımlar geometrik morfometri olarak anılmaktadır (7).

Geometrik morfometri, biyolojik yapılara ait şekil değişimlerinin istatistiksel analizi için yeni bir paradigma sunmaktadır (3, 4). Geometrik morfometrinin geleneksel yaklaşımlara göre (çok değişkenli morfometrik teknikler) temel avantajları, morfolojik landmarkların konumlarına karşılık gelen noktalara ait tüm konfigürasyonların şekil değişimini incelemek için kullanılan modeller üzerine temellenen güçlü istatistiksel yöntemlerin gelişimiyle ortaya çıkmıştır. Ek olarak, şekiller arasındaki farklılığın miktarının belirlenebilmesi ve bu metrik ile tanımlanan çok boyutlu uzayın özelliklerinin açıklanabilmesi geometrik morfometrinin geleneksel yöntemlere göre sahip olduğu diğer üstünlükler olarak öne çıkmaktadır (3-5).

İstatistiksel şekil analizi literatüründe bulunan çıkarsama yöntemleri sıklıkla en küçük kareler prosedürü ya da landmarklar arası uzaklıklar matrisinin analiz edilmesi ile süperimpoze edilmiş olan landmarkların konfigürasyonlarını kullanmaktadır. Örneğin, iki bağımsız örneklem olması durumunda iki gruba ait şekil ortalamalarının karşılaştırılmasında kullanılan pratik bir yöntem Procrustes tanjant koordinatlarını kullanarak Mahalonobis uzaklığını ve daha sonra Hotelling  $T^2$  istatistiğini hesaplamaktır. İsootropi varsayımı altında kullanılan diğer bir yaklaşım ise karesel Procrustes uzaklığı üzerine temellenen Goodall F testine ait test istatistiği ile çalışmaktır. Örneklemelere ait varyans-kovaryans matrislerinin homojen olmaması durumunda kullanılacak alternatif bir yöntem ise James  $F_j$  testidir. İstatistiksel şekil analizi literatüründe bulunan ve şekil ortalamalarının karşılaştırılması amacıyla geliştirilmiş en yeni yöntem 2007 yılında Amaral ve ark. tarafından önerilmiştir. Çalışmalarında, k örnekleme ait şekil ortalamalarının karşılaştırılması amacı ile merkezi bir istatistik olan minimum lambda ( $\lambda_{\min}$ ) istatistiğini önermişlerdir (1).

İstatistiksel şekil analizinde kullanılan iki örneklem testlerine ilişkin yöntemler geliştirilirken, diğer taraftan da bu testlerin birbirlerine göre performansları üzerine yapılan çalışmalar önem kazanmaktadır. Bu tezde, istatistiksel şekil analizi literatüründe iki

örnekleme ait şekil ortalamalarını karşılaştırmaya yönelik kullanılan Hotelling  $T^2$ , Goodall F, James  $F_j$  testleri ve  $\lambda_{\min}$  istatistiği tip I hata düzeylerine göre karşılaştırılmıştır.

Simülasyon çalışması kapsamında oluşturulan simülasyon senaryosunda farklı örneklem büyüklükleri ve varyans değerleri, isotropik ve isotropik olmayan durumlar ile şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalandığı durumlar da dikkate alınarak tip I hata düzeyleri bakımından ilgili prosedürlerin performansları incelenmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Şekil Analizi

Nesnelerin şekillerinin tanımlanması, ölçülmesi ve karşılaştırılması büyük bir öneme sahiptir. Şekil analizi; nesnelerin öteleme, ölçekleme ve döndürme bilgilerinin kaldırılabilirdiği durumlarda nesnelere ait şekil ile ilgili çalışma yöntemlerini içermektedir (2). Yine, görsel verinin şekil bileşenlerini ölçmek ve bu bileşenlerden bilgi elde etmek amacıyla kullanılan yöntemlerde şekil analizi içinde yer almaktadır.

Şekil, büyüklük ve görüntü değişimi ile ilgili olan çalışmalar, gelişen teknoloji ile birlikte toplumun ihtiyaçları ile bağlantılı olarak hayatımızda çok önemli bir yere sahiptir. Bunlara örnek olarak; parmak izi ve yazı tanıma sistemleri, yüz tanıma sistemleri, endüstriyel ürünlerin kalibrasyonu, kusurlu genlerin gelişimsel etkilerinin niceliksel olarak değerlendirilmesi vb. verilebilir (8, 9).

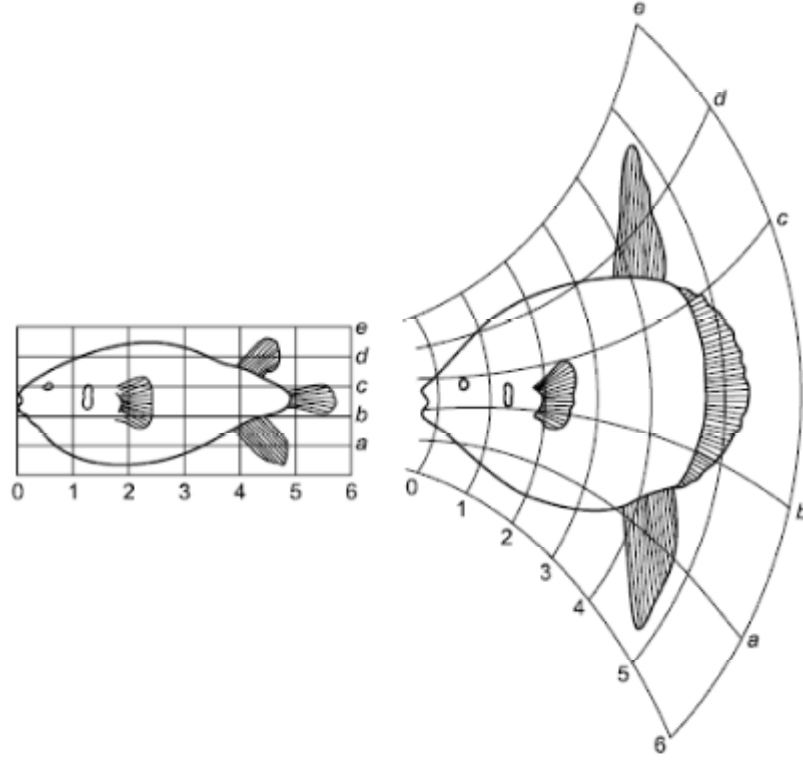
Şekil analizinin istatistiksel teorisine ait yaklaşım 1977 yılında David Kendall tarafından geliştirilmiş olup şekil analizine ve istatistiksel teorisine olan ilgili ise son 25 yıllık bir zaman diliminde önemli bir artış göstermiştir. Bu ilgi, farklı disiplinler ve bu disiplinler arasındaki şekil değişkenliğiyle ilgili çalışmaları içeren ortak bir zeminin sentezi sonucu oluşmuştur (10). Bu ortak zemin, istatistiksel şekil analizinde kullanılan teori ve tekniklerin esnek ve her hangi bir konfigürasyon matrisine uygulanabilir olmasından dolayı tıp, biyoloji, jeoloji ve daha bir çok bilim dalında uygulama yapma imkanı vermektedir. Şekil analizine gösterilen ilgi özellikle morfolojik landmarkların yani anatomik anlamlılığa sahip morfolojik noktaların konumlarına karşılık gelen tüm noktalara ait konfigürasyonların, şekil değişkenliğine ait modelleri temel alan güçlü istatistiksel yöntemlerin geliştirilmesi üzerine yoğunlaşmıştır (5). İstatistiksel şekil analizi, önemliliği anatomik olarak tanımlanmış landmarkları kullanarak organizma şekillerinin karşılaştırıldığı biyolojik araştırmalarda kullanılmaya başlanan oldukça yeni bir yöntemdir (11).

Hastalık ya da yaralanma, ontogenetik gelişim, yerel coğrafik faktörlere uyum veya uzun dönemli evrimsel çeşitlendirme gibi çeşitli biyolojik süreçler bireyler ya da bireylere ait parçalar arasında şekil farklılığı yaratmaktadır. Şekilde meydana gelen bu farklılık, organizmanın aynı parçalarının farklı fonksiyonel rollerine işaret edebileceği gibi büyüme ve morfonogenezi sürecindeki farklılığı da işaret edebilmektedir. Şekil analizi bu farklılığın nedenlerini ve morfolojik dönüşümleri anlamak amacıyla kullanılan bir yaklaşımdır (12).

Yakın zamana kadar nesnelerin şekli ve şekillerindeki değişim, landmarklara göre hesaplanan uzaklıklar, açılar ya da oranlar kullanılarak tahmin edilmekteydi. Yirminci yüzyıl boyunca, yöntemler ve kavramların şekil parametrelerini objektif ve nicel olarak tanımlamayı hedeflemesi sonucunda şekil analizinde önemli gelişmeler yaşanmıştır. Gelişmeler bilgisayarların bu alana girmesi ile daha da çeşitlilik kazanmıştır (8). Ayrıca şekil ve büyüklüğü tanımlamak için kullanılan nesnelere ait değişkenlerin tamamının dikkate alınması sonucunda kullanılan çok değişkenli istatistiksel yöntemler olgunlaşmış olup, istatistik bilimindeki ve paralel olarak bilgisayar alanındaki gelişmelerle birlikte şekil analizi çalışmalarından elde edilen verilerin analizinde kullanılan yöntemlerde çeşitlilik göstermeye başlamıştır (8, 13).

Yirminci yüzyılın sonlarında şekil değişkenliğine ait çalışmalar, landmarklara göre hesaplanan ölçüm kümelerine çok değişkenli yöntemlerin uygulanmasından daha karmaşık bir hal almıştır. Çok değişkenli yöntemlerin kullanılması, nesnelerin geometrik özelliklerine ait farklılıkları ve değişimi elde ederek, hatasız bir biçimde değerlendirmeye imkan veren bugünkü gelişmiş disipline doğru atılmış küçük bir adım olarak kabul edilmektedir (8).

Modern şekil analizi ilk olarak D' Arcy Thompson' ın şekil değişkenliğini anlamaya yönelik yeni yaklaşımlar sunduğu çalışması ile başlamıştır. Thompson, akraba türlere ait formlar arasındaki farklılığı dönüşüm teorisi fikri ile geometrik olarak ortaya koymaya çalışmıştır (14). Thompson' ın çalışmasındaki temel fikir Şekil-1 ' de görüldüğü üzere, nesneye ait şekli bir ızgara üzerinde haritalamak ve ızgaranın şeklini bozarak (deforme ederek) ızgara üzerindeki şekli hedef şekle uygun hale getirmek idi (15). Thompson' ın çalışmasında ortaya koyduğu bu fikir, matematiksel dönüşümler açısından şekil değişimi algısının değişmesini sağlamıştır (8).



**Şekil-1:** Izgara üzerinde bulunan şeklin, ızgaranın şeklinin bozulmasıyla hedef şekle uygun hale getirilmesi (15)

Karşılaştırılabilir biyolojik nesnelere arasındaki değişiklikler, nesnelere ait özelliklerin değiştirilmesi ile elde edilebilmektedir. Bu durum nesnelere arasındaki şekil dönüşümlerinin germe, yassılaştırma ve kesme kuvvetlerinin yine nesnelere uygulanması sonucu elde edilebileceği şeklinde yorumlanabilir. Bu kuvvetlerin açıklanması, şekil değişiminin deformasyon ızgarası üzerinde görüntülenmesi ile görsel olarak elde edilebilmektedir (8).

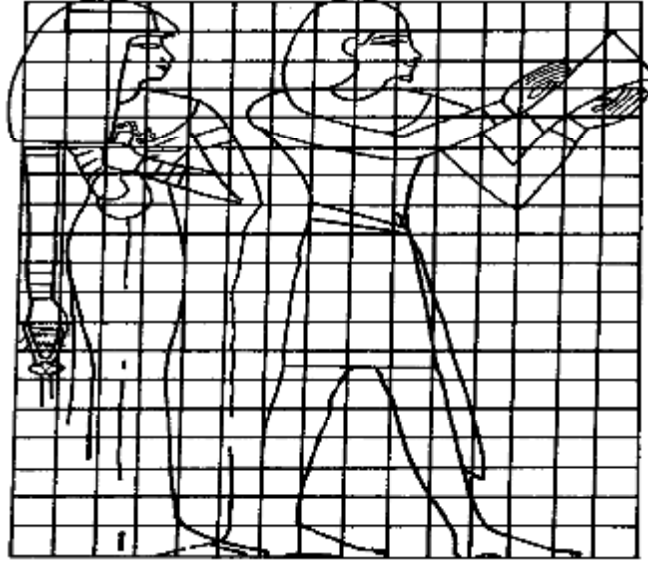
İki konfigürasyon arasındaki harita fonksiyonlarının kullanılmasına ait sezgisel fikir estetik yaklaşımlar ve yapıların çizimi amacıyla Leonardo Da Vinci ya da Dürer gibi sanatçılar tarafından geliştirilse de ilk olarak D'Arcy Thompson morfolojik değişimlerin tanımlanması adına bilimsel amaçla bu aracı geliştirmiş ve kullanmıştır (8, 16). Yirminci yüzyılın sonunda deformasyon ızgaralarının çizimi için gerekli olan matematiksel altyapı oluşturulmuştur. Bu altyapı; nesnenin formuna ve şekline ait değişim ile parametreleri analiz etmek için önerilen superimpozisyon yöntemleri, şeklin dış hat çizgilerine Fourier analizinin uygulanması ve ince levha yöntemi (Thin Plate Spline Analysis – TPS) gibi yöntemleri içeren yeni gelişmekte olan şekil analizi ve şekil istatistiklerinin bir parçası olmuştur (8).

## 2.2. Morfometri

Morfometri, organ ve organizmaların büyüklük ve şeklindeki değişimin analizi için kullanılan geniş kapsamlı istatistiksel prosedürlerin bir kümesi olarak tanımlanabilir (12, 17). Morfometri, morfolojinin bir kolu olup biyolojik forma ait büyüklük ve şekil bileşenleri ile birlikte bunların populasyon içindeki değişimini incelemektedir (18). Morfometrik analizde temel gereksinim, sunulan şekil değişkenliğinin tanımlanabilir ve tekrarlanabilir olmasıdır (17).

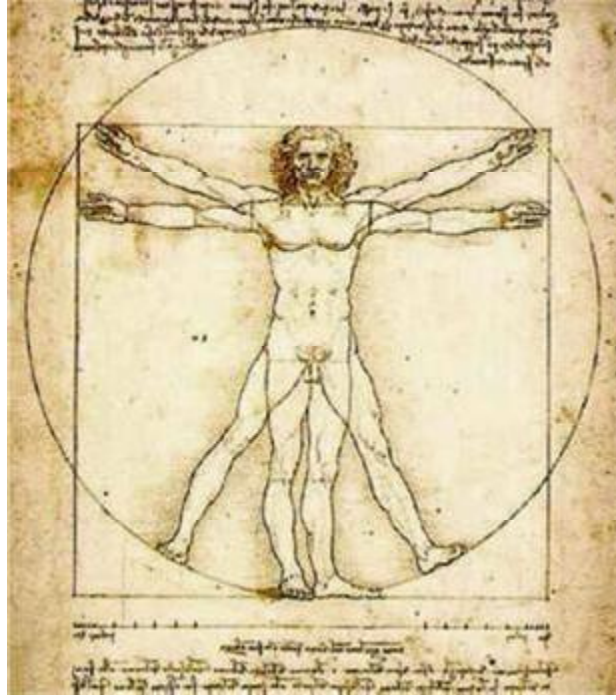
Biyoloji bilminde, şekil ve büyüklükteki değişimi nicel açıdan açıklama girişimleri oldukça uzun bir geçmişe sahiptir. Morfometri terimi ilk olarak 50 yıl önce Robert E. Blackith tarafından telaffuz edilmiştir. Blackith, ateşböceklerinin dış kabuğunun morfolojisine çok değişkenli istatistiksel yöntemleri uygulamış ve populasyon artışıındaki morfolojik değişimleri belirleyerek ateşböcekleri ile çekirgeler arasında üreme fazındaki gelişimsel benzerlikleri açıklamaya çalışmıştır. Bu yaklaşım biyolojik olup, Blackith' in çalışmasının sonuçları biyolojik modeli geleneksel istatistiksel yöntemlerle kurgulamanın bir yolunu sunmaktaydı (17).

Blackith, hayvan şekillerinin karşılaştırılmasına yönelik kayıtlı ilk girişimlerin milattan önce 5. yüzyılın başlarında Pythagoras tarafından yapıldığını belirtmiştir. Daha sonra antik Mısırlılar mezar anıtlarını figür ve dekorlar ile süslemek amacı ile kireçtaşını oymuşlardır. Gay Robins 1994 yılında yayımladığı çalışmasında, oyularak oluşturulmuş bu eserlere ait formların elde edilebilmesi amacıyla, şeklin taslağını belirten kırmızı tebeşir ile işaretlenmiş standartlaştırılmış karelerin örüntüsünün belirgin bir biçimde gözlendiğini belirtmiştir (19). Robins incelediği fotoğraflarda, temeli standartlaştırılmış kareler üzerine kurulan bir sistemin hakim olduğunu belirtmişlerdir. Bu sisteme göre mezarları ya da anıtları süslemek için insan vücuduna ait oranlar tanımlanmış olup, ekstremite oranları belirli bir sayıda kareye ya da karenin bir parçasına göre standardize edilmekteydi (Şekil-2) (20). Sadece baş bölümünde gerçeğe yakın bir benzerlik kurulabilmesi amacıyla ayrıntılara yer verilmekteydi. Eski Mısırlılar tarafından geliştirilen kare standartları yüzyıllar boyunca korunmuştur (17).



**Şekil-2:** Eski Mısırda mezar ya da anıtları süslemek için kullanılan standartlaştırılmış kareler (20).

Eski Mısırlıların insan vücudunun oranlarını belirtmek için kullandığı bu sistem, yüzyıllar sonra Dürer ve Da Vinci tarafında kullanılmıştır. Dürer' in "**İnsanın Oranı**" isimli çalışması, standartlaştırılmış Mısır karelerinden biraz daha fazlasını içermekteydi. Dürer, uzunlukları toplam uzunluğun kesirleri olarak ifade etmiş ve afin dönüşümleri kullanmıştır. Dürer ile Da Vinci'nin aynı fikirde olduğunun kanıtı olarak verilebilecek en iyi örnek Şekil-3' de gösterilen çember içindeki insan figürüdür (21). Da Vinci'nin "**Vitruvius Adamı**" ismi ile anılan bu resmi, iç içe geçmiş bir daire ve bir karenin ortasına çizilmiş uzuvları açık ve kapalı pozisyonda üst üste geçen bir çıplak erkeği betimlemektedir. Bu çizim ve çizim içindeki notlar "**Oranların Kanunu**", ya da "**İnsanın Oranları**" olarak anılmaktadır (17).



**Şekil-3:** Da Vinci' nin Vitruvius Adamı (21)

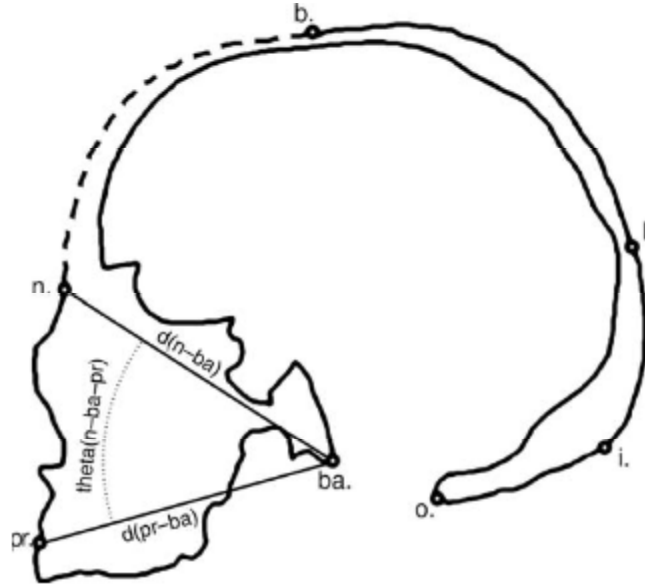
Morfometri alanında yaşanan bu tarihsel gelişmeler ışığında, günümüzde biyolojik araştırmalarda, şekille ilgili birçok soruya yanıt aramaktayız: Bir populasyon içindeki kemiğin/ organın/ yapının ortalama şekli nedir? Populasyon içerisinde ortalama şekil etrafındaki değişimin şekli nedir? Şekilsel olarak gruplar arasında farklılık var mıdır? Bu farklılığın fonksiyonel önemi nedir? Morfometri, bu gibi sorularla ilişkili olan istatistiksel analizleri içeren bir alandır. Tarihsel olarak, bu yöntemler uzaklıklar ve açılar üzerinde uygulanmakta idi. Ancak son yıllarda morfometrik prosedürler, teorik, hesaplama ve diğer avantajlar açısından geleneksel ölçümleri daha iyi tanımlayabilecek anatomik noktaların kartezyen koordinatları üzerine odaklanmıştır (7). Morfometri kavramını geleneksel morfometri ve geometrik morfometri başlıkları altında incelemek geleneksel ve geometrik morfometri arasındaki farkı daha iyi görmemize neden olacaktır.

### **2.2.1. Geleneksel Morfometri**

1960' lı ve yetmişli yıllarda biyometrisyenler, grup içi ve gruplar arasındaki şekil değişkenliğini açıklamak amacıyla çok değişkenli istatistiksel yöntemleri tam ve yoğun bir şekilde çalışmalarında kullanmaya başlamışlardır (13). Bu yeni yaklaşım geleneksel morfometri, çok değişkenli morfometri ya da çok değişkenli biyometri olarak isimlendirilmiştir (22).



Geleneksel morfometri, morfolojik değişkenler kümelerine çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin uygulanmasını içermektedir. Geleneksel morfometride kullanılan değişkenler organizma üzerinden ölçüm yoluyla elde edilmiş çeşitli uzaklıklardır. Ölçümler, yapılar ait uzunluk ve genişlik değerleri ile landmarklar arasındaki uzaklıklar olmakla birlikte, analizlerde kimi zaman açılar ve oranlar da kullanılmaktadır (12, 13, 22, 23). Şekil-4' de morfometrik verilere örnek olabilecek ölçümler verilmiştir.



**Şekil-4:** Morfometrik veriler. Uzaklıklar, açılar, konturlar(dış hatlar):

**b.** – **bregma** (Coronal ve sagittal suturaların external kesime yeri), **n.** – **nasion** (superiordan nasal kemiklerin başladığı nokta), **pr.** – **prosthion** (Os maxillae'nın sag ve sol ilk incisivlerine ait proc. alveolaris'ler arasındaki orta nokta), **ba.** – **basion** (mandibular eklem), **o.** – **opisthion** (Kraniumun vertebraya geçiş noktası), **i.** – **inion** (Protuberantia occipitalis externa'nın uç tepe noktası), **l.** – **lambda** (Sagittal ve lambdoidal suturların external kesişme yeri) (20).

Bu yaklaşımlar kullanılarak morfolojik ölçümlerdeki değişimler belirlenebilmekte olup örneklem içi ve örneklemler arasındaki değişimler değerlendirilebilmektedir (13). Geleneksel morfometrideki uygulamalar daha çok şekil değişiminin büyüklüğün bir fonksiyonu olarak açıklandığı allometri çalışmaları ve ortak bir büyüklüğe göre düzeltilen organizmalara ait örneklemler arasındaki şekil farklılıkları üzerinde çalışılmasına imkan veren büyüklük düzeltmesi ile ilişkilidir (23).

Büyüklük düzeltmesi çalışmalarında doğrusal uzaklık ölçümlerinin genellikle şekille yüksek derecede ilişkili olması büyüklük düzeltmesi için kullanılacak yöntemlerin geliştirilmesinde daha çok efor harcanması anlamına gelmekte böylece büyüklükten

bağımsız şekil değişkenleri açıklanabilmekte ve şekil değişkenliğinin deseni belirlenebilmektedir (13).

“Geleneksel” sözcüğü 30 ya da 40 senedir morfometrik analizde kullanılan istatistiksel tekniklere ait grubu tanımlamak için kullanılmaktadır (24). Geleneksel morfometride kullanılan istatistiksel tekniklere örnek olarak temel bileşenler analizi, temel koordinat analizi, kanonik değişkenler analizi, diskriminant analizi, faktör analizi ve çok değişkenli varyans analizi (MANOVA) verilebilir (13, 23, 24). Geleneksel morfometride sonuçlar çoğunlukla ölçülen değişkenlerin doğrusal kombinasyonları şeklinde nümerik ve grafiksel olarak açıklanmaktadır (13).

Çok değişkenli morfometri, çok değişkenli istatistik ve nicel morfoloji ile birleştiğinde ortaya birkaç dezavantaj çıkmıştır. Örneğin, büyüklük düzeltmesi için pek çok yöntem önerilmiş ancak hangi yöntemin kullanılacağı hususunda etkin bir birlik sağlanmamıştır. Buna bağlı olarak, farklı büyüklük düzeltme yöntemlerinin kullanılması az bir miktar sapmayla da olsa farklı sonuçların elde edilmesine neden olmaktadır. İkinci olarak, çoğu uzaklık türdeş noktalar tarafından tanımlanmadığı için doğrusal uzaklıkların türdeşliğinin değerlendirilmesinin güç olmasıdır. Bir diğer sorun ise iki farklı şekilden uzaklık ölçümlerine ait aynı veri kümesinin elde edilebilmesidir ki, bunun nedeni de birbirine göre uzaklığı hesaplanan noktaların konumlarının veri setine dahil edilmemesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, oval ve gözyaşı damlası şekillerine sahip iki nesne üzerinde maksimum uzunluk ve maksimum genişliğe ait ölçümler alındığında nesnelere şekilsel olarak farklı olmalarına rağmen aynı yükseklik ve genişlik değerleri elde edilebilmektedir. Bu nedenle de şekilleri ayırt etmek için gerekli olan istatistiksel güç, olması gerektiğinden daha düşük düzeyde çıkmaktadır (13).

Ek olarak, Baltanas geleneksel morfometrinin dezavantajlarını şu şekilde ifade etmiştir:

- Geleneksel morfometri oldukça nesneldir,
- Kullanılan morfolojik değişkenlerden orijinal şekli elde etmek olası olmadığı için şekle ait bilgi korunamaz,
- Analizlerde tüm değişkenler kullanılmasına karşın, biyolojik nesnenin şekline ait tüm bilgidен sadece küçük bir miktarı elde edilir (22).

Geleneksel morfometride uzaklık ölçümlerine ait, klasik veri matrisleri kullanılarak orijinal formun şeklini elde etmek mümkün değildir. Geleneksel morfometride genel form gerçekten elde edilemez ve analizde kullanılmaz. Araştırmacı, yapılan birden fazla ölçümün ortak bir landmarkı paylaşabileceğini bilmelidir. Ancak bu bilgi, çok değişkenli

analizde kullanılmaz ve sonuç olarak bu bilgi dikkate alınmadan yapılan analizler beklenildiği kadar güçlü olmayabilir (23). Geleneksel morfometride doğrusal uzaklıklar kümesi, orijinal nesnenin geometrisini yakalamada çoğu zaman etkisiz kalmakta, dolayısı ile morfolojik değişkenler arasındaki geometrik ilişkiler korunamamakta, bunun sonucunda da doğrusal uzaklıklardan yararlanılarak şekle ait sınırlı grafiksel gösterimler elde edilmektedir. Bu durum şekle ait bazı görünüşlerin kaybedilmesine neden olmaktadır (13, 22).

Geleneksel morfometride karşılaşılan sıkıntılar araştırmacıları morfolojik şekli ölçmek ve analiz etmek için alternatif yöntemleri araştırmaya yöneltmiştir (13). Bu amaç doğrultusunda birkaç bilim adamı (25-27) morfometrik verilere ait biyolojik bulgulara ekstra bir önem verme ihtiyacı duymuşlardır. Ancak bu girişimleri ne yazık ki yeteri kadar başarılı olamamış ve ilgi görmemiştir (22).

Organizmaların anatomik özelliklerini karşılaştırmak biyoloji bilimi için yüzyıllardır önemli bir konudur. Organizmaların taksonomik sınıflandırması ve biyolojik yaşamın çeşitliliğinin anlaşılması, tarihsel olarak morfolojik formların tanımlanmasına dayanmaktadır. Yirminci yüzyılın başları boyunca biyoloji, tanımlayıcı bir alan olmaktan çıkıp nicel bir bilim halini almış ve morfoloji analizi de sayısal anlamda bir devrim geçirmiştir. Bir ya da daha fazla ölçülebilir özellik için nicel veriyi içeren morfolojik çalışmalar, ölçümlere ait ortalama değerler ve bu değerlerin gruplar arasında karşılaştırılması şeklinde özetlenmekteydi. Yirminci yüzyılın ortaları ile birlikte morfolojik şeklin nicel tanımı, gruplar arasındaki şekil değişkenliğinin yapısını tanımlayan istatistiksel analizler ile birleştirilmiş ve gerçek dönüşüm 80'lerin başında Geometrik Morfometri'nin ortaya çıkması ile meydana gelmiştir (13, 22).

### **2.2.2. Geometrik Morfometri**

Önceki bölümde belirtildiği üzere geleneksel morfometride landmarklara göre hesaplanan doğrusal uzaklıkların, oranların ya da açılarının analizi ölçümlerin alındığı anatomik noktaların yani landmarkların boyutsal anlamda tam olarak dizisini ya da şeklin geometrisini yansıtamamaktadır (7, 12, 13, 20, 22). Biyolojik araştırmaların daha nicel bir hal alması sonucunda, modern istatistikte kullanılan çok sayıda yöntem bu alanda kullanılmaya başlanmış olup anlamlılık testi gibi bazı yöntemlerin ise biyolojik verilerin yayımlanan analizlerinde kullanılması zorunlu hale gelmiştir. Çok değişkenli istatistik bu alanda kullanılmak üzere tamamıyla yeni araçlar kazandırmıştır. Formun içindeki bilgiyi

yakalamak üzere elde edilen gözlemlerin tamamı bu yöntemler ile eş zamanlı olarak analiz edilebilmektedir (28).

Geometrik morfometrinin temelleri ilk olarak 1942 yılında D'arcy Thompson'ın biyolojik şekil değişimini koordinat sistemindeki bozulma olarak ele aldığı çalışması sayesinde atılmış olup, özellikle 1978 yılındaki çalışmasında Bookstein tarafından derinlemesine incelenmiştir. Bookstein, çok değişkenli uzayda biyolojik formun geometrisi üzerine yoğunlaşmıştır. Geometrik morfometri terimi ise ilk kez 1993 yılında Corti tarafından kullanılmıştır (7, 22, 28).

Landmark koordinatlarının kullanılması, landmarklar arasında bulunan uzaklık ya da açıların içinde saklı bulunan bilgiyi kısa ve net bir şekilde kodlanmasını sağlamaktadır. Toplanan verilerin analiz edilmesi ve görüntülemesiyle geometrik bilginin tamamının korunması sonucunda koordinat tabanlı yaklaşımlar geometrik morfometri olarak anılmaktadır (7).

Geometrik morfometride şekil; bir objeden lokasyon, ölçekleme ve döndürme etkisi kaldırıldıktan sonra elde edilen tüm geometrik bilgidir (2, 12). Şekil, kesin bir varlık olup aralarında geometrik ilişkilerin saklı bulunduğu noktaların konfigürasyonu, uzunluk ya da genişlik gibi bölümlere ayrılamaz. Şekil, fenotipin en göze çarpan özelliği olduğu için farklı taksonomik kategorideki organizmalar ile yapılan sistematik çalışmalarda en çok kullanılan özelliklerden biri haline gelmiştir. Geometrik morfometride biyolojik şekil, referans alınan orijinal şekildeki dönüşüm ile tanımlanmaya çalışılmaktadır. Thompson'ın 1942 yılında ortaya attığı fikir, cazip ve gelecek vaat etmekle birlikte beraberinde analitik bir prosedür getirmemekteydi. Bilgisayarların hayatımızda sahip olduğu yerin artması Thompson' un fikrini temel alan uygulamaların morfometrik analizler için geliştirilmesine imkan vermiştir (8).

Rohlf ve Marcus (23) aşağıdaki maddelerle geometrik morfometri ya da geleneksel olmayan morfometri olarak adlandırılan yeni yaklaşımı karakterize etmektedir:

- Geometrik morfometride, yapının geometrisini yakalamak için kaydedilen verilerle çalışılmaktadır. Veriler, morfolojik landmark noktalarının 2 ya da 3 boyutlu koordinatlarını formun içinde bulundurmaktadır. Koordinatlar, geleneksel ölçümlerden daha kullanışlıdır ve geleneksel morfometride kullanılan uzaklıklar, koordinatlar yardımıyla da hesaplanabilmektedir. Landmarkların grafiksel gösteriminin görsel değerlendirmesiyle landmarkların ilgilenilen yapıları kapsamındaki yeterliliği kontrol edilebilmektedir. Kayıt altına alınmış olan türdeş

landmarklara verilen önem, sonuçlara ilişkin daha geçerli biyolojik yorumların getirilmesini sağlamaktadır.

- Geometrik morfometride sadece şekil değişkenliğini raporlamaktan ziyade birbirlerine göre ilgili olarak yer değiştiren yapılar da raporlanabilir. Bu gibi durumlarda pseudo landmarklar (i- yapıların bitim bölümlerine konumlandırılan, ii- yapının dış hattına çizilen eğrinin ekstrem noktalarına konumlandırılan, iii- yapının dış hattına çizilen eğri üzerinde keyfi olarak konumlandırılan noktalar) kullanılabilir.
- Eğer yapıya ait genel dış hat ya da yüzey ile ilgilenilirse bu bölümler dış hat boyunca ya da yüzey üzerinde dijitalize edilmiş noktalar dizisi (landmarklar) kullanılarak yakalanabilir.

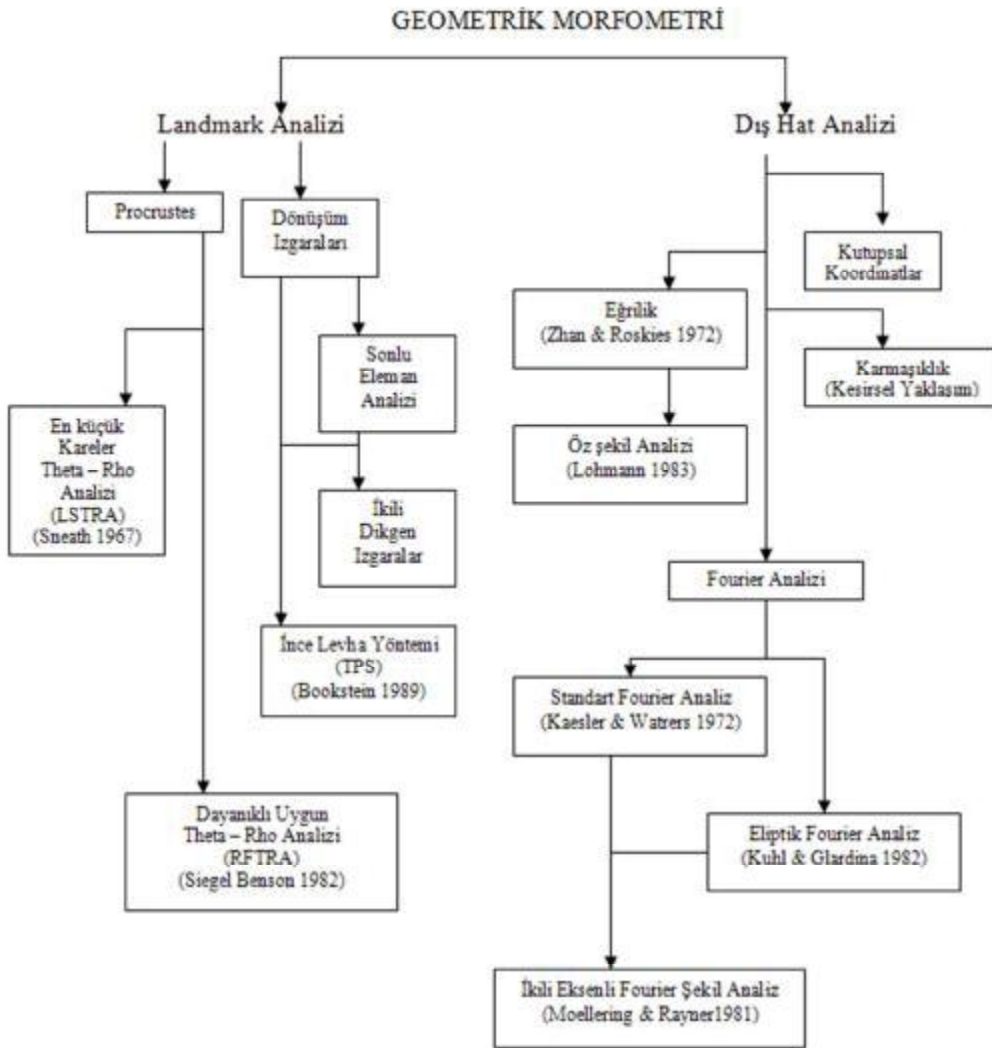
Landmarklar arasındaki geometrik ilişkiler, kendi başlarına satır koordinatları arasında bulunmamaktadır. Noktalar arasındaki ilişki, noktalara 2 ya da 3 boyutta uygun fonksiyonun uydurulması ile yakalanabilir. Uydurulmuş olan fonksiyonun parametrelerinin tahminleri standart tek değişkenli ya da çok değişkenli analizlerde değişken olarak kullanılabilir (23).

Geometrik morfometrinin ilgi alanına, özellikle morfolojik yapının geometrisini yakalayan veriler girmekte olup, organik formlar arasındaki karşılaştırmalar landmark olarak isimlendirilen farklı noktaların konumlarına karşılık gelen bilginin toplanması ile yapılmaktadır (13, 22). Landmarkların konfigürasyonlarının analizi, şekil değişimini yapay değişkenlere ayırmadan çalışma imkanı vermektedir. Birçok landmark tabanlı yöntem mevcut olup bu yöntemler Şekil-5' de verilmiştir.

Bazı durumlarda landmarkları tanımlamak olası değildir ya da landmark tabanlı yaklaşımları uygulanabilir hale getirmek için çok sayıda landmarkın kullanılması gerekmektedir. Bu gibi durumlarda alternatif olarak başka bir seçenek mevcuttur: Dış hat analizi (Outline analysis). Bu analiz şu esaslar üzerine kurulmuştur (22):

- Landmarklar elde edilebilir olmadığında çalışılan nesnenin dış hattı boyunca noktaların sayısından ziyade pozisyonları kayıt edilmelidir,
- Bu noktalar için matematiksel bir fonksiyonun uydurulması gerekmektedir,
- Şekillere uydurulan matematiksel tanımlayıcıların analizi ile şekiller arasındaki farklılık açıklanır.

Dış hat analizi, yine Şekil-5’ de görüldüğü üzere çeşitli spesifik yöntemleri içermektedir (22).



**Şekil-5:** Geometrik morfometride landmark ve dış hat tabanlı yaklaşımlar (22).

Landmark ya da nesnenin dış hattına ait verileri analiz etmek için geliştirilen yöntemler, analizlerde avantaj sağlamaktadır. Bu avantajlar ile eş zamanlı olarak David Kendall ve diğer istatistikçiler şekil analizi için çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin ve biyolojik formun direkt olarak görüntülenmesine imkan veren yöntemlerin kullanımının birleştirilmesine olanak tanıyan istatistiksel bir teori geliştirmişlerdir. Bookstein bu yöntemi “morfometrik sentez” olarak ifade etmiştir (13).

Son yıllarda biyoloji ve tıp alanlarında şekil varyasyonunu ortaya koymak için kullanılan geleneksel morfometrik çalışmalar yerini geleneksel olmayan yani geometrik morfometrik çalışmalara bırakmıştır. Birçok canlının taksonomik durumunu ortaya koymak için gerek tek başına gerekse diğer metotlarla birlikte geometrik morfometri kullanılmaya başlanmıştır (29-32). Örneğin, geometrik morfometrik yöntemler ile yüz ve

kafatası kemiklerinde yapılan landmark işaretlemesi ile farklı insan grupları ayırt edilmeye çalışılmıştır (33). Ayrıca birçok tür için evrimsel filogenetik ilişkileri ortaya çıkarmak için yapılan çalışmalarda da geometrik morfometrik yöntemler kullanılmıştır (34, 35).

### 2.3. Morfometrik Veriler

Morfometrik analizlerde kullanılan spesifik değişkenler araştırılan soru, çalışılan materyal, veri elde etmek için kullanılan ekipman ve araştırmacının çalışılan konu üzerindeki deneyimi göz önüne alınarak seçilmektedir. Bununla birlikte şekil analizinde kullanılan morfometrik verileri genel olarak birkaç sınıfa ayırmak mümkündür. Bu sınıfların her birinin kendi içinde yararları / kısıtlamaları olmakla birlikte yine her biri kendi içinde farklı süreç tiplerini, analizleri ve yorumlamayı kabul etmektedir. Bu farklı değişken türlerine ait ortak olan nokta her bir birimden aynı amaç için kaydedilen verinin özdeş olduğu varsayımdır. Örneğin yürütülen bir çalışmada birinci birimden elde edilen baş çevresi ölçümü ile ikinci birimden elde edilen baş çevresi ölçümü aynı değişkendir. Baş çevresi genişliğinde olduğu gibi ölçümlerin bu eşitliği her değişken için uygulanabilir (20).

#### 2.3.1. Uzaklıklar, Açılar, Oranlar

Uzaklıklar, morfometrik analizde kullanılan belki de en eski ve en bilinen değişkenlerdir. Uzaklıklar; cetvel, pergel ya da Şekil-4' de verilen nasion - basion gibi tanımlanmış noktalar arasındaki uzaklıkları ölçmek için tasarlanan özel araçlar yardımı ile ölçülebildiği gibi, ek olarak maksimum kranial uzaklık (36) gibi belirli bir kurala göre de ölçülebilmektedir (20). Uzaklıklar doğrusal (düz bir doğru ile ifade edilebilir) olarak tanımlanmakla birlikte, Şekil-4' de frontal kemiğe ait **nb** uzaklığını gösteren yay uzunluğunda olduğu gibi eğrilerden de meydana gelebilir (20).

Uzaklıklar, oryantasyon ve pozisyonun doğal olarak birbirinden bağımsız olma avantajına sahiptir. Şeklin analizini yapabilmek için uzaklıklar kümesinden çıkarılması gereken tek bilgi büyüklüktür. Bu değişmezliği elde etmenin yollarından bir tanesi oranları ya da iki uzaklığın nispi büyüklüklerinin kodlandığı indisleri kullanmaktır. Örnek olarak, şekil-4' de nasion ve basion arasındaki uzaklığın "**d(n-ba)**", prosthion ve basion arasındaki uzaklığa "**d(pr-ba)**" oranı şekil analizi için değişken olarak kullanılabilir. Bu orana gnathic ya da alveolar indeks (37, 38) denilmekte olup yüzün şekli ile ilgili şifrelenmiş bilgiyi içermektedir (20).

Uzaklıklarla ilgili önemli bir problem ise dikkatli bir şekilde seçilmedikçe uzaklıklara ait ölçümlerin bitiş noktalarının nispi konumlarının belirlenememesidir. Bu nedenle yapının şekli hakkındaki bilgi analize dahil edilemeyebilir. Yukarıdaki paragrafta verilen örnekte nasion ile basion, prosthion ve basion arasındaki uzaklıklar (ve oranları) nasion ve prosthionun birbirlerine göre pozisyonları hakkında bilgi içermemektedir. Aslında, aynı nasion – basion ve prosthion – basion uzaklığına sahip çok sayıda yüz şekli vardır. Bu dezavantajı ortadan kaldırmanın yolu değişkenlerimize nasion – basion – prosthion tarafından oluşturulan açığı eklemektir. Şekil-4’ de bu açı “**teta (n – ba – pr)**” ile gösterilmektedir. Açılar, uzaklıklar gibi konuma ve oryantasyona göre değişmezlik özelliğini sağlamakla birlikte uzaklıklardan farklı olarak büyüklüğe göre de değişmezdir. İki uzaklığın ve açının kombinasyonu, yansıma üzerinde üç noktanın nispi pozisyonlarını sabitlemektedir. Ancak farklı birimlerin değişkenlerinin karışımı, değişkenlerin varyansları ve kovaryansları hakkındaki bilgiyi kullanan temel bileşenler analizi gibi çok değişkenli analizlerde sorunlara neden olabilmektedir. Bu gibi durumlarda verinin kovaryans yerine korelasyon matrisiyle analizi yapılmalıdır veya standartlaştırma yapılması sonrasında korelasyon ya da kovaryans matrisleri kullanılabilir (20, 39).

Daha iyi bir çözüm ise ölçümü yapılmış mevcut uzaklıklara nasion – prosthion uzaklığını eklemektir. Üç uzaklığın (nasion – basion, prosthion – basion, nasion – prosthion) bu yeni kümesi, yansıma üzerinde üç noktanın nispi pozisyonlarını düzeltmekle birlikte, pozisyon ve oryantasyona göre değişmezdir. Ancak bu küme halen büyüklük bilgisini içermektedir.

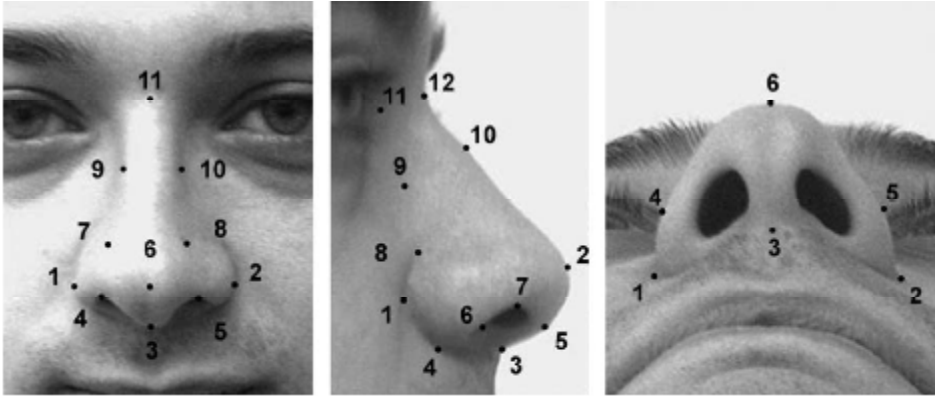
Bu çözümlerin eksikliği, ilgilenilen yapının şeklini belirlemek için gerekli olan etkili değişkenler kümesinin seçiminde ortaya çıkmaktadır. Bu seçim tanımlanan uzaklıklar ve anatomik noktalar arttıkça daha zor bir hale gelmektedir (20).

### **2.3.2. Landmark Koordinatları**

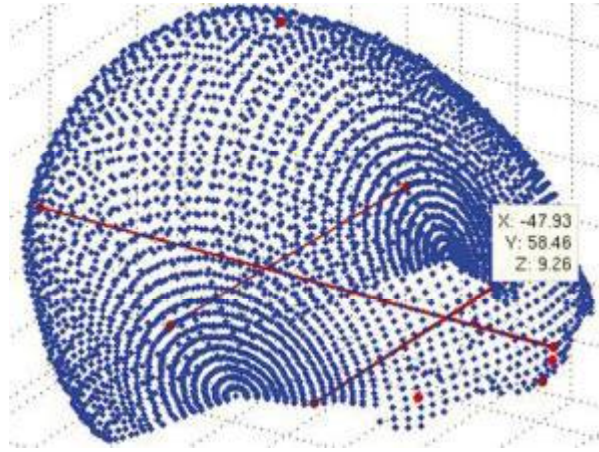
Landmarklar, istatistiksel şekil analizinde ilk kez Kendall (40) ve Bookstein (41) tarafından kullanılmıştır. Landmark koordinatları, uzaklıklar ve açılar gibi morfolometrik analizlerde kullanılan bir veri türü olmakla birlikte diğer veri türleri gibi kendi içinde sahip olduğu problemleri vardır. Landmark koordinatları aslında uzaklıkların özel bir kümesi olup bu koordinatlar birbirine dik eksenlerde işaretlenmiş spesifik noktaların uzaklıklarıdır. Bu noktalar, alındıkları biyolojik yapı üzerinde anatomik anlamlılığa sahip olduğunda çoğunlukla landmark olarak adlandırılmakta olup geleneksel açı ve uzaklıkları tanımlamak



için de sıklıkla kullanılmaktadırlar (20). İki ve üç boyutta kullanılan landmark işaretlemelerine örnekler Şekil-6 ve Şekil-7 de verilmiştir (42, 43).



**Şekil-6:** İstatistiksel şekil analizinde iki boyutta kullanılan landmark işaretlemeleri (42).



**Şekil-7:** İstatistiksel şekil analizinde üç boyutta kullanılan landmark işaretlemeleri (43).

Landmark koordinatlarının kümesi, örnek üzerindeki nokta konumlarının iki veya üç boyutta sayısallaştırılmasını sağlayan spesifik donanımlar ya da şekil üzerinden ölçüm yapan yazılımlar ile elde edilebilir.

Landmark koordinatlarını tanımlamak için öncelikle pozisyonları kaydedilecek landmarklara göre koordinat sistemi belirlenmelidir. Landmarklar tarafından tanımlanan her olası açı ve uzaklık klasik geometri ve temel trigonometri kullanılarak hesaplanabilir. Bu durum koordinatların kullanılmasının sağladığı avantajı göstermektedir (20).

Landmark koordinatlarının da kendi içinde problemleri vardır. Landmarkların kaydedileceği, biyolojik anlamlılığa sahip eksenler kümesini tanımlamak güçtür. Bu tip eksenleri anatomiye bağlı kalarak tanımlamak, landmark koordinatlarına göre tanımlanan eksenleri kullanan anatomik yapılardaki değişkenliğin doğrusal olmayan bir şekilde

aktarılmasına neden olmaktadır. Bunun yerine koordinat verileri genellikle her bir örneğe göre sabit olan, keyfi bir biçimde uygun olarak seçilmiş eksenlere göre toplanmaktadır. Bu şekilde elde edilen koordinatların içinde, farklı eksenlere göre oryantasyon ve konum etkileri kodlanmış olarak bulunmaktadır. Burada farklı eksenlerden kastedilen veri toplama aşamasında örneklerin farklı pozisyona sahip olmalarıdır. Koordinatların karşılaştırılabilirliğine ait temel problemin yanında, landmark koordinatları şifreledikleri bilginin kalitesine göre de farklılık göstermektedirler (20).

Dryden ve Mardia (2) landmark noktalarını üç ana başlık altında toplamışlardır:

- i. Nesnenin önemli kısımlarına yerleştirilen landmarklar,
- ii. En yüksek eğriliğe sahip, bitiş noktaları gibi bağımsız konumlara yerleştirilmiş landmarklar,
- iii. İlk iki landmark çeşidinin arasına yerleştirilmiş olan landmarklar.

Dryden ve Mardia (2) bu üç landmark türünü anatomik, matematiksel ve pseudo landmark olarak adlandırmışlardır. Landmark türlerine kısaca değinecek olursak;

- **Anatomik landmarklar:** Uzman tarafından işaretlenen ve organizmalar arasında biyolojik anlamlılığa sahip olan landmarklardır.
- **Matematiksel landmarklar:** Figürün belirli bir matematiksel ya da geometrik özelliğine göre nesne üzerinde konumlandırılan landmarklardır.
- **Pseudo landmarklar:** Organizma üzerinde, dış hat çevresinde ya da matematiksel ve anatomik landmarklar arasında konumlandırılmış landmarklardır.

Bookstein (44), bu tanımlamalara ek olarak landmarklara ait sınıflandırmayı tip I, tip II ve tip III şeklinde yapmıştır. Tip I landmarklar, dokuların ya da kemiklerin birleşme noktalarında konumlanmaktadır. Tip II landmarklar, maksimum eğim gibi yerel özellikleri ile tanımlanmaktadır. Tip III landmarklar ise maksimum çap ya da ağırlık merkezi gibi noktalarda konumlandırılmaktadır (2, 20).

Anatomik landmarklar tip I ve tip II, matematiksel landmarklar tip II ve tip III landmark grubuna dahil olmakla birlikte, Pseudo landmarklar ise tip III landmark grubuna girmektedir. Pseudo landmarklar tip I ya da tip II landmarklar arasına nesnenin dış hattı boyunca eşit aralıklarla konumlandırılırlar. Tip I landmarklar genellikle en kolay konumlandırılan ve en güvenilir landmark tipi olmakla birlikte tip III landmarklar konumlandırması en zor ve en az güvenilir landmark türüdür (2).

Landmarklara ait diğeri bir tür ise yarı (semi) landmarklardır. Bu landmark tipleri bir eğri üzerine konumlandırılır ve ilgili bir diğeri eğriye göre yer değiştirebilir. Yarı landmark olarak isimlendirilmelerinin nedeni, diğeri landmarklara göre daha düşük boyutta konumlandırılmalarıdır. Örneğin iki boyutlu bir imajda bir boyutlu bir eğri üzerinde konumlandırılabilirler (2).

Lele ve Richstmeier (45) ise landmark türlerini geleneksel, bulanık (fuzzy) ve yapılandırılmış (constructed) landmarklar olarak sınıflamışlardır. Geleneksel landmarklar, belirli bir biyolojik anlamlılığın özelliklerinin konumuna göre tam olarak tanımlanmış noktalardır. Koordinat sisteminden bağımsız ve tanımı koordinat sistemine bağlı olmak üzere kendi içinde ikiye ayrılmaktadır. Bulanık landmarklar tam olarak tanımlanmamış biyolojik bir yapıya karşılık gelen noktalardır ve biyolojik anlamlılığın konumuna karşılık gelmektedirler. Bulanık landmarklar, gözlemcinin referans sisteminde, bir noktadan daha geniş bir alanı kapsamaktadır. Bulanık landmarklar, formun çalışılan bölümleri nispeten geniş ve düz bir alanla destekleniyorsa ve yeterli sayıda geleneksel landmarkı içermiyorsa kullanışlı olmaktadır. Yapılandırılmış landmarklar ise geleneksel landmarklar ve geometrik bilginin kombinasyonu kullanılarak tanımlanan konumlara karşılık gelen noktalardır. Yapılandırılmış landmarklar, çoğu kez geleneksel ve bulanık landmarkların oluşturduğu boşluğa ait yüzeylerde konumlandırılırlar.

### **2.3.3. Dış Hatlar**

Kaş çıkıntısı, göz kenarı ya da foramen magnum (kafatasının altında bulunan boyun deliği) gibi bazı anatomik yapılar, landmarklarla tanımlanmak için uygun değildir. Bu tür yapıların yerine bir diğeri yapının kısmi ya da tüm sınırları ya da yerel maksimum yüzey eğriliğinin izi gibi sürekli tek boyutlu özellikler kullanılmaktadır (20).

Bu tür eğri ya da dış hat verisi genellikle aralıklı nokta koordinatlarının sıralı kümesi şeklinde ifade edilmektedir. Bu tip veriler görünüşte landmark verisine benzer olmakla birlikte kavramsal olarak farklıdır. Örnekler arasında dış hattı tanımlamak için kullanılan noktalar yerine tüm yapı karşılaştırılmaktadır. Dış hatlar ve landmark verisi arasındaki bu benzerlik örnekleme bulunan her birim için dış hatları belirlemek amacıyla eşit sayıda nokta kullanıldığında daha da kuvvetlenmektedir (20).

Aslında dış hatta ait noktalarının koordinatlarının içerdiği bilgi şu şekilde özetlenmektedir: Örnek noktası çevresindeki alanda bulunan dış hattın pozisyonu, kendi çevresindeki benzer noktalara göre olan pozisyonu ile ilişkilidir.

Bu ayırım çoğunlukla analiz için özel yöntemleri gerektirmekle birlikte farklı dış hat tipleri için yine farklı yöntemler mevcuttur.

## 2.4. Geometrik Morfometride Dış Hat Tabanlı Yaklaşımlar

### 2.4.1. Fourier Analizi

Geometrik morfometride dış hat ya da kontur analizi için kullanılan çoğu yöntem Fourier analizi tabanlıdır. Bu analiz ilk olarak Jean Baptiste Joseph Fourier tarafından geliştirilmiştir (15).

Bağımsız değişken üzerinde kendisini düzenli aralıklarla tekrar eden periyodik bir fonksiyonu dikkate alalım. Sağlıklı bir kalbe ait kardiogram, belirli bir zaman süresince güneş lekesi çevrimlerindeki güneş lekesi aktivitesi periyodik fonksiyonlara örnek olarak verilebilir. Çevrimin devam süresine periyot denilmekte olup T ile gösterilirse, tersi alınarak frekans hesaplanmaktadır ( $f = 1 / T$ ) (46).

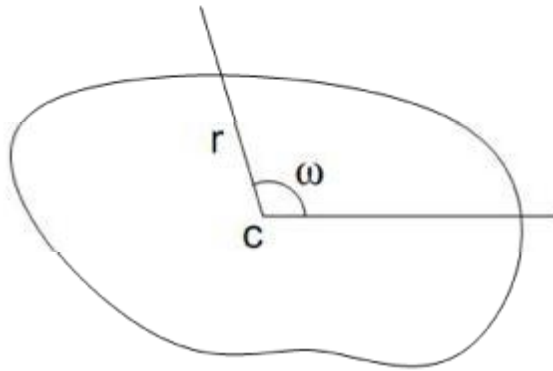
Sinüs ve kosinüs fonksiyonları ve bu fonksiyonlara uygun çarpma faktörlerinin eklenmesi ile bu tip periyodik fonksiyonlar elde edilebilir. Başka bir ifade ile periyodik fonksiyonun çözümlenmesini sağlayacak olan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonu her zaman elde edilebilir. Ayrıca ilgili sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının frekansları, orijinal fonksiyonun frekansının katı olacaktır. Her hangi bir  $g(x)$  periyodik fonksiyonuna ait  $f$  frekansı Eşitlik-1' deki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0 \cos(0 - 2\pi fx) + b_0 \sin(0 - 2\pi fx) \\ &+ a_1 \cos(1 - 2\pi fx) + b_1 \sin(1 - 2\pi fx) \\ &+ a_2 \cos(2 - 2\pi fx) + b_2 \sin(2 - 2\pi fx) \\ &+ . . . \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [a_i \cos(2\pi ifx) + b_i \sin(2\pi ifx)] \end{aligned} \quad (1)$$

Diğer taraftan periyodik bir fonksiyon, Fourier analizi kullanılarak her biri  $f$  frekansının katsayısı olacak şekilde sinüs ve kosinüs bileşenlerine (harmoniklerine) ayrılabilir (46).

### 2.4.2. Fourier Şekil Analizi

Kutupsal koordinatlar içerisinde kapalı bir dış hat, merkez gibi sabit bir içsel noktayla birlikte ilgili açının fonksiyonuna benzer bir şekilde yarıçapıyla ifade edilebilir. Bu fonksiyon kutupsal vektörün her dönüşünde tekrar ettiği için periyodik bir fonksiyondur. Fourier analizi ile periyodik fonksiyon sinüs ve kosinüslerin harmonik formlarının içinde bulunduğu daha basit harmonik bileşenlerine ayrılabilir. Bu sayede ana şekilden keskin kenar ve çıkıntı içeren çok sayıda alt şekil elde edilebilir (46). Fourier şekil analizinin kapalı bir dış hat için kullanımına örnek olarak Şekil-8 verilmiştir (15).



**Şekil-8:**Fourier şekil analizinin temeli. Kapalı dış hat  $\omega$  açısının fonksiyonu olarak  $r$  ile ifade edilmektedir. Merkez

, şekilde  $c$  ile belirtilmiş olup koordinat sisteminin merkezini göstermektedir.  $r(\omega)$  fonksiyonu  $2\pi$  periyotlu periyodik bir fonksiyondur (15).

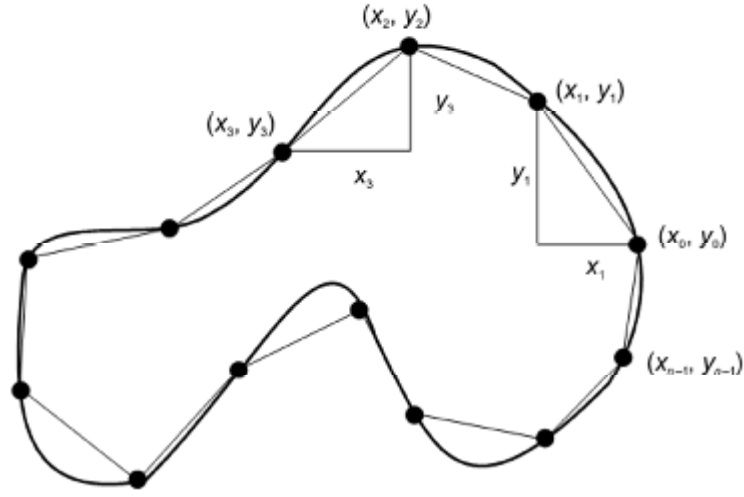
Çok sayıda sayısallaştırılmış noktadan oluşan veri setininin, şekilleri tanımlayan daha az sayıda parametreye indirgenmesi, morfo-uzayda Fourier katsayıları ile şekillerin dağılımı üzerinde çalışılmasına imkan vermektedir. Bununla birlikte organizmanın şekli, yapısı ya da olası formu olarak tanımlanan morfo-uzay yüksek boyutlu olarak kabul edilmektedir. (46).

### 2.4.3. Eliptik Fourier Şekil Analizi

Fourier şekil analiziyle ilgili karşılaşılan ciddi bir problem, bu analizin  $\omega$  açısına ait fonksiyonun tek değerli yarıçapını kullanıyor olmasıdır. Bu durumda, dış hat üzerindeki her hangi bir noktaya bir doğru kullanarak çizebileceğimiz sabit bir içsel nokta olmayacaktır. Fourier analizi bu gibi şekillerin analizinde başarısız olmaktadır (46). Bu problem, Fourier şekil analizi için kullanılan daha ileri tekniklerle çözülmektedir.

Öncelikle yarıçap  $\omega$  açısının değil, dış hat üzerinde belirlenen bir başlangıç noktasından itibaren dış hattın çevresine ait uzunluğun bir fonksiyonu olarak kabul edilir. Çevre uzunluğuna dayalı Fourier şekil analizi basit ve uygulanış açısından cazip olmasına rağmen çok fazla kullanılmamaktadır (46).

Fourier şekil analizinin en yaygın kullanılan formu Eliptik Fourier analizdir (EPA) (47). Bu yöntem dış hat üzerinde çok sayıda eşit aralıklı nokta elde edilerek yürütülmektedir. Dış hat çevresinde belirli bir noktadan başlayıp ilerlerken x ve y artışları elde edilir. Bu artışlar, iki adet periyodik fonksiyonu tanımlamakta olup bağımsız olarak Fourier analizi ile ilişkilidirler (46). Eliptik Fourier şekil analizinin kapalı bir dış hat için kullanımına örnek olarak Şekil-9 verilmiştir (15).



**Şekil-9:** Kapalı dış hattın eliptik Fourier analizi. Dış hat 13 adet noktanın düzenli aralıklarla yerleştirilmesi ile oluşturulmuştur. Saat yönünün tersi şekilde x ve y doğrultusundaki artışlar iki adet periyodik fonksiyonu tanımlamaktadır (15).

Yöntemin esastaki temel fikir; sayısallaştırılmış noktalar ile tanımlanan yüksek boyutlu şekil uzayının, şekil ile alakalı bilginin en yüksek düzeyde olduğu daha düşük boyutlu şekil uzayına indirgenmesidir.

Eliptik Fourier analizinin diğer bir türünde ise artışlar kartezyen koordinatlar yerine kutupsal koordinatlarda olmaktadır. Artışların açısall yönleri periyodik fonksiyon olup, artışların sabit uzunluğu ölçekleme faktörü olarak alınmaktadır. Bu analize de Tanjant Fourier analizi denilmektedir (46).

#### 2.4.4. Öz Şekil Analizi

Öz şekiller, şekiller kümesinin temel bileşenleridir (48). Orijinal şekiller öz şekillerin doğrusal kombinasyonları olarak ifade edilebilir ve temel bileşenler analizine ait dağılım grafiğinde gösterilebilirler. Ayrıca, öz şekillerin kendileri de çizilebilmekte olup ölçekleme altındaki değişkenlikleri temel bileşen eksenlerinin geometrik anlamını ortaya çıkarmaktadır (15).

Öz şekil analizi farklı yollarla yürütülebilmekte olup en yaygın prosedür şu şekildedir:

- i. Dış hat, eşit aralıklı noktaların konumlandırılması ile oluşturulur,
- ii. Tanjant Fourier analizine benzer şekilde dönüş açısı her bir artış için belirlenir,
- iii. Her şekil kovaryans matrisi tabanlı olan çok boyutlu vektör ile ifade edilir ve bu vektörler temel bileşenler analizi ile ilişkilidirler.

Fourier yöntemlerinin aksine, öz şekil analizi açık eğriler için de kullanılabilir (15).

#### 2.5. Geometrik Morfometride Landmark Tabanlı Yaklaşımlar

Landmark verilerinin analizi için farklı morfometrik algoritmalar mevcuttur. Bu yöntemlerin tamamı aynı satır verisini kullanmaktadır (iki ya da üç boyutta landmarkların koordinat değerleri). Satır verileri içindeki bilgi farklı algoritmalar ile farklı yollarda düzenlenmektedir. Bazı yöntemlerde yardımcı giriş (yumuşatma fonksiyonu, türdeşlik fonksiyonu ya da kayıp fonksiyonunda – minimizasyon kriteri formunda) analitik prosedürün bir parçasıdır. Morfolojik farklılıkların farklı yönleri, farklı yöntemlerle belirtilmektedir (49).

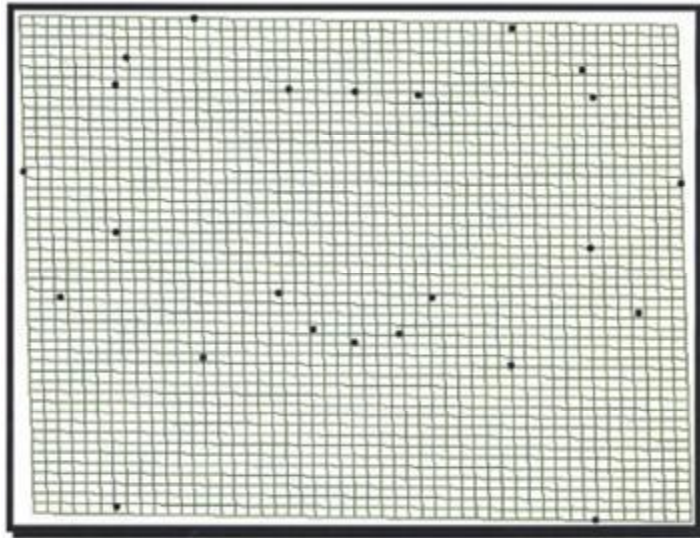
Landmark koordinat verilerini analiz etmek için morfometrik yöntemlerin iki genel sınıfı kullanılabilir: Koordinat tabanlı yaklaşımlar ve koordinattan bağımsız yaklaşımlar. Koordinat tabanlı yaklaşımlarda koordinat ekseninin seçimi keyfidir. Bilgide değişim ve kayıp olmaksızın sonuçlar herhangi bir koordinat sistemine göre döndürülebilir ve koordinat sistemi analitik mekanizmanın önemli bir parçasıdır. Koordinattan bağımsız yöntemler, form farklılığını referans formdan hedef forma deformasyon olarak ya da iki formun süperimpozisyonundan elde edilen uygunluk olarak ölçmektedir (49).

İzleyen bölümde verilen landmark tabanlı yaklaşımlara bu sınıflamaya uygun olarak yer verilecektir.

### 2.5.1. İnce Levha Eğri Analizi (Thin Plate Spline Analysis – TPS)

TPS' in morfolojide kullanılmak üzere uyarlanması Bookstein tarafından önerilmiştir (44, 50). TPS, şekle ait haritalamayı göstermek için interpolasyon fonksiyonunu kullanmaktadır. Bu sayede landmark çiftleri arasındaki benzerlik modellenmektedir. İnterpolant yani ara değerlendirme, temel olarak landmark kümesine uydurulmuş düzgün fonksiyon olarak tanımlanmaktadır (51). Bükme enerjisi (bending energy) olarak da bilinen TPS fonksiyonu, landmarkların kümesinin üzerine kaplayan son derece ince bir levhanın görselleştirilmiş halidir. Metal levhanın yüzeyi her bir landmarkın ikili yer değişimini deformasyon olarak göstermektedir (50). Her bir landmark üzerinde yükseklik, formlar arasındaki farklara eşittir (49). Eğer iki form benzer ise bükme enerjisi sıfıra eşittir ve levha düzdür. Büyüklük ve bükme enerjisinin konumu levhanın deformasyonunun pozisyonu ve büyüklüğüne bağlı olarak tanımlanabilir (51).

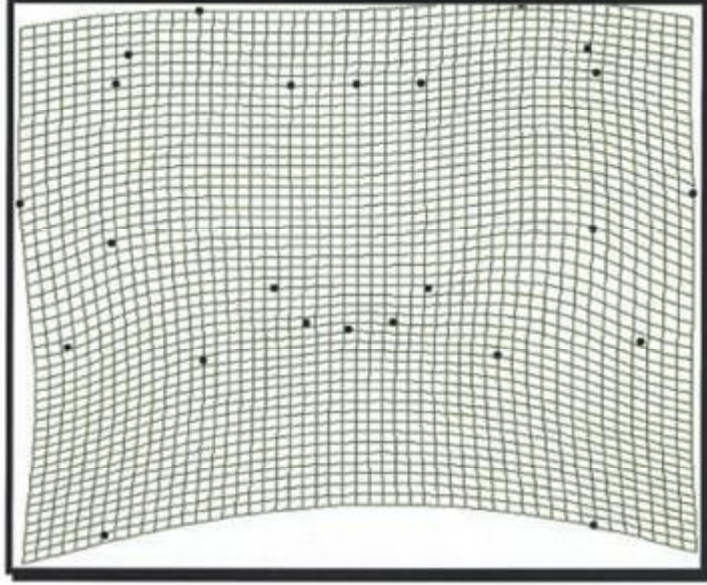
Toplam eğri, kayıttan bağımsız morfo-uzayda deformasyonun vektörlerini göstermektedir. Bu deformasyon afin ve afin olmayan dönüşümlerine ayrılabilir. Afin dönüşüm büyüklük farkları, rotasyon ve düzgün şekil değişiminden kaynaklanan değişimleri betimlemektedir. Eğer formlar düzgün olarak ölçeklenirse büyüklükle ilişkili afin dönüşümler oluşmamaktadır. Afin dönüşümün bükme enerjisi, levhanın yan yatması durumunda sıfıra eşit olmaktadır (Şekil-10).



Şekil-10: Afin dönüşüm (51).



Afin olmayan dönüşümler (Şekil-11) ise düzgün olmayan ya da lokal deformasyonları göstermektedir. Bunlar daha sonra kısmi warplar ile belirtilen lokalize bileşenlerine ayrılabilirler (51).



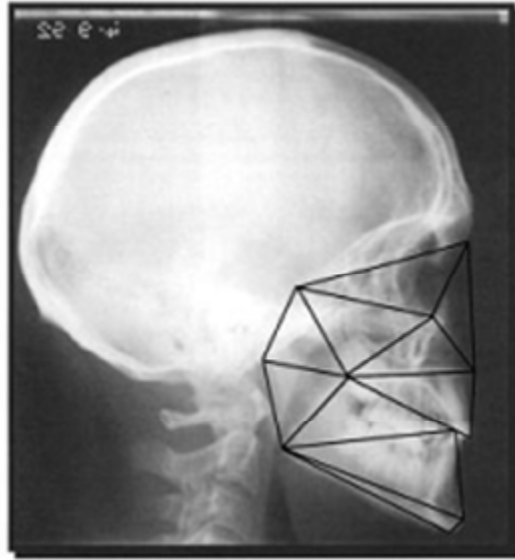
**Şekil-11:** Afin olmayan dönüşüm (51).

Tüm eğriye göre her bir kısmi warpın sistematik karşılaştırması, her bir warpın test edilen morfolojiye katkısını göstermektedir. Her bir kısmi warpın afin olmayan bileşene katkısı özdeğer, büyüklük ve bükme enerjisi ile belirtilmektedir. Tüm landmark konfigürasyonunu etkileyen şekil değişimiyle ilgili yüksek büyüklükler, lokalize dönüşümler ile ilişkili yüksek özdeğerleri göstermektedir. Bükme enerjisi metal levhanın bükülmesinin miktarını göstermektedir. Bu enerji, lokalize dönüşümler için genel değişimlere göre daha büyüktür. Şekil değişimleri kısmi warp skorlarının matrisleri üzerine temellenen çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin kullanılması ile istatistiksel olarak test edilebilir (52).

TPS prosedürü formlar arasındaki morfolojik değişimin sunumu için görsel olarak oldukça cazip bir gösterimdir. Buna karşılık, TPS matematiksel tabanlı bir ürün olduğu için eğri fonksiyonunun seçiminin biyolojik veriler ile ilgilenildiğinde matematiksel özelliklerden ziyade biyolojik modele de bağlı olduğu belirtilmektedir (53).

## 2.5.2. Sonlu Eleman Morfometrisi / Ölçekleme Analizi (Finite element morphometry/scaling analysis – FEM / FESA)

FEM / FESA morfometride kullanılmak için mühendislik modelinden geliştirilmiştir. Sonlu eleman analizi (ölçekleme olmadan) sürekli ortamlar mekaniğinde, mekanik sistemde güçlerin davranışının örüntüsünden kaynaklanan deformasyonu tahmin etmek için kullanılmaktadır. Biyolojik morfometride FEM, hipotetik güçlerin gösterdiği deformasyonları hesaplamak için kullanılır (54). İki landmark konfigürasyonuna ait formlar uygun dört yüzlü, altı yüzlü ve sekiz yüzlü üçgenlere bölünmekte olup bunlara sonlu elemanlar denilmektedir (51). Şekil-12, her biri landmarklar ile oluşan sonlu eleman sınırlarını içermektedir.



Şekil-12: FEM için sonlu eleman ayrıştırması (51).

Referans ve hedef formlara ait sonlu elemanların deformasyonunun nicel ifadesi şekil değişiminin nümerik bir ifadesini sağlamaktadır (55). Bu çıktı; büyüklük oranı, şekil oranı ve her bir eleman için maksimum deformasyon değerinin açısı olarak ifade edilebilmektedir (56). Sonlu elemanların içlerinin, tanımladıkları landmarklar ile ilişkili olarak düzgün deforme oldukları varsayılmaktadır. FEM bu sorunun üstesinden deformasyonların her bir noktada değerlendirilmesine imkan vererek gelmektedir (57). Bu nedenle FEM hassas bir morfometrik tekniktir. Bununla birlikte elde edilen landmarklar arası bilginin her hangi bir interpolasyon yöntemi ile doğrulanması güvenilir değildir. Bu nedenle interpolasyon kullanılmadığında ve sadece spesifik landmarklardan elde edilen üçgenler değerlendirildiğinde analiz anamlılığı artmaktadır. FEM’ de yerel büyüklüğün

miktarı, şekil değişimleri ve genel morfolojik farklılıklara olan katkılar renkli bir spektrum ve kalibrasyon eksenini ile görüntülenebilir (58).

FEM, üçgeni form ölçüsü için temel birim olarak kullanılmaktadır. Değişmez olduğu için FEM’de cebirsel sınırlamalar aşılmıştır. FEM her bir formdan elde edilen ölçümlerin kümesini karşılaştırmaz. Sadece bir nesnenin diğer nesneye deformasyonu sonucu ortaya çıkan gerginliği ölçmektedir. Bir başka ifade ile FEM incelenen yapının her yönde ve her bir landmarkta şekil değişimini tahmin edebilmektedir (51).

### 2.5.3. Procrustes Analizi

Procrustes analizi, istatistiksel şekil analizinde landmarklar arasındaki kareli uzaklıkların toplamını minimum yapan yaklaşım olarak bilinmektedir. Procrustes analizi; en küçük kareler tekniklerini kullanarak, Öklid uzaklığına göre benzerlik dönüşümleri (öteleme, ölçekleme, döndürme) altında konfigürasyonları olabildiğince yakın olarak eşleştirmeyi amaçlamaktadır (2).

Procrustes analizinin, Genelleştirilmiş Procrustes analizi (Generalized Procrustes Analysis - GPA) ve sıradan Procrustes analizi (Ordinary Procrustes analysis – SPA) olmak üzere iki çeşidi olup, GPA; öteleme, döndürme ve ölçekleme ile en az iki nesneyi superimpoze ederken, SPA ise yine benzerlik dönüşümleri kümesinin tamamını kullanarak bir nesneyi diğerinin üzerine superimpoze etmektedir. SPA nesnelerin sırasına göre simetrik olmamakla birlikte, GPA nesnelerin sırasına göre değişmezdir (2).

Procrustes ortalama şekli ise Procrustes metodu ile süperimpoze edilmiş şekillerin konfigürasyonlarının aritmetik ortalaması kullanılarak hesaplanır (2). Ayrıca Procrustes ortalama şekli, standartlaştırılmış verilerin kareli toplamları ve çarpımları matrisinin en önemli özvektörüdür (49, 59).

“Procrustes analizi” terimi ilk kez faktör analizinde Hurley ve Cattell tarafından 1962’de kullanılmıştır (2). Sibson, Procrustes metotları üzerine yaptığı çalışmalar sonucunda, Procrustes analizinin faktör analizi için bulunduğunu ancak sonraları çok değişkenli ölçeklemede kullanılarak şekil ve görüntü analizinde yararlı bir araç haline geldiğini belirtmiştir (60). Şekil analizinde Procrustes metodu, veri kümesinin ortalama şeklinin tahminlenmesinde ve veri kümesindeki şekillerin karşılaştırılmasında kullanılmaktadır (2).

### 2.5.3.1. Şekil Uzaklığı ve Procrustes Eşlemesi

$y^*$ ,  $y'$  nin kompleks eşleniği ve  $y^* 1_k = 0 = w^* 1_k$  olmak üzere  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$  ve  $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T \in \mathbb{C}^k$  da iki adet merkezleştirilmiş konfigürasyon olsun. Şekillerin konfigürasyonlarının karşılaştırılması için iki şekil arasındaki uzaklığın ölçüsünün belirlenmesi gerekmektedir (2).

Bu doğrultuda uygun olan prosedür, benzerlik dönüşümleriyle birlikte  $w$  ve  $y$  arasındaki şekil farklılığının büyüklüğünü gösteren gözlenen ve uyarlanmış  $y$  arasındaki farkları kullanmaktır. Kompleks regresyon denklemi Eşitlik-2' de verilmiştir.

$$\begin{aligned} y &= (a + ib)1_k + \beta e^{i\theta} w + \varepsilon \\ &= [1_k, w]A + \varepsilon \\ &= X_D A + \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Eşitlik-2' de verilen denklemde,  $A = (A_1, A_2)^T = (a + ib, \beta e^{i\theta})^T$ , öteleme  $(a + ib)$ , ölçekleme  $(\beta > 0)$  ve döndürme  $(0 \leq \theta < 2\pi)$  ile  $2 \times 1$ ' lik kompleks parametreler olup  $\varepsilon$ ,  $k \times 1$ ' lik hata vektörü ve  $X_D = [1_k, w]$ ,  $k \times 2$ ' lik tasarım matrisidir (2).

Süperimpozisyonu gerçekleştirmek için, en küçük kareler fonksiyonu minimum yapılarak  $A$  tahmin edilmelidir. Hataların kareli toplamı Eşitlik-3' de verilmiştir.

$$D^2(y, w) = \varepsilon^* \varepsilon = (y - X_D A)^* (y - X_D A) \quad (3)$$

$w'$  nin  $y$  üzerine tam Procrustes süperimpozisyonu  $A'$  nın  $\hat{A}$  ile tahmin edilmesi ile elde edilebilir. Bu ifade Eşitlik-4' de gösterilmiştir.

$$\hat{A} = (\hat{a} + i\hat{b}, \hat{\beta} e^{i\hat{\theta}})^T = \operatorname{arginf} \varepsilon^* \varepsilon = \operatorname{arginf} (y - X_D A)^* (y - X_D A) \quad (4)$$

### 2.5.3.2. Süperimpozisyon

**Tanım 1:**  $w'$  nin  $y$  üzerine süperimpozisyonu

$(\hat{\beta}, \hat{\theta}, \hat{a}, \hat{b})$  değerleri  $D^2(y, w) = \|y - w\beta e^{i\theta} - (a + ib)1_k\|^2$  eşitliğini minimum yapmak üzere seçildiğinde  $w'$  nin  $y$  üzerine süperimpozisyonu Eşitlik-5' de verilmiştir (2).

$$w^P = X_D \hat{A} = (\hat{a} + i\hat{b})1_k + \hat{\beta}e^{i\hat{\theta}}w \quad (5)$$

**Sonuç 1:** Süperimpozisyon eşleme parametreleri

$$\hat{a} + i\hat{b} = 0 \quad (6)$$

$$\hat{\theta} = \arg(w^*y) = -\arg(y^*w) \quad (7)$$

$$\hat{\beta} = (w^*yy^*w)^{1/2} / (w^*w) \quad (8)$$

**Kanıt 1:** Eşitlik-9, 10 ve 11 ifadeleri minimize edilmek istenmektedir

$$D^2 = \varepsilon^* \varepsilon \quad (9)$$

$$= \left\| y - w\beta e^{i\theta} - (a + ib)1_k \right\|^2 \quad (10)$$

$$= y^*y + \beta^2 w^*w - y^*w\beta e^{i\theta} - w^*y\beta e^{-i\theta} + k(a^2 + b^2) \quad (11)$$

Verilen eşitliklerde  $w$  ve  $y$  merkezleştirilmiş olup  $a$  ve  $b$ ' nin minimum değerleri sıfıra eşittir (2).

$y^*w = \gamma e^{i\theta}$  ( $\gamma \geq 0$ ) olduğunda Eşitlik-12 sağlanmaktadır.

$$\beta(y^*we^{i\theta} + w^*ye^{-i\theta}) = \beta(\gamma e^{i(\theta+\phi)} + \gamma e^{-i(\theta+\phi)}) = 2\beta\gamma \cos(\theta + \gamma) \quad (12)$$

$\left\| y - \beta e^{i\theta}w \right\|^2$  ifadesini  $\theta$  üzerinden minimize etmek için Eşitlik-12' de verilen  $2\beta\gamma \cos(\theta + \gamma)$  ifadesinin maksimize edilmesi gerekmektedir.  $\theta$  için çözüm  $\hat{\theta} = -\phi = -\arg(y^*w)$  eşitliğidir. En küçük ölçeklemeyi bulmak için  $\gamma = |y^*w|$  olmak üzere Eşitlik-13' ün çözülmesi gerekmektedir.

$$\frac{\partial D^2}{\partial \beta} = 0 = 2\beta w^*w - 2\gamma \quad (13)$$

Sonuç olarak  $\hat{\beta} = |y^*w| / (w^*w)$  eşitliği elde edilmektedir (2).

### 2.5.3.3. Tam Procrustes Uzaklığı

$w$  ve  $y$  kompleks konfigürasyonları arasındaki tam Procrustes uzaklığı Eşitlik–14 ve Eşitlik–15’ de verilmiştir.

$$d_F(w, y) = \inf_{\beta, \theta, a, b} \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{w}{\|w\|} \beta e^{i\theta} - a - ib \right\| \quad (14)$$

$$= \left\{ 1 - \frac{y^* w w^* y}{w^* w y^* y} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

İki konfigürasyon arasındaki uzaklık tanımlanırken “tam” teriminin kullanılmasının nedeni, eşlemede tüm Öklid benzerlik dönüşümleri kümesinin (öteleme, ölçekleme ve döndürme) kullanılmasıdır. Fakat  $y$  ve  $w$ ’ nin birim büyüklüğe ölçeklendiği unutulmamalıdır.  $w$ ’ nin  $y$  üzerindeki tam süperimpozisyonu yine  $y$ ’ nin  $w$  üzerindeki kompleks doğrusal regresyonu ile elde edilir (2).

Procrustes teriminin kullanılmasının sebebi ise yukarıdaki eşleme işlemlerinin, çok değişkenli analizde dönüşümlere bağlı matrislerin karşılaştırılmasında sık kullanılan bir teknik olan Procrustes analizine özdeş olmasıdır. Procrustes analizinde en uygun dönüşüm parametreleri en küçük kareler yöntemiyle tahminlenmiştir (2).

### 2.5.3.4. Ortalama Şeklin Tahmin Edilmesi

Ortalama şeklin tahmininin elde edilmek istendiği bir çok durum söz konusudur. Bu alt bölümde popülasyona ait ortalama şeklin tahmini için geçerli bir yöntem verilmiştir (2).

$\gamma_i \in C$  öteleme vektörleri,  $\beta_i \in IR^+$  ölçekleme parametreleri,  $0 \leq \theta < 2\pi$  döndürme açısı,  $\varepsilon_i \in C$  bağımsız sıfır ortalamalı kompleks rassal hatalar ve  $\mu$  popülasyona ait ortalama konfigürasyon olmak üzere  $w_1, w_2, \dots, w_n$  konfigürasyonlarının rassal örnekleme Eşitlik–16’ da verilen pertürbasyon modelinden elde edilir (2).

$$w_i = \gamma_i 1_k + \beta_i e^{i\theta_i} (\mu + \varepsilon_i), \quad i=1, \dots, n \quad (16)$$

**Tanım 2:** Ortalama şeklin tam Procrustes tahmini  $[\hat{\mu}]$ , her bir konfigürasyondan birim büyüklükte bilinmeyen ortalama konfigürasyon olan  $\mu$  ye tam Procrustes uzaklıklarının kareleri toplamının minimum yapılmasıyla elde edilir.

$$[\hat{\mu}] = \arg \inf_{\mu} \sum_{i=1}^n d_F^2(w_i, \mu) \quad (17)$$

Genellikle terminolojiyi kısaltmak amacıyla “ortalama şeklin tam Procrustes tahmini” yerine “tam Procrustes ortalaması” ifadesi kullanılmaktadır. Tam Procrustes ortalaması ortalama şeklin örneklem tahminidir (2).

$w_1, w_2, \dots, w_n$  konfigürasyonlarının merkezleştirilmiş olduğu varsayılınsın bu durumda  $w^* 1_k = 0$  olur (2).

**Sonuç 2:**  $z_i = w_i / \|w_i\|$ ,  $i = 1, \dots, n$  ' e kadar ön şekilleri göstermek üzere, tam Procrustes ortalama şekli olan  $[\hat{\mu}]$  kareler ve ürünler matrisinin kompleks toplamının en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör olarak bulunmaktadır.

$$S = \sum_{i=1}^n w_i w_i^* / (w_i^* w_i) = \sum_{i=1}^n z_i z_i^* \quad (18)$$

**Kanıt 2:** Eşitlik–19’da verilen ifade minimize edilmek istenmektedir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_F^2(w_i, \mu) &= \sum_{i=1}^n \left\{ 1 - \frac{\mu^* w_i w_i^* \mu}{w_i^* w_i \mu^* \mu} \right\} \\ &= n - \mu^* S \mu / (\mu^* \mu) \end{aligned} \quad (19)$$

Sonuç olarak Eşitlik–20’ de verilen ifade elde edilmektedir.

$$\hat{\mu} = \arg \sup_{\|\mu\|=1} \mu^* S \mu \quad (20)$$

$\hat{\mu}$  , S’ nin en büyük özdeğerine karşılık gelen kompleks özvektörü olarak tanımlanmaktadır.

Her bir  $w_i^P$  ,  $w_i$ ’ nin  $\hat{\mu}$  üzerinde tam Procrustes uyarlaması olduğunda,  $w_1, w_2, \dots, w_n$  için süperimpozisyonları ya da Procrustes koordinatları Eşitlik–21’ de tanımlanmaktadır (2).

$$w_i^P = w_i^* \hat{\mu} w_i / (w_i^* w_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

Tam procrustes ortalama şekli, tam procrustes koordinatlarının aritmetik ortalaması alınarak elde edilebilir.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^P$  ifadesi, Procrustes ortalama şekli olan  $[\hat{\mu}]$  ile aynı şekle sahiptir. Şekil değişkenliğinin incelenmesinde kullanılan Procrustes artıkları ise Eşitlik-22' de verilmiştir (2).

$$r_i = w_i^P - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^P \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

**Tanım 3:** Şekil değişkenliğinin genel bir ölçüsünün elde edilebilmesi için her bir konfigürasyondan tam Procrustes ortalamasına olan uzaklıkların karelerinin toplamının ortalamasının karekökü (Root mean square) alınır ve Eşitlik-23 elde edilir.

$$RMS(d_F) = \sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n d_F^2(w_i, \hat{\mu})} \quad (23)$$

Eşitlik-23'de verilen ifade de  $[\hat{\mu}]$ , Procrustes ortalama şeklini  $w_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) ise kompleks konfigürasyonu göstermektedir.

## 2.6. Şekil Koordinat Sistemleri

Nesnenin şeklinin tanımlanabilmesi için koordinat sisteminin belirlenmesine ihtiyaç vardır. Şekil için koordinat sisteminin uygun bir seçimi; konfigürasyonun öteleme, ölçekleme ve döndürülmesi altında değişmez olacaktır (2). Şekil analizinde kullanılan koordinat sistemleri başlıklar halinde aşağıda verilmiştir.

- Uzunlukların açıları ve oranları
- Bookstein koordinatları: Düzlemsel durum
- Kendall koordinatları
- Kendall'ın küresel koordinatları
- Watson'ın üçgen koordinatları
- Tanjant uzayı koordinatları
- Kent'in kutupsal koordinatları
- Üç boyutlu veri için Bookstein koordinatları
- Goodall-Mardia QR şekil koordinatları

Çalışmada şekil uzayı olarak tanjant uzayı koordinat sistemi kullanılacağından izleyen bölümde bu konuya ait bilgiler verilecektir.

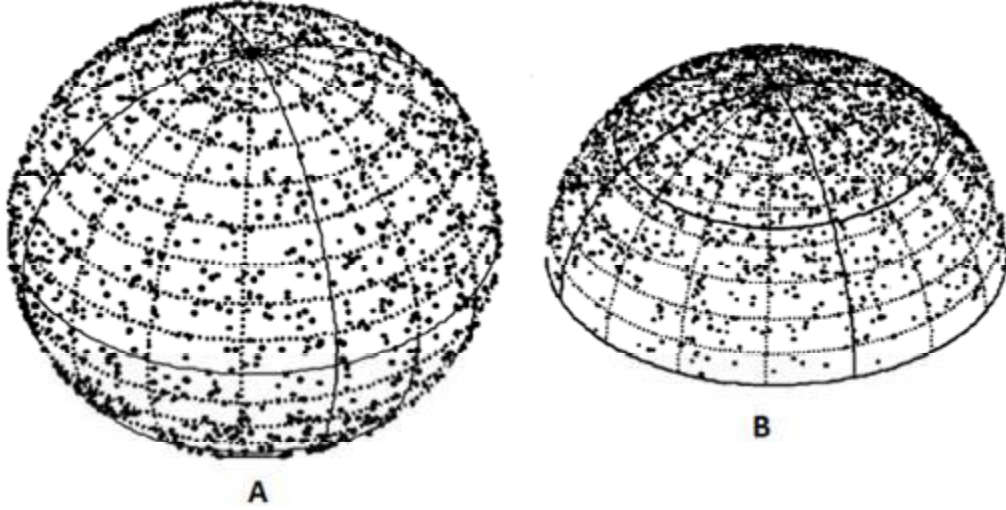


### 2.6.1. Tanjant Uzayı

Şekil uzayı, figür uzayında aynı sayıda landmark ve boyutla verilen landmark konfigürasyonları için tüm olası şekillerin kümesidir (61). Şekil uzayında figüre ait şekil tek bir nokta ile belirtilmektedir. Şekil uzayı, iki boyutlu koordinat verisi için  $k$  landmark sayısını göstermek üzere  $2k - 4$  ( $=2k - 2 - 1 - 1$ ) ve üç boyutlu koordinat verisi için  $3k - 7$  ( $=3k - 3 - 3 - 1$ ) boyutundadır (4, 54).

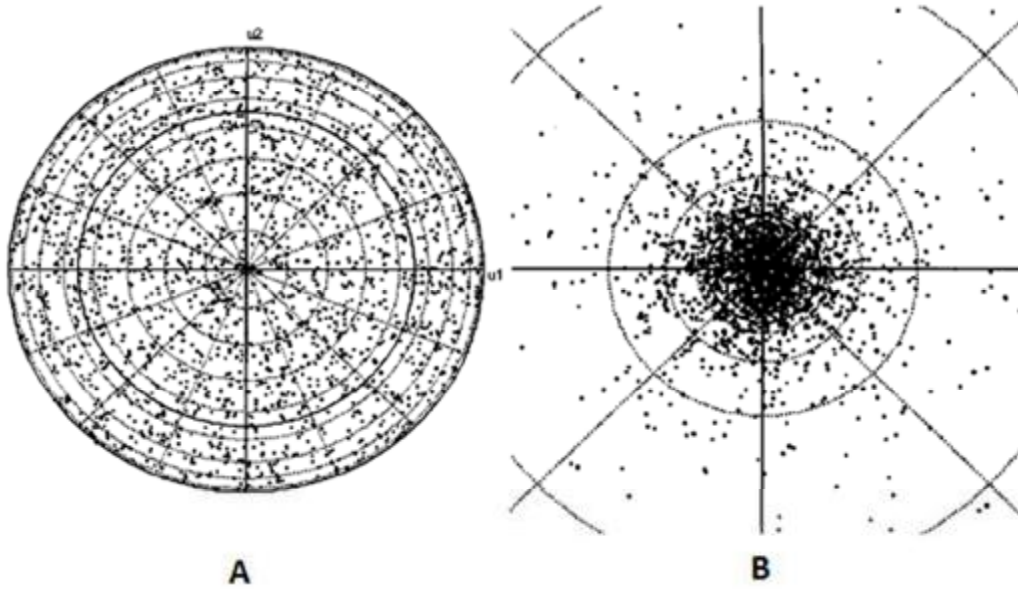
Manifold, üç ya da daha fazla boyut ile genelleştirilmiş eğri uzayı olarak tanımlanmaktadır (61). Kendall (40, 62), Procrustes metriğine karşılık gelen şekil uzayının  $kp - k - 1 - k(k - 1)$  boyutlu manifold olduğunu göstermiştir. Slice ve arkadaşları (54) geometrik morfometrinin altında yatan temel geometrik yapının Kendall şekil uzayı olduğunu belirtmiştir.

Kendall şekil uzayı, landmarklar arasındaki Procrustes uzaklıklarının analizi için tam bir geometrik uyarlama sağlamaktadır (54). İki ve üç boyutlu landmarklara ait Öklid olmayan Kendall uzayının geometrisini incelemek için geleneksel çok değişkenli yöntemlerden ziyade özel istatistiksel yöntemlere gereksinim vardır (3). Şekildeki değişkenlik yeterince küçük olduğunda, şekil uzayına doğrusal bir yaklaşım yapılabilen bu da standart çok değişkenli yöntemlerin kullanılmasına olanak vermektedir (63). Kendall şekil uzayına örnek olarak Şekil-13 verilmiştir. Şekil-13'de verilen şekil uzayı eğriseldir ve Öklid değildir. Bu nedenle özel istatistiksel yöntemlerin kullanılması gerekmektedir. Goodall (64), Kendall'ın tanımladığı şekil uzayını incelemek amacıyla kareli Procrustes değme uzaklıklarının (Procrustes chord distances) üzerine temellenen istatistiksel bir yöntem geliştirmiştir.



**Şekil-13:** Düzlemdeki üçgenler için şekil uzayları. **A:** Üçgenler için Kendall'ın şekil uzayı (Noktalar küre yüzeyi üzerinde bulunan 2000 adet rassal üçgenin pozisyonlarına karşılık gelmektedir). **B:** Referans şekle göre hizalanmış şekillerin uzayı (Yarım küre üzerindeki noktalar aynı 2000 adet üçgenden oluşan örnekleme karşılık gelmektedir) (4).

Tanjant uzayı ise Öklid olmayan Kendall uzayına bir Öklid yaklaşımıdır. Kendall uzayından nesnelerin doğrusal vektör uzayı üzerine iz düşümleri alınmakta ve bu vektör uzayı şekil uzayına teğet olmaktadır (Şekil-14).



**Şekil-14:** Tanjant uzayları. **A:** Şekil – 13B de verilen referans şekle göre hizalanmış ön şekillerin genelleştirilmiş en küçük kareler Procrustes süperimpozisyonunun uzayının dikey yansıması. **B:** Şekil – 13A da Kendall şekil uzayının stereografik yansıması (kürenin düzlem üzerine yansıtılması). Merkez referansa ya da teğet noktasına karşılık gelmekte olup Şekil – 13A da verilen kuzey ucu noktası sonsuz olmaktadır (4).

Tanjant uzayı, referans konfigürasyonun şekline karşılık gelen noktada Kendall şekil uzayına teğet olan doğrusal vektör uzayıdır. Referans şekil genellikle örnekleme şeklinlere ait ortalama şekil olarak alınmaktadır (54). Eğer şekildeki değişkenlik küçük ise tanjant uzayındaki Öklid uzaklıkları Kendall şekil uzayındaki Procrustes uzaklıklarına yakınsamak için kullanılabilir (2, 54). Ayrıca tanjant uzayı doğrusal olduğundan şekildeki değişkenlikle ilgili çalışmak için geleneksel istatistiksel yöntemlerde kullanılabilir.

### 2.6.2. Şekil Değişkenliği ve Tanjant Koordinatları

Ortalama konfigürasyon elde edildikten sonra, örneklem içindeki şekil değişkenliğinin yapısı belirlenmek istenmektedir. Bu doğrultuda kullanılacak uygun bir yöntem doğrusallaştırılmış uzayda yani tanjant uzayında ortalama şekli incelemektir. Örneğin Procrustes artıklarının (yaklaşık tanjant koordinatları) temel bileşenler analizinde tanjant koordinatlarının reel vektörleri  $v_i = 1, 2, \dots, n$  ile gösterilmekte olup, bu koordinatlar  $(r_i)$  ile gösterilen Procrustes artıklarına karşılık gelmektedir.

$\bar{v}_i = \frac{1}{n} \sum v_i$  olmak üzere, tanjant koordinatlarının  $(v_i = 1, 2, \dots, n)$  örneklem kovaryans matrisi  $S_v$  Eşitlik-24' de verilmiştir.

$$S_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(v_i - \bar{v})^T \quad (24)$$

$p = \min(n - 1, M)$  temel bileşen sayısını ve  $M = 2k - 4$  şekil uzayının boyutunu göstermek üzere,  $S_v$ 'nin  $\gamma_j$  ile gösterilen ortonormal vektörleri yine  $S_v$ 'nin temel bileşenleri olup Eşitlik-25' de verilen özdeğerlere karşılık gelmektedir.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 \quad (25)$$

$j$ . temel bileşen üzerindeki  $i$ . birim için temel bileşen skoru Eşitlik-26' daki gibi gösterilmektedir.

$$s_{ij} = \gamma_j^T (v_i - \bar{v}), \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p \quad (26)$$

Tanjant uzayındaki verinin temel bileşen özeti ise Eşitlik-27' de verilmiştir.

$$v_i = \bar{v} + \sum_{j=1}^p s_{ij} \gamma_j \quad i = 1, \dots, n \quad (27)$$

Standartlaştırılmış temel bileşen skorları ve  $j$ . temel bileşen ( $j = 1, \dots, p$ ) tarafından açıklanan değişkenliğin yüzdesi sırasıyla Eşitlik–28 ve Eşitlik–29’ da verilmiştir.

$$c_{ij} = s_{ij} / \lambda_j^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p \quad (28)$$

$$\frac{100\lambda_j}{\sum_{j=1}^p \lambda_j} \quad (29)$$

## 2.7. İstatistiksel Şekil Analizinde İki Örneklem Ait Şekil Ortalamalarının Karşılaştırmasında Kullanılan Testler

Bu bölümde istatistiksel şekil analizi literatüründe, iki örneklem ait şekil ortalamalarını karşılaştırmak amacıyla kullanılan testlere yer verilmiştir. Çalışmamızda ilgili testlerin klasik versiyonlarına ek olarak bootstrap ve permütasyon yöntemleri kullanılarak her bir teste ait bootstrap ve permütasyon versiyonları hesaplanmıştır. Bu nedenle izleyen alt bölümlerde ilgili testlere ek olarak bootstrap yöntemi ve permütasyon testi kavramlarına da yer verilmiştir.

### 2.7.1. Bootstrap Yöntemi

Populasyon hakkında çıkarsama yapmak amacıyla o populasyonu oluşturan bireyler üzerinde incelenen konu ile ilgili olarak gözlemler yapılmakta ve elde edilen bilgiden populasyon tanımlanabilmektedir. Populasyon parametresi için güvenilir bir tahminlemenin yapılabilmesi ise alınan örneğin populasyonu iyi temsil etmesiyle doğrudan ilişkilidir. Bunun için çok sayıda ve büyük veri setlerinden oluşan örneklem ihtiyacı duyulmaktadır. Diğer taraftan, geniş populasyonlara ait örnek sayısının artırılması çok fazla zaman kaybına ve masrafa neden olmaktadır.

Bootstrap yöntemi, tahmincilerin örneklem dağılımlarına ilişkin standart hatalar, güven aralıkları ve kritik değerleri türetmek için kullanılmaktadır. Mevcut veri setinden şansa bağlı olarak tekrarlı örneklemeler yapılarak, parametrelere ait yaklaşık güven aralıklarının yine bu yöntem kullanılarak tahminlenebilmektedir (65).

Bootstrap yöntemi Efron'un 1979 yılında yayımladığı makalesi ile ilk kez literatüre girmiştir. Bu alandaki teorik gelişme Freedman (1981) ve Wu (1986) ile devam etmiştir.

Daha sonraki gelişmeler ise sırasıyla Beran ve Ducharme (1991), Hall (1992), Mammen (1992), Efron ve Tibshirani (1993), Davison ve Hinkley (1997) olarak sayılabilir (66). Bootstrap yöntemi; yoğun matematik formüllerden uzak, sınırlı varsayımlara sahip, anlaşılması ve kullanılması oldukça kolay bir metottur. Özellikle, bilinen istatistiksel metotların ve varsayımların yetersiz kaldığı durumlarda bootstrap yöntemi güvenilir sonuçlar vermektedir. Bu yöntem güven aralıkları, hipotez testi ve regresyon analizinde kullanılmaktadır (67).

Bootstrap yöntemi, çok karmaşık matematiksel formüllerin çözümlenmesinde hesaplama yükünü azaltması sebebiyle de tercih edilmektedir. Ayrıca, verilerin dağılımı hakkında herhangi bir varsayım taşımamakta ve herhangi bir istatistiğin değişkenliği hakkında bilgi verebilmektedir. Bu nedenle, diğer yöntemlerin kullanımının uygun olmadığı ya da bilinen varsayımların geçersiz olduğu durumlarda Bootstrap yöntemi tercih edilmektedir. Populasyonlardan alınan örnek veri setlerine dayalı bir tahminin güvenilirliğini ortaya koymak amacıyla da bu yöntem önem taşımaktadır.

Bootstrap yöntemleri, gözlenen veri setinden yerine koyma ile yeniden örneklemeyle dayanan bir prosedürdür.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$  bilinmeyen olasılık dağılımı olan  $F$ ' den gözlemlenen rassal

örnek olsun. Her bir  $\mathbf{x}_i$  veri seti sayılardan ya da vektörlerden oluşabilir.  $\theta = T(F)$  ise ilgilenilen bilinmeyen parametre olsun (ortalama, medyan, korelasyon katsayısı vs.).

$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$  olarak ifade edilen  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  ise  $\mathbf{x}$  örnekleminde elde edilen  $\theta$ ' nın tahmini olsun.

Amacımız  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ 'in standart hatasını belirlemektir. Bootstrap,  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ ' in örnekleme dağılımının tahmini ve istatistiksel yeterliliğinin değerlendirilmesi için güçlü bir

prosedürdür.  $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$  ifadesi,  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ ' in T prosedürünün kullanılarak  $\mathbf{x}$  örnekleminde elde edilebileceğini göstermektedir. T prosedürü basit bir formül ya da bir yöntem

olabilmektedir. Her durumda, T prosedürü bilinmeyen  $\theta$  parametresi ve tahmini için aynıdır.

Önceden belirtildiği üzere bootstrap yönteminde temel fikir  $\mathbf{x}$  ile ifade edilen orijinal veri setinden yerine koyma ile yeniden örnekleme yapmak ve yeniden örneklenmiş olan veriden çıkarsama yapmaktır. Bu anlatılan işlemler aşağıda bir algoritma şeklinde verilmiştir (65):

- i.  $F, \hat{F}$  deneysel dağılımı ile tahmin edilir.

- ii. Veriden yerine koyma ile yapılan bağımsız rassal çekilişler ile  $\hat{F}$  kullanılarak  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, \dots, x_n^*)$  bootstrap örnekleme türetilir.
- iii. Bootstrap tekrarı hesaplanır  $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(x^*)$
- iv. B adet Bootstrap tekrarını elde etmek için adım 2 ve 3 gerektiği kadar tekrarlanır.

### 2.7.2. Permütasyon Testi

Bazı uygulamalarda varyans - kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımı sağlanamayabilir. Bu durumda kullanılacak olan alternatif bir prosedür permütasyon testidir (68-70). Bu prosedürde ilgilenilen yokluk hipotezi gruplara ait ortalama şekillerin eşit olduğu yönündedir. İki örneklem permütasyon testi için her bir grup içinde örneklem büyüklüğü değişmeyecek şekilde verilerin sırası değiştirilir ve test istatistiği tüm olası permütasyonların ( $T_1, T_2, \dots, T_P$ ) değerlendirilmesi ile elde edilir. Gözlenen test istatistiğinin ( $T_{göz}$ ) sırası olan r, permütasyon testine ait ilgili olasılık değerini vermek için kullanılmaktadır.

$$p = 1 - \frac{r-1}{P} \quad (30)$$

Eşitlik-30' da p-değerini elde etmek için formülasyonda P olarak gösterilen olası tüm permütasyonların sayısı kullanılmıştır. Geniş örneklem hacimleri için permütasyonların daha küçük rassal kümeleri incelenebilir (15).  $T_1$  istatistiğini elde etmek için B tane rassal permütasyon kullanılması durumunda prosedür Monte Carlo testi olarak isimlendirilmektedir. B adet rassal permütasyondan gözlenen test istatistiğinin ( $T_{göz}$ ) sırası olan r, ilgili olasılık değerini elde etmek için kullanılır (15).

$$p = 1 - \frac{r-1}{B+1} \quad (31)$$

### 2.7.3. İki Örneklem Hotelling $T^2$ Testi

İki örneklem Hotelling  $T^2$  testi, iki gruba ait şekil ortalamalarının farklılığına ilişkin alternatif hipotezi test etmek amacıyla kullanılmakta olup şekil koordinatlarına uygulanmaktadır (12).

Hotelling  $T^2$  testi çok değişkenli normal dağılıma uygunluğu ve varyans – kovaryans matrislerinin eşitliğini varsaymaktadır (15).

Ortalama vektörleri  $m_1$  ve  $m_2$  olan iki bağımsız populasyondan gelen iki adet rassal örneklem  $(x_{i1}, \dots, x_{in_i}, i = 1, 2)$  ile ilgilendiğimizi varsayalım.  $\psi$  keyfi olarak seçilmiş gerçek bir sayı olmak üzere  $H_0 : m_1 = m_2 e^{i\psi}$  hipotezini test etmek için Procrustes tanjant uzayında çift örneklem testi uygulanabilir.  $\gamma$  kutbu ile  $z$  ön şekline karşılık gelen şekil için kısmi tanjant koordinatları Eşitlik–32’ de verilmiştir.

$$v = V(e^{i\hat{\theta}} [I_{k-1} - \gamma\gamma^*]z), \quad v \in T(\gamma) \quad (32)$$

$\hat{\theta} = -\arg(\gamma^* z)$  iken  $T(\gamma)$ ,  $\gamma$  ön şeklinde tanjant düzlemini göstermektedir.  $V(\cdot)$ , gerçek ve sanal kısımların birikimli gerçek vektörünü göstermektedir.  $\gamma$  kutbu,

$S_p = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} X_{ij}^*$  olarak gösterilen baskın özvektörü ile  $\hat{m}_p$  toplanmış (pooled) tahmincisi olarak seçilir (1).

Tanjant uzayında önerilen çok değişkenli normal model  $v_i \sim N(\xi_1, \sum_1)$  iken ve  $i = 1, \dots, n_1$  için,  $w_j \sim N(\xi_2, \sum_2)$  iken  $j = 1, \dots, n_2$  olarak ifade edilmekte olup  $v_i$  ile  $w_j$  karşılıklı olarak bağımsızdırlar.  $\bar{v}, \bar{w}$  ile  $S_1, S_2$  sırası ile her bir grup için örneklem ortalamaları ve örneklem varyans - kovaryans matrislerini göstermektedir. Eğer varyans - kovaryans matrislerinin eşit olduğu varsayılırsa ( $\sum_1 = \sum_2$ ),  $\bar{v}$  ile  $\bar{w}$  arasındaki karesel Mahalonobis uzaklığı  $D^2 = (\bar{v} - \bar{w})^T S_U^+ (\bar{v} - \bar{w})$  şeklinde tanımlanmaktadır. Burada  $S_U = (n_1 S_1 + n_2 S_2) / (n_1 + n_2 - 2)$  ve  $S_U^+$ ,  $S_U$ ’ nun genelleştirilmiş Moore – Penrose tersidir (1). Yokluk hipotezi altında  $\xi_1 = \xi_2$  durumunda iki örneklem Hotelling test istatistiği Eşitlik–33’ de verilmiştir.

$$F_H = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - M - 1)}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 2)M} D^2 \quad (33)$$

Eşitlik–33’ de,  $M = 2d - 2$  düzlemsel şekil uzayının boyutunu göstermektedir. H istatistiği yokluk hipotezi altında  $F_{M, n_1+n_2-M-1}$  dağılımına sahiptir (1, 2).

#### 2.7.4. James F<sub>j</sub> Testi

Bölüm 2.7.3. de bahsedilen iki örneklem için varyans – kovaryans matrislerinin eşit olmadığı durumda alternatif prosedür olarak James tarafından önerilen J istatistiği kullanılabilir. Bu istatistik Eşitlik–34’ de verilmiştir.

$$F_J = (\bar{v} - \bar{w})^T \left( \frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2 \right)^+ (\bar{v} - \bar{w}) \quad (34)$$

J istatistiği, yokluk hipotezi altında asimptotik  $\chi^2_M$  dağılımına sahiptir.  $\Sigma_1$  ve  $\Sigma_2$  nin eşit olup olmadığına bakılmaksızın bu istatistiğin büyük değerleri için yokluk hipotezi reddedilir (1).

#### 2.7.5. İki Örneklem Goodall F Testi

İstatistiksel çıkarsama için kullanılan diğer bir yaklaşım ise karesel Procrustes uzaklıkları üzerine temellenen istatistikler ile çalışmaktır. Goodall (64), yaklaşık ki–kare dağılımını kullanarak bu yaklaşımı değerlendirmiştir. Goodall, Procrustes şekil verisinin analizi için istatistiksel bir yapı belirtmiş ve Goodall F testini geliştirmiştir. Bu test Procrustes değme uzaklığı (Procrustes chord distance) üzerine temellenmiş olup, varyansların isotropik olması varsayımı altında çalışmakta ve değişim her bir landmark için eşit olmaktadır (8).

İsotropik varyans yapısı en basit kovaryans yapısıdır. Eğer  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$  ise  $\Sigma = \sigma^2 I$  olarak ifade edilen isotropik varyans yapısı sağlanmış olur (1). İsootropik varyans yapısında varyans – kovaryans matrisinin diagonal üzerindeki elemanları yani varyans değerleri her bir landmark için aynı olup diagonal elemanları dışında kalan elemanlar sıfır değerine eşit olmaktadır. İsootropik varyans durumunda tüm landmarklar aynı varyans ile bozulmakta, pertürbe olmaktadır (45). Bu varsayımın anlamı tüm landmarkların varyanslarının aynı olmasıdır. Aynı zamanda landmarklar arasındaki yayılım yapılarının ilişkisiz olması beklenmektedir (71). İsootropik varyans yapısının görüntülenmesi oldukça kolaydır, ancak belirli biyolojik yapılara ya da popülasyonlara ait çalışmalarda bu yapı biyolojik olarak anlamlı olmayabilir (45).

$\mu$  ortalamalı lokasyon, döndürme ve ölçekleme ile dönüştürülmüş olan isotropik normal model Eşitlik–35’ de verilmiştir.



$$x_i = \beta_i(\mu + E_i)\Gamma_i + \mathbf{1}_k \gamma_i^T, \quad \text{vec}(E_i) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_{km}) \quad (35)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ , Eşitlik-35 tarafından  $\mu_1$  ortalamalı populasyondan modellenen rassal örneklem ve  $y_1, y_2, \dots, y_n$  yine Eşitlik-35 tarafından  $\mu_2$  ortalamalı populasyondan modellenen rassal örnekleme gösterebilir. İki populasyonun da ortak  $\sigma^2$  varyansına sahip olduğu varsayılmaktadır (2).

$H_0: [\mu_1] = [\mu_2] (= [\mu_0])$  hipotezine karşılık  $H_1: [\mu_1] \neq [\mu_2]$  hipotezi test edilmektedir.  $[\hat{\mu}_1]$  ve  $[\hat{\mu}_2]$  her bir örnekleme ait tam Procrustes ortalamaları olsun.  $H_0$  hipotezi altında küçük bir  $\sigma$  ile Procrustes uzaklıklarının dağılımı aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=1}^{n_1} d_F^2(X_i, \hat{\mu}_1) \sim \tau_0^2 \chi^2_{(n_1-1)M} \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} d_F^2(Y_i, \hat{\mu}_2) \sim \tau_0^2 \chi^2_{(n_2-1)M} \quad (37)$$

$$d_F^2(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) \sim \tau_0^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \chi^2_M \quad (38)$$

Eşitlik-36' da  $\tau = \sigma / \delta$  ve  $\delta_0 = S(\mu_0)$  olmak üzere  $M$ , şekil uzayının boyutunu göstermektedir. Ek olarak bu istatistikler karşılıklı olarak bağımsızdırlar (2). Bu nedenle  $H_0$  hipotezi altında Eşitlik-39' da verilen yaklaşık dağılım elde edilmektedir.

$$F_G = \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1^{-1} + n_2^{-1}} \frac{d_F^2(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)}{\sum_{i=1}^{n_1} d_F^2(X_i, \hat{\mu}_1) + \sum_{i=1}^{n_2} d_F^2(Y_i, \hat{\mu}_2)} \sim F_{M, (n_1+n_2-2)M} \quad (39)$$

$H_0$  hipotezi  $F_G$  olarak gösterilen test istatistiğinin büyük değerleri için ret edilmektedir (2). İsootropik normal model geçerli olduğunda Hotelling  $T^2$  prosedürü, Goodall'ın  $F$  testine göre daha az güçlüdür (2).

### 2.7.6. Minimum Lambda Test İstatistiği

Amaral ve ark.  $k$  örneklem için merkezi bootstrap yöntemlerini tanımlamışlardır (1). Çalışmalarında çoklu örnekleme ait test istatistiklerinin sınıfının, kesin matrisin en küçük özdeğeri ile açıklanabileceğini göstermişlerdir. Önerilen istatistik, yeni olmakla birlikte asimptotik olarak kesin olabilirlik oranı istatistiğine eşdeğerdir. İlgili test istatistiği ortak ortalama yönüne, ortalama kutup eksenine ya da populasyonlar arasındaki ortalama şekle ait yokluk hipotezi altında asimptotik ki-kare dağılımına sahip olmaktadır (1).

Gerçek ya da kompleks birim vektörlerinin belirli  $\mathbf{k}$  populasyonu için, ilgilenilen yokluk hipotezi  $\mathbf{H}_0: \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \dots = \mathbf{m}_k$  olsun. Burada  $\mathbf{m}_j$ ' ler ortalama yönleri, ortalama kutup eksenlerini ya da ortalama şekilleri göstermektedir. Bununla birlikte gerçek ortalamalı eksensel durumda yokluk hipotezi  $\mathbf{H}_0: \epsilon_1 \mathbf{m}_1 = \epsilon_2 \mathbf{m}_2 = \dots = \epsilon_k \mathbf{m}_k$  şeklinde gösterilmektedir. Gösterimde her bir  $\epsilon_j$ , diğerlerinden bağımsız olarak -1 ile +1 arasında değişen değerler alabilmektedir. Kompleks durumda ise yokluk hipotezi eksen durumunda olduğu gibi  $\epsilon_j = e^{i\Psi_j}$  ile yorumlanmalıdır ve burada  $\Psi_j$  her hangi bir gerçek değer olabilir.  $\mathbf{m}_j$ ' nin  $\epsilon_j$  ile çarpılması landmarkların döndürülmesi olarak yorumlanmaktadır. Kompleks durumda yokluk hipotezi ortalama ön şekillerden çok ortalama şekiller hakkında bir hipotez olarak oluşturulmaktadır. Yokluk hipotezinin gerçek durumda ve kompleks durumlardaki bu modifiye edilmiş yorumlanmaları  $\lambda_{\min}$  istatistiğinin değişmez özelliklerini ortaya çıkarmaktadır (1).

Şekil durumunda ( $m$ ), ön şekil olan  $m$ ' nin şeklini göstermek için kullanılmakta olup iki boyutlu şekil durumunda ( $m$ ), yine aynı  $m$  şekli ile yine ön şekillerin eşdeğer sınıfı ile  $\{e^{i\Psi_m} : \Psi \in [0, 2\pi]\}$  tanımlanmaktadır.

Gerçek durum da,  $i = 1, \dots, k$  için  $\mathbb{R}^d$  de  $\{\mathbf{X}_{ij} : j = 1, \dots, n_i\}$  ile gösterilen birim vektörlerin  $k$  örnekleme olsun.  $\hat{\mathbf{m}}_i$ ,  $i$ .örneklem üzerinden  $m_0$ ' ın tahmincisini gösterebilir.  $i = 1, \dots, k$  için  $\mathbf{G}_i$  tam ranka sahip iken,

$$n^{1/2} \hat{M}_i m_0 \xrightarrow{D} N_{d-1}(\mathbf{0}, G_i) \quad (40)$$

şeklinde gösterilmektedir ve  $\hat{\mathbf{G}}_i$ ,  $G_i$ ' nin tutarlı tahmincisidir.

$$\hat{A}_0 = n \sum_{i=1}^k \hat{M}_i^T \hat{\mathbf{G}}_i^{-1} \hat{M}_i, \quad T_0(m) = m^T \hat{A}_0 m \quad (41)$$

ve

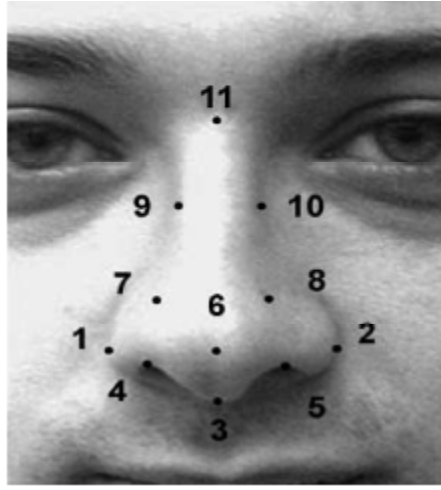
$$\lambda_{\min} \equiv \min_{\mathbf{m}: \|\mathbf{m}\|=1} T_0(\mathbf{m}) = T_0(\hat{\mathbf{m}}) \quad (42)$$

Eşitlik-42 de  $\lambda_{\min}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_0$ ' ın en küçük özdeğeri olup  $\hat{\mathbf{m}}_0$  bu değere karşılık gelen birim özvektördür (1).

### 3. GEREÇ ve YÖNTEM

Çalışmada, istatistiksel şekil analizi literatüründe iki örnekleme ait şekil ortalamalarını karşılaştırmak amacıyla kullanılan Hotelling  $T^2$ , Goodall F, James  $F_j$  testleri ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiği tip I hata düzeyleri açısından simülasyon çalışması yapılarak incelenmiştir.

Simülasyon çalışmasında girdi olarak kullanılan ortalama vektörü ve varyans – kovaryans matrisi 50 kişinin yüzünün önden çekilmiş dijital fotoğraflarında, burun üzerinde yapılan landmark işaretlemeleri sonucu elde edilen veri setinden hesaplanmıştır. İmajlar üzerinde yapılan landmark işaretlemelerinde Ercan ve arkadaşları (42) çalışması referans alınmış olup 11 adet landmark işaretlemesi yapılmıştır (Şekil-15).



**Şekil-15:** Simülasyon çalışmasında kullanılan kaynak veri seti için landmark işaretlemesi (42)

Simülasyon çalışmasında tip I hatanın inceleneceği örneklem büyüklükleri sırası ile  $n_1=n_2$  olacak şekilde 20, 50, 100 ve 500 olarak belirlenmiştir. Çalışmada çok değişkenli normal dağılımdan isotropik ve isotropik olmayan modeller altında veri türetilmiştir. Her iki durumda da veri türetiminde kullanılan ortalama vektörü, örnek veri setindeki gerçek değerlerden oluşan landmarklardan hesaplanmıştır.

İsotropik durumda varyans değerleri  $\sigma^2 = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 737, 1703, 2949$  olarak belirlenmiştir. 737, 1703 ve 2949 değerleri, örnek veri setine ait varyans – kovaryans matrisinin diagonali üzerindeki minimum, maksimum ve ortalama varyans değerleridir. İsotropik olmayan durum için ise veri türetiminde örnek veri setinden hesaplanan varyans-kovaryans matrisi girdi olarak kullanılmıştır.

Simulasyon çalışmasında tip I hata incelemesinde, ilgili testlerin şekil uzayı olarak tanjant uzayını kullanmaları ve şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetikten faydalandıkları durumlar da dikkate alınmıştır.

Simulasyon çalışması 1000 tekrar ile yürütülmüş olup, bootstrap ve permütasyon prosedürleri için yeniden örnekleme sayısı 100 olarak belirlenmiştir.

İmajlar üzerinde yapılan landmark işaretlemelerinde TPSDIG 2.04 yazılımı kullanılmıştır. Simülasyon çalışması ve analizlerde R 2.12.0 programında yapılmıştır.

#### 4. BULGULAR

Oluşturulan simulasyon senaryosuna göre Hotelling  $T^2$ , James  $F_j$ , Goodall  $F$ ,  $\lambda_{\min}$  prosedürleriyle, ilgili prosedürlerin bootstrap ve permütasyon versiyonları için elde edilen tip I hata oranları Tablo-1, Tablo-2, Tablo-3 ve Tablo-4' de verilmiştir.

Tablo-1' de,  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  birimlik örneklem büyüklüğü ve  $\sigma^2= 0.001, 0.01, 0.05$  varyans değerleri için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle kompleks aritmetikten faydalandığı durumlarda elde edilen tip I hata oranları verilmiştir.

Tablo-2' de,  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  birimlik örneklem büyüklüğü ve  $\sigma^2= 0.1, 0.5, 1$  varyans değerleri için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle kompleks aritmetikten faydalandığı durumlarda elde edilen tip I hata oranları verilmiştir.

Tablo-3' de,  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  birimlik örneklem büyüklüğü ve  $\sigma^2= 5, 737, 1703$  varyans değerleri için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle kompleks aritmetikten faydalandığı durumlarda elde edilen tip I hata oranları verilmiştir.

Tablo-4' de,  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  birimlik örneklem büyüklüğü ve  $\sigma^2= 2949$  varyans değeri için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle kompleks aritmetikten faydalandığı durumlarda elde edilen tip I hata oranları verilmiştir. Ek olarak Tablo-4' de, örnek veri setinden hesaplanan varyans-kovaryans matrisinin girdi olarak kullanıldığı isotropik olmayan durum için yine  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  birimlik örneklem büyüklüğü ve şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durum için hesaplanan tip I hata oranları verilmiştir.



**Tablo-2:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2=0.1, 0.5, 1$  varyans değerleri için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlar için elde edilen tip I hata oranları

	$\sigma^2 = 0.1$				$\sigma^2 = 0.5$				$\sigma^2 = 1$			
	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=500$	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=500$	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=500$
	<b>ŞEKİL UZAYI OLARAK TANJANT UZAYININ KULLANILDIĞI DURUM</b>											
HOTELLING T <sup>2</sup> (BOOT.)	0.0000	0.0270	0.0400	0.0480	0.0000	0.0230	0.0410	0.0430	0.0000	0.0280	0.0450	0.0520
HOTELLING T <sup>2</sup> (PERM.)	0.0620	0.0460	0.0420	0.0500	0.0450	0.0540	0.0470	0.0480	0.0490	0.0450	0.0550	0.0450
HOTELLING T <sup>2</sup>	0.0520	0.0520	0.0430	0.0430	0.0490	0.0460	0.0550	0.0510	0.0470	0.0490	0.0580	0.0480
GOODALL F (BOOT.)	0.0280	0.0410	0.0380	0.0410	0.0220	0.0280	0.0420	0.0460	0.0190	0.0400	0.0440	0.0470
GOODALL F (PERM.)	0.0600	0.0530	0.0570	0.0510	0.0540	0.0470	0.0460	0.0460	0.0600	0.0500	0.0550	0.0420
GOODALL F	0.0590	0.0520	0.0520	0.0420	0.0460	0.0450	0.0480	0.0490	0.0570	0.0500	0.0580	0.0440
JAMES F <sub>j</sub> (BOOT.)	0.0000	0.0270	0.0400	0.0480	0.0000	0.0230	0.0410	0.0430	0.0000	0.0280	0.0450	0.0520
JAMES F <sub>j</sub> (PERM.)	0.0620	0.0460	0.0420	0.0500	0.0450	0.0540	0.0470	0.0480	0.0490	0.0450	0.0550	0.0450
JAMES F <sub>j</sub>	0.2280	0.0660	0.0520	0.0450	0.2220	0.0660	0.0560	0.0530	0.2070	0.0660	0.0650	0.0500
HOTELLING T <sup>2</sup> (BOOT.)	0.0000	0.0310	0.0410	0.0460	0.0000	0.0230	0.0510	0.0470	0.0000	0.0220	0.0450	0.0470
HOTELLING T <sup>2</sup> (PERM.)	0.0510	0.0540	0.0460	0.0460	0.0520	0.0450	0.0550	0.0530	0.0510	0.0460	0.0590	0.0500
HOTELLING T <sup>2</sup>	0.0520	0.0520	0.0430	0.0430	0.0490	0.0460	0.0550	0.0510	0.0470	0.0490	0.0580	0.0480
GOODALL F (BOOT.)	0.0260	0.0420	0.0420	0.0430	0.0220	0.0290	0.0460	0.0440	0.0240	0.0290	0.0480	0.0450
GOODALL F (PERM.)	0.0480	0.0500	0.0550	0.0470	0.0490	0.0420	0.0580	0.0500	0.0530	0.0440	0.0540	0.0450
GOODALL F	0.0590	0.0520	0.0520	0.0420	0.0460	0.0450	0.0480	0.0490	0.0570	0.0500	0.0590	0.0440
JAMES F <sub>j</sub> (BOOT.)	0.0000	0.0310	0.0410	0.0460	0.0000	0.0230	0.0510	0.0470	0.0000	0.0220	0.0450	0.0470
JAMES F <sub>j</sub> (PERM.)	0.0510	0.0540	0.0460	0.0460	0.0520	0.0450	0.0550	0.0530	0.0510	0.0460	0.0590	0.0500
JAMES F <sub>j</sub>	0.2280	0.0660	0.0520	0.0450	0.2220	0.0660	0.0560	0.0530	0.2070	0.0660	0.0650	0.0500
$\lambda_{\min}$ (BOOT.)	0.0720	0.0380	0.0450	0.0430	0.0090	0.0260	0.0470	0.0480	0.0130	0.0360	0.0460	0.0460
$\lambda_{\min}$ (PERM.)	0.0560	0.0500	0.0510	0.0490	0.0420	0.0380	0.0520	0.0590	0.0570	0.0450	0.0440	0.0480
$\lambda_{\min}$	0.2860	0.1060	0.0760	0.0470	0.2810	0.1170	0.0780	0.0550	0.2640	0.1100	0.0870	0.0540
<b>ŞEKİL UZAYININ GEOMETRİSİ VE FAYDALANILDIĞI DURUM</b>												

**Tablo-3:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2=5, 737, 1703$  varyans değerleri için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalandığı durumlar için elde edilen tip I hata oranları

	$\sigma^2 = 5$				$\sigma^2 = 737$				$\sigma^2 = 1703$				
	n=20	n=50	n=100	n=500	n=20	n=50	n=100	n=500	n=20	n=50	n=100	n=500	
ŞEKİL UZAYI OLARAK TANJANT UZAYININ KULLANILDIĞI DURUM	HOTELLING T <sup>2</sup> (BOOT.)	0.0000	0.0240	0.0390	0.0540	0.0000	0.0230	0.0400	0.0470	0.0000	0.0340	0.0370	0.0500
	HOTELLING T <sup>2</sup> (PERM.)	0.0540	0.0440	0.0450	0.0480	0.0470	0.0490	0.0430	0.0460	0.0530	0.0520	0.0430	0.0500
	HOTELLING T <sup>2</sup>	0.0520	0.0410	0.0450	0.0540	0.0460	0.0490	0.0470	0.0480	0.0540	0.0540	0.0470	0.0540
	GOODALL F (BOOT.)	0.0200	0.0340	0.0440	0.0540	0.0210	0.0350	0.0380	0.0480	0.0300	0.0400	0.0330	0.0470
	GOODALL F (PERM.)	0.0490	0.0470	0.0490	0.0500	0.0470	0.0450	0.0370	0.0520	0.0570	0.0550	0.0410	0.0530
	GOODALL F	0.0460	0.0460	0.0490	0.0530	0.0460	0.0510	0.0410	0.0490	0.0570	0.0540	0.0440	0.0540
	JAMES F <sub>j</sub> (BOOT.)	0.0000	0.0240	0.0390	0.0540	0.0000	0.0230	0.0400	0.0470	0.0000	0.0340	0.0370	0.0500
	JAMES F <sub>j</sub> (PERM.)	0.0540	0.0440	0.0450	0.0480	0.0470	0.0490	0.0430	0.0460	0.0530	0.0520	0.0430	0.0500
	JAMES F <sub>j</sub>	0.2320	0.0480	0.0510	0.0550	0.1880	0.0700	0.0530	0.0480	0.2140	0.0730	0.0550	0.0550
	JAMES F <sub>j</sub>	0.0000	0.0280	0.0420	0.0590	0.0000	0.0310	0.0450	0.0440	0.0000	0.0330	0.0310	0.0360
ŞEKİL UZAYININ GEOMETRİSİ VE KOMPLEKS ARİTMETİKTEN FAYDALANILDIĞI DURUM	HOTELLING T <sup>2</sup> (BOOT.)	0.0560	0.0410	0.0470	0.0540	0.0500	0.0540	0.0480	0.0530	0.0540	0.0590	0.0450	0.0530
	HOTELLING T <sup>2</sup> (PERM.)	0.0520	0.0410	0.0450	0.0540	0.0470	0.0520	0.0480	0.0470	0.0530	0.0550	0.0500	0.0510
	HOTELLING T <sup>2</sup>	0.0230	0.0380	0.0380	0.0480	0.0080	0.0390	0.0350	0.0440	0.0110	0.0380	0.0330	0.0540
	GOODALL F (BOOT.)	0.0420	0.0510	0.0480	0.0530	0.0530	0.0520	0.0460	0.0510	0.0930	0.0650	0.0590	0.0500
	GOODALL F (PERM.)	0.0480	0.0480	0.0490	0.0530	0.4860	0.5240	0.5480	0.5680	0.9140	0.9310	0.9270	0.9360
	GOODALL F	0.0000	0.0280	0.0420	0.0590	0.0000	0.0310	0.0450	0.0440	0.0000	0.0330	0.0310	0.0360
	JAMES F <sub>j</sub> (BOOT.)	0.0560	0.0410	0.0470	0.0540	0.0500	0.0540	0.0480	0.0530	0.0540	0.0590	0.0450	0.0530
	JAMES F <sub>j</sub> (PERM.)	0.2320	0.0580	0.0510	0.0550	0.1850	0.0710	0.0530	0.0470	0.2180	0.0750	0.0530	0.0540
	JAMES F <sub>j</sub>	0.0100	0.0290	0.0380	0.0540	0.0040	0.0390	0.0420	0.0410	0.0060	0.0400	0.0360	0.0510
	JAMES F <sub>j</sub>	0.0490	0.0480	0.0430	0.0530	0.0470	0.0500	0.0430	0.0490	0.0590	0.0550	0.0370	0.0440
$\lambda_{\min}$	0.2940	0.1090	0.0750	0.0570	0.2400	0.1090	0.0730	0.0480	0.2430	0.1100	0.0620	0.0580	



**Tablo-4:**  $n_1=n_2=20, 50, 100, 500$  ve  $\sigma^2=2949$  varyans değeriyle isotropik olmayan varyans yapısı için şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlarda elde edilen tip I hata oranları

	$\sigma^2 = 2949$				İSOTROPİK OLMAYAN VARYANS YAPISI				
	n=20	n=50	n=100	n=500	n=20	n=50	n=100	n=500	
ŞEKİL UZAYI OLARAK TANJANT UZAYININ KULLANILDIĞI DURUM	HOTELLING T <sup>2</sup> (BOOT.)	0.0000	0.0220	0.0340	0.0460	0.0000	0.0160	0.0380	0.0450
	HOTELLING T <sup>2</sup> (PERM.)	0.0490	0.0420	0.0440	0.0520	0.0600	0.0480	0.0500	0.0470
	HOTELLING T <sup>2</sup>	0.0530	0.0420	0.0410	0.0530	0.0460	0.0490	0.0500	0.0450
	GOODALL F (BOOT.)	0.0240	0.0410	0.0270	0.0430	0.0520	0.0410	0.0510	0.0510
	GOODALL F (PERM.)	0.0510	0.0520	0.0380	0.0550	0.0610	0.0460	0.0510	0.0500
	GOODALL F	0.0530	0.0470	0.0330	0.0480	0.1690	0.1400	0.1220	0.1540
	JAMES F <sub>j</sub> (BOOT.)	0.0000	0.0220	0.0340	0.0460	0.0000	0.0160	0.0380	0.0450
	JAMES F <sub>j</sub> (PERM.)	0.0490	0.0420	0.0440	0.0520	0.0600	0.0480	0.0500	0.0470
	JAMES F <sub>j</sub>	0.2120	0.0660	0.0460	0.0540	0.2070	0.0640	0.0550	0.0500
	HOTELLING T <sup>2</sup> (BOOT.)	0.0000	0.0160	0.0180	0.0280	0.0000	0.0220	0.0390	0.0050
ŞEKİL UZAYININ GEOMETRİSİ VE FAYDALANILDIĞI DURUM	HOTELLING T <sup>2</sup> (PERM.)	0.0510	0.0460	0.0370	0.0460	0.0510	0.0560	0.0500	0.0420
	HOTELLING T <sup>2</sup>	0.0560	0.0430	0.0410	0.0530	0.0460	0.0490	0.0500	0.0450
	GOODALL F (BOOT.)	0.0040	0.0210	0.0270	0.0470	0.0470	0.0420	0.0500	0.0490
	GOODALL F (PERM.)	0.1460	0.0770	0.0460	0.0510	0.0690	0.0470	0.0530	0.0540
	GOODALL F	0.9880	0.9920	0.9950	0.9970	0.1680	0.1450	0.1220	0.1510
	JAMES F <sub>j</sub> (BOOT.)	0.0000	0.0160	0.0180	0.0280	0.0000	0.0220	0.0390	0.0450
	JAMES F <sub>j</sub> (PERM.)	0.0510	0.0460	0.0370	0.0460	0.0510	0.0560	0.0500	0.0420
	JAMES F <sub>j</sub>	0.2160	0.0670	0.0440	0.0550	0.2070	0.0640	0.0550	0.0470
	$\lambda_{\min}$ (BOOT.)	0.0030	0.0230	0.0280	0.0480	0.0160	0.0400	0.0480	0.0400
	$\lambda_{\min}$ (PERM.)	0.0500	0.0510	0.0350	0.0450	0.0610	0.0550	0.0510	0.0510
$\lambda_{\min}$	0.2390	0.1160	0.0640	0.0560	0.3150	0.1460	0.1170	0.0930	

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Nesnelerin şekillerinin tanımlanması, ölçülmesi ve karşılaştırılması büyük bir öneme sahiptir. Şekil analizi, nesnelerin öteleme, ölçekleme ve döndürme bilgilerinin kaldırılabilirdiği durumlarda nesnelere ait şekil ile ilgili çalışma yöntemlerini içermektedir (2). İstatistiksel şekil analizi, benzer şekillerin ya da benzer şekillerden oluşan farklı grupların özelliklerini tanımlamak amacıyla ölçülen istatistiklere ait şekiller kümesinin geometrik analizi olup, bu yöntem kullanılarak şekiller arasındaki uzaklığın ölçüsü elde edilebilmekte, ortalama şekil ve şekil değişkenliği tahmin edilebilmektedir (2). İstatistiksel şekil analizi uygulamaları son yıllarda biyoloji ve tıp alanında şekil yapılarının karşılaştırılması amacıyla oldukça sık bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır (33, 42, 72, 73).

Birçok biyolojik ve biyomedikal araştırmada, organ veya organizmaların bir bütün olarak formlarının analizinde kullanılan en etkili yol landmark noktalarının geometrik konumlarının kaydedilmesidir. Landmark koordinatları uzaklıkların özel bir kümesi olup bu koordinatlar birbirine dik eksenlerde spesifik noktaların işaretlenmiş uzaklıklarıdır. Landmarkların koordinatlarının kullanılması, landmarklar arasında bulunan uzaklık ya da açıların içinde saklı bulunan bilginin kısa ve net bir şekilde kodlanmasını sağlamaktadır. Toplanan verilerin analiz edilmesi ve görüntülemesi sayesinde, geometrik bilginin tamamının korunması sonucunda koordinat tabanlı yaklaşımlar geometrik morfometri olarak tanımlanmaktadır (7).

Geometrik morfometri, biyolojik yapılara ait şekil değişimlerinin istatistiksel analizi için yeni bir paradigma sunmaktadır (3, 4). Geometrik morfometrinin geleneksel yaklaşımlara göre (çok değişkenli morfometrik teknikler) temel avantajları, morfolojik landmarkların konumlarına karşılık gelen noktalara ait tüm konfigürasyonların şekil değişimini incelemek için kullanılan modeller üzerine temellenen güçlü istatistiksel yöntemlerin gelişimiyle ortaya çıkmıştır.

Tıp alanında yapılan araştırmalarda çıkarsamalar için yapılan istatistiksel analizlerde veri setleri nicel veya nitel ölçüm değerlerinden oluşurken, günümüzde görüntüleme tekniklerindeki gelişmeyle bir organın veya organizmanın görüntüsü veya şekli de veri girdisi olarak kullanılmaya başlamıştır. Görüntüleme tekniklerindeki gelişimle birlikte modern geometrik morfometrik yöntemler metodolojisindeki ve uygulamalarındaki ilerlemeler de dikkate değer düzeydedir (74).

Geometrik morfometrik bir yaklaşım olan istatistiksel şekil analizinde kullanılan iki örneklem testlerine ilişkin yöntemler geliştirilirken, diğer taraftan da bu testlerin birbirlerine göre performansları üzerine yapılan çalışmalar önem kazanmakla birlikte, az sayıda oldukları görülmektedir. Bu çalışmada, istatistiksel şekil analizi literatüründe iki örnekleme ait şekil ortalamalarını karşılaştırmaya yönelik kullanılan Hotelling  $T^2$ , Goodall F, James  $F_j$  testleri ve  $\lambda_{\min}$  istatistiği tip I hata düzeylerine göre karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışması kapsamında oluşturulan simülasyon senaryosunda farklı örneklem büyüklükleri ve varyans değerleri, isotropik ve isotropik olmayan durumlar ile şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı ve şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlar da dikkate alınarak tip I hata düzeyleri bakımından ilgili prosedürlerin performansları incelenmiştir.

İsotropik varyans yapısı için simülasyon sonuçları incelendiğinde aşağıdaki bulgular elde edilmiştir.

Şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  testinin bootstrap versiyonunda, tip I hatanın belirlenen nominal değere ( $\alpha=0.05$ ) yakınsama eğiliminde varyans değerinin bir etkisi olmadığı, bu durumun örneklem büyüklüğüne bağlı olduğu görülmektedir. Geniş örneklem büyüklüklerinde testin belirlenen nominal değere daha yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğu görülmektedir. Bununla birlikte şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  testinin bootstrap versiyonunda tip I hatanın yine örneklem büyüklüğüne bağlı olarak belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğu ancak aşırı yüksek varyans değerlerinde bu değerden uzaklaşma eğilimi gösterdiği görülmektedir. Şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da küçük örneklemelerde Hotelling  $T^2$  testinin bootstrap versiyonu için tip I hata düzeyinin kontrol dışı olduğu görülmektedir. Amaral (1), yaptığı benzer çalışmada bu durumun sadece bootstrap prosedürüne bağlı olmadığını, çalışmada kullanılan landmark sayısı ile karşılaştırıldığında oldukça küçük olan örneklem büyüklüğüyle de ilgili olduğunu belirtmiştir. Brombin (5) ise çalışmasında yine çalışmamızdaki sonuçlarla paralel bulgulara ulaşmıştır. Hotelling  $T^2$  testinin bootstrap versiyonunun küçük örneklemelerdeki performansını, tip I hata oranına göre kontrol dışı olarak yorumlamakla birlikte örneklem büyüklüğünün arttırılmasıyla tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğunu göstermiştir. Amaral ve Brombin tarafından sırasıyla 2007 ve 2009 yıllarında yapılan çalışmalarda ilgili prosedürün tip I hata oranına göre performansı, şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlarda raporlanmıştır. Çalışmamızda bu

sonuçları destekler nitelikte bulgulara ulaşmakla birlikte şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumlarda da Hotelling  $T^2$  testinin bootstrap versiyonunun performansı incelenmiş, ilgili testin küçük örneklerdeki performansı yine benzer olarak bulunmuş olup Hotelling  $T^2$  testinin ilgili versiyonunun küçük örneklerdeki performansının, bootstrap prosedürü ve örneklem büyüklüğüne bağlı olmakla birlikte kullanılan şekil uzayının seçimine göre farklılık göstermediği belirlenmiştir. Ek olarak, Amaral (1) ve Brombin (6) yaptıkları çalışmalarda inceledikleri testlerin tip I hata oranına göre performanslarını sınırlı sayıda varyans değerine göre yorumlamışlardır. Çalışmamızda, ilgili literatürlerde kullanılan varyans değerlerini kapsayacak şekilde varyans değerleri dahil edilmiş olup bu değerlere ek olarak çalışmada kullanılan gerçek değerli landmarklara ait varyans- kovaryans matrisinin diagonali üzerindeki minimum, maksimum ve ortalama varyans değerleri de eklenerek testlerin performansının aşırı yüksek varyans değerlerindeki davranışları da incelenmiştir.

Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonunun şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da örneklem büyüklüğü ve varyans değerinden etkilenmediği görülmüştür. İlgili testin belirlenen nominal değere yakın tip I hata değerleri verdiği görülmektedir. Amaral (1) ve Brombin (5) de çalışmalarında benzer sonuca ulaşmışlardır. Ancak yazarlar, Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonunun performansını küçük örnekler için raporlamışlardır. Çalışmamızda, yazarların bulgularına paralel şekilde elde edilen sonuçlara ek olarak geniş örneklerde ilgili testin tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde olduğu görülmüştür. Yine ilgili çalışmalara ek olarak Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonunun aşırı yüksek varyans değerlerinde de etkin olduğu ve kullanılan şekil uzayının seçiminden etkilenmediği görülmektedir.

Hotelling  $T^2$  testinin klasik versiyonunda, şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda düşük varyans değerlerinde ve küçük örneklerde, tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşamaktadır. Geniş örneklerde varyans değerinden etkilenmeksizin tip I hata oranının nominal değere yakınsadığı görülmektedir. Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumda ise varyans değeri ve örneklem büyüklüğünden etkilenmeksizin tip I hata oranının nominal değere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Amaral (1) ve Brombin (5) de şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumda gerçekleştirdikleri çalışmalarında benzer sonuca ulaşmışlardır. Çalışmamızda ek olarak şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  testinin klasik versiyonun tip I hata oranına göre performansının küçük örneklerden ve düşük varyans

değerlerinden etkilendiği görülmüştür. Yine her iki durum için de geniş örneklem büyüklüğü ve aşırı yüksek varyans değerlerinde de ilgili testin performansının geçerli olduğu görülmüştür.

Goodall F testinin bootstrap versiyonuna ait tip I hata oranının şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da varyans değerinden etkilenmeksizin küçük örneklerde belirlenen nominal değerden uzaklaşma eğiliminde olduğu görülmektedir. Yine şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da geniş örneklem büyüklüklerinde tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğu görülmektedir. Amaral (1) çalışmasında küçük örneklerde Goodall F testinin bootstrap versiyonunun tip I hata oranına göre belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verdiğini raporlamıştır. Brombin (5) ise çalışmamızdakine benzer bir sonuç raporlamış ve ilgili testin küçük örneklerdeki performansını tip I hata oranına göre düşük olarak göstermekle birlikte örneklem büyüklüğünün artırılmasıyla tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğunu göstermiştir. Ek olarak çalışmamızda şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda da Goodall F testinin bootstrap versiyonunun küçük örneklerde, kompleks aritmetik ve şekil uzayının geometrisinden faydalanıldığı durumundaki performansına benzer performans gösterdiği görülmektedir.

Goodall F testinin permütasyon versiyonunun şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda tip I hata oranı bakımından örneklem büyüklüğü ve varyans değerinden etkilenmeksizin nominal değere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Kompleks aritmetikle birlikte şekil uzayının geometrisinden faydalanıldığı durumda ise varyans değerinin aşırı yüksek olduğu durumlarda, teste ait tip I hata oranı küçük örneklerde nominal değere yakınsama sorunu yaşamaktadır. Amaral (1) çalışmasında, şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumlarda ilgili testin örneklem büyüklüğünden etkilenmeksizin tip I hata oranının, varyans değeri arttıkça belirlenen nominal değerden uzaklaşma eğiliminde olduğunu göstermiştir. Çalışmamızın Amaral'ın (1) çalışmasında kullandığı varyans değerlerini kapsayacak şekilde oluşturulan simülasyon senaryosunda testin tip I hata oranına göre performansı iyi, ancak aşırı yüksek varyans değerleri için ilgili testin tip I hata oranının belirlenen nominal değerden uzaklaşma eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Brombin (5) ise yine küçük örneklerde yürüttüğü çalışmasında, çalışmamızdakine benzer bulgular raporlamıştır. Ek olarak çalışmamızda Goodall F testinin permütasyon versiyonunun performansının şekil uzayının kullanımına bağlı olarak değiştiği ve şekil uzayı olarak tanjant uzayı kullanıldığında ilgili testin tip I hata oranı bakımından daha etkin olduğu belirlenmiştir.

Goodall F testinin klasik versiyonuna ait tip I hata oranının şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda örneklem büyüklüğü ve varyans değerinden etkilenmediği, belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğu görülmektedir. Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumda ise varyans değerinin aşırı yüksek olduğu durumlar için tip I hata oranının örneklem büyüklüğünden etkilenmeksizin belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşadığı görülmektedir. Küçük örneklerde ise test belirlenen nominal değere yakın sonuçlar vermektedir. Amaral (1)' in çalışmasında elde ettiği bulgular, Goodall F testinin klasik versiyonunun örneklem büyüklüğünden etkilenmeden sadece varyans değerinden etkilendiğini göstermekte ve varyans değeri büyüdükçe nominal değerden uzaklaşma eğiliminde olduğunu göstermektedir. Çalışmamızda, Amaral (1)' in çalışmasında kullandığı varyans değerlerini kapsayacak şekilde oluşturulan simülasyon senaryosunda testin tip I hata oranına göre performansı iyi, ancak aşırı yüksek varyans değerleri için ilgili testin tip I hata oranının belirlenen nominal değerden uzaklaşma eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Brombin (5), küçük örnekleri dikkate alarak gerçekleştirdiği çalışmasında Goodall F testinin klasik versiyonunun performansının çalışmamızdakine benzer olduğunu raporlamıştır. Ek olarak çalışmamızın sonuçlarından ilgili testin performansının şekil uzayının kullanımına bağlı olarak farklılık gösterdiği, şekil uzayı olarak tanjant uzayı kullanıldığında, kompleks aritmetik ve şekil uzayının geometrisinden faydalanıldığı duruma göre tip I hata oranı bakımından daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

James  $F_j$  testinin bootstrap versiyonuna ait tip I hata oranının, şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda varyans değerinden bağımsız olarak küçük örneklerde belirlenen nominal değerden uzaklaşma eğiliminde olduğu görülmektedir. Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumda ise testin küçük örneklerde tip I hata oranı bakımından belirlenen nominal değerden uzaklaşma eğilimi devam ederken, ek olarak aşırı yüksek varyans değerleri için geniş örneklem büyüklüklerinde de tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşadığı görülmektedir. Amaral (1) çalışmasında, küçük örneklerde James  $F_j$  testinin bootstrap versiyonuna ait tip I hata oranının varyans değerlerinden etkilenmediğini ve belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verdiğini göstermiştir. Brombin (6) ise küçük örneklerde ilgili testin tip I hata oranına göre performansını kontrol dışında olduğunu yorumlamakla birlikte örneklem büyüklüğünün artırılmasıyla testin nominal değere yakın sonuçlar verme eğiliminde olduğunu raporlamıştır. Ek olarak çalışmamızda şekil uzayı

olarak tanjant uzayı seçildiğinde geniş örneklem büyüklüklerinde testin performansının aşırı yüksek varyans değerlerinden etkilenmediği gösterilmiştir.

James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonunun şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da örneklem büyüklüğü ve varyans değerinden etkilenmediği görülmüştür. İlgili testin belirlenen nominal değere yakın tip I hata değerleri verdiği görülmektedir. Amaral (1) ve Brombin (5) de çalışmalarında benzer sonuca ulaşmışlardır. Ancak yazarlar James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonunun performansını küçük örneklerle sınırlı olacak şekilde raporlamışlardır. Çalışmamızda, yazarların bulgularına paralel elde edilen sonuçlara ek olarak geniş örneklerde ilgili testin tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde olduğu görülmüştür. Yine ilgili çalışmalara ek olarak James  $F_j$  testinin permütasyon prosedürü kullanıldığında testin, aşırı yüksek varyans değerlerinde de etkin olduğu ve kullanılan şekil uzayının seçiminden etkilenmediği görülmektedir.

James  $F_j$  testinin klasik versiyonunun tip I hata oranının şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde varyans değerinin bir etkisi olmadığı, örneklem büyüklüğünün etkisi olduğu görülmektedir. İlgili testin, küçük örneklerde tip I hata oranı bakımından belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşadığı görülmektedir. Amaral (1) çalışmasında küçük örneklerde farklı varyans değerleri için James  $F_j$  testinin klasik versiyonunun belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verdiğini göstermiştir. Brombin (6), çalışmasında benzer bulguları raporlamış ve ilgili testin küçük örneklerde belirlenen nominal değerden uzak sonuçlar verme eğiliminde olduğunu göstermiştir. Ek olarak çalışmamızda varyans değerlerinden etkilenmeden, örneklem büyüklüğünün artmasıyla şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakın olduğu görülmektedir.

Amaral (1) tarafından önerilen  $\lambda_{\min}$  test istatistiği şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalandığı durumlarda geçerli olmaktadır.  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin bootstrap versiyonuna ait tip I hata oranının varyans değerinden etkilenmediği ancak küçük örneklem büyüklüklerinde belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşadığı görülmektedir. Amaral (1) ve Brombin (5) de çalışmalarında ilgili testin belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

$\lambda_{\min}$  test istatistiğinin permütasyon versiyonunun ise örneklem büyüklüğü ve varyans değerinden etkilenmediği görülmüştür. İlgili testin belirlenen nominal değere yakın tip I hata değerleri verdiği görülmektedir. Amaral (1) ve Brombin (6) de çalışmalarında benzer sonuçları göstermişlerdir. Ek olarak, çalışmamızda geniş örneklem

büyüklüğü ve aşırı yüksek varyans değerlerinde de ilgili test istatistiğinin performansının iyi olduğu görülmektedir.

$\lambda_{\min}$  istatistiğinin klasik versiyonunda tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminin örneklem büyüklüğü ve varyans değerinin her ikisine de bağlı olduğu görülmektedir. Varyans değeri büyüdükçe ilgili test istatistiğine ait tip I hata oranı geniş örneklem büyüklüklerinde belirlenen nominal değere yakın sonuçlar verirken bunun dışındaki durumlarda nominal değere yakınsama sorunu yaşamaktadır. Amaral (1) ve Brombin (6) de çalışmalarında, küçük örneklemelerde  $\lambda_{\min}$  istatistiğinin klasik versiyonunun performansını çalışmamızdaki sonuçlara paralel olarak göstermekle birlikte ek olarak çalışmamızda ilgili prosedürün geniş örneklem büyüklükleri ve aşırı yüksek varyans değerlerindeki davranışı da gösterilmiştir.

Çalışmamızda kullandığımız gerçek veri setini yansıtan isotropik olmayan durumda ise aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Hotelling  $T^2$  testinin bootstrap versiyonunda, şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda tip I hatanın belirlenen nominal değere geniş örneklem büyüklüklerinde yakınsama eğiliminde olduğu görülmektedir. Şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalanıldığı durumda ise ilgili test belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşamaktadır.

Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonunda ise şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da tip I hata oranının belirlenen tüm örneklem büyüklüklerinde nominal değere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Hotelling  $T^2$  testinin klasik versiyonunun yine permütasyon versiyonuna benzer şekilde şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da, tip I hata oranına göre örneklem büyüklüğünden bağımsız olarak belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde olduğu görülmektedir.

Goodall F testinin bootstrap versiyonunda, şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da, tip I hata oranının nominal değere yakınsama eğiliminde örneklem büyüklüğünün bir etkisi olmadığı görülmektedir.

Goodall F testinin permütasyon versiyonuna ait tip I hata oranının şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da bootstrap versiyonundakine benzer şekilde belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşamadığı bu değere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.



Goodall F testinin klasik versiyonunda, şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da ilgili teste ait tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşadığı görülmektedir.

James  $F_j$  testinin bootstrap versiyonunda tip I hata oranı şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da örneklem büyüklüğünden etkilenmektedir. Tip I hata oranının geniş örneklem büyüklüklerinde belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde olduğu görülmektedir.

James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonunda, şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da, tip I hata oranının nominal değere yakınsama eğiliminde örneklem büyüklüğünün bir etkisi olmadığı görülmektedir.

James  $F_j$  testinin klasik versiyonuna ait tip I hata oranının şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durumda da örneklem büyüklüğünün artmasıyla birlikte belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde olduğu görülmektedir.

$\lambda_{\min}$  test istatistiğinin bootstrap versiyonuna ait tip I hata oranının örneklem büyüklüğünün artmasıyla birlikte belirlenen nominal değere yakınsama eğiliminde olduğu görülmektedir.

$\lambda_{\min}$  test istatistiğinin permütasyon versiyonuna ait tip I hata oranının nominal değere yakınsama eğiliminde örneklem büyüklüğünün bir etkisi olmadığı görülmektedir.

$\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonunda, tip I hata oranının belirlenen nominal değere yakınsama sorunu yaşadığı görülmektedir.

Çalışmamızda isotropik varyans yapısı dikkate alındığında küçük örneklerde tip I hata oranına göre en kötü performansı şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  ve James  $F_j$  testlerinin bootstrap versiyonları, şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetikten faydalandığı durumda ise yine Hotelling  $T^2$  ve James  $F_j$  testlerinin bootstrap versiyonları, ek olarak ise  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonu göstermiştir. Belirtilen bu testler simülasyon senaryosundaki tüm varyans değerleri için belirlenen nominal değere yakın sonuçlar üretememişlerdir. İsootropik varyans yapısı dikkate alındığında, küçük örneklerde en iyi performansı ise şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanılması durumunda Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonu göstermiş olup bu prosedür tüm varyans değerleri için nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. İsootropik olmayan varyans yapısında, en kötü performansı şekil uzayı olarak tanjant uzayı kullanılması durumunda Goodall F testinin klasik versiyonu ile Hotelling  $T^2$  ve James  $F_j$  testlerinin bootstrap versiyonları, kompleks aritmetik ve şekil uzayının geometrisinden faydalandığı durumda yine Goodall F testinin klasik versiyonu,

Hotelling  $T^2$  ve James  $F_j$  testlerinin bootstrap versiyonları ile  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonu göstermiştir. Belirtilen bu testler simülasyon senaryosunda belirlenen nominal değere yakın sonuçlar üretememişlerdir. Bu durumdaki en iyi performansı ise şekil uzayı olarak tanjant uzayı kullanıldığında Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin bootstrap ve permütasyon versiyonları, James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonu ile şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetikten faydalandığı durumda ise yine Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin bootstrap versiyonu, James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonu ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin permütasyon versiyonu göstermiş olup bu prosedürler tip I hata oranı olarak nominal değere yakın sonuçlar vermişlerdir.

Çalışmada isotropik varyans yapısının kullanıldığı geniş örneklem dikkate alındığında, simülasyon sonuçlarına göre nominal değere yakın sonuç vermeyen test yoktur. Ancak genel olarak en kötü performansı  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonunun gösterdiği görülmektedir. Bu durumdaki en iyi performansı şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanılmasına bağlı olarak Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F ve James  $F_j$  testlerinin permütasyon versiyonları ile şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetik kullanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F, James  $F_j$  testleri ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin permütasyon versiyonları göstermiştir. Bu prosedürler tüm varyans değerleri için nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Geniş örneklemde isotropik olmayan varyans yapısında ise tanjant uzayının şekil uzayı olarak kullanılması durumunda Goodall F testinin klasik versiyonu ile ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonu en kötü performansı göstermişlerdir. Belirtilen bu prosedürler belirlenen nominal değere yakın sonuçlar üretememişlerdir. Geniş örneklemde isotropik olmayan varyans yapısında en iyi performansı, tanjant uzayının kullanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  testinin tüm versiyonları, Goodall F testinin bootstrap ve permütasyon versiyonu ve James  $F_j$  testlerinin tüm versiyonları ile şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetikten faydalandığı durumda ise Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin bootstrap ve permütasyon versiyonları, James  $F_j$  testinin tüm versiyonları ile  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin bootstrap ve permütasyon versiyonları göstermiştir. Belirtilen bu prosedürler simülasyon senaryosunda örneklem büyüklüğüne ait tüm durumlarda nominal değere yakın sonuçlar üretmişlerdir.

İstatistiksel şekil analizi literatüründe iki örneklem testlerinin karşılaştırılması yönelik olarak bulunan sınırlı sayıda çalışma vardır. Bunlardan bir tanesi Amaral' ın 2007 yılında yaptığı çalışma diğeri ise 2009 yılında Brombin tarafından yapılan çalışmadır.

Çalışmamızda literatürde bulunan bu iki çalışma da yer verilen varyans değerlerine ek olarak daha fazla sayıda varyans değeri incelenmiş olup varyans yapısı isotropik olan ve olmayan durumlara göre ikiye ayrılmıştır. Literatürde yapılan çalışmalarda sadece isotropik varyans yapısı incelenmiş olup isotropik olmayan varyans yapısı üzerine yapılan çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle, isotropik olmayan varyans yapısı için çalışmamızda elde edilen sonuçlar ileriki çalışmalar için referans niteliğindedir. Literatürde bulunan çalışmalarda incelenen testler sadece şekil uzayının geometrisi ve kompleks aritmetikten faydalandığı durumlarda gösterdikleri performanslara göre incelenmiştir. Çalışmamızda bu duruma ek olarak şekil uzayı olarak tanjant uzayının seçildiği durumda da testlerin performansları incelenmiş ve gösterilmiştir. Literatürde bulunan çalışmalardan farklı olan bir diğer nokta ise çalışmaya alınan örneklem büyüklükleridir. Literatürde bulunan çalışmalar ilgili prosedürlerin performanslarını küçük örneklemelerde incelemişlerdir. Çalışmamızda küçük örneklemelere ek olarak ilgili prosedürlerin performansları geniş örneklemelerde de incelenmiş ve gösterilmiştir.

Genel olarak değerlendirildiğinde, çalışmada isotropik varyans yapısının kullanıldığı durumlar dikkate alındığında, simülasyon sonuçlarına göre nominal değere yakın sonuç vermeyen test yoktur. Ancak genel olarak en kötü performansı  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonunun gösterdiği görülmektedir. İsootropik varyans yapısı için, şekil uzayı olarak tanjant uzayının kullanıldığı durumda Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon versiyonu en iyi performansı göstermiştir. Bu prosedür tüm örneklem büyüklükleri ve varyans değerleri için tip I hata oranı için belirlenen nominal değere yakın sonuçlar üretmiştir. İsootropik olmayan varyans yapısı için en iyi performansı şekil uzayı olarak tanjant uzayı kullanıldığında Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin bootstrap ve permütasyon versiyonları ve James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonu gösterirken, şekil uzayının geometrisiyle birlikte kompleks aritmetikten faydalandığı durumda ise Hotelling  $T^2$  testinin permütasyon ve klasik versiyonları, Goodall F testinin permütasyon versiyonu, James  $F_j$  testinin permütasyon versiyonu ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin permütasyon versiyonunun gösterdiği görülmektedir. Bu prosedürler tüm örneklem büyüklükleri için nominal değere yakın sonuçlar üretmişlerdir. İsootropik olmayan varyans yapısı için, en kötü performansı şekil uzayının kullanımına bağlı her iki durum içinde geçerli olmak üzere Goodall F testinin klasik versiyonu ve  $\lambda_{\min}$  test istatistiğinin klasik versiyonunun gösterdiği görülmektedir. Bu prosedürler tüm örneklem büyüklükleri için nominal değere yakın sonuçlar üretmemişlerdir. Sonraki çalışmalarda,

çalışmada kullanılan landmark sayısının ilgili testlerin performansları üzerindeki etkisinin incelenmesi önerilmektedir.

## 6. KAYNAKLAR

1. AMARAL GJA, DRYDEN I, WOOD ATA. Pivotal Bootstrap Methods for K-Sample Problems in Directional Statistics and Shape Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 102(478): 695-707, 2007.
2. DRYDEN IL, MARDIA KV. *Statistical Shape Analysis*, Volume 4, Wiley, New York, 1998.
3. ROHLF FJ. Shape Statistics: Procrustes Superimpositions and Tangent Spaces. *Journal of Classification*, 16(2): 197-223, 1999.
4. ROHLF FJ. On the Use of Shape Spaces to Compare Morphometric Methods. *Hystrix-the Italian Journal of Mammalogy*, 11(1): 12-13, 2000.
5. BROMBIN C, SALMASO L. Multi-Aspect Permutation Tests in Shape Analysis with Small Sample Size. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(12): 3921-3931, 2009.
6. HENDERSON A. Traditional Morphometrics in Plant Systematics and Its Role in Palm Systematics. *Botanical Journal of the Linnean Society*, 151(1): 103-111, 2006.
7. SLICE DE. Geometric Morphometrics. *Annual Review of Anthropology*, 36(1): 261, 2007.
8. CLAUDE J. *Morphometrics with R*, Springer Verlag, 2008.
9. WANG L, TAN T, HU W, NING H. Automatic Gait Recognition Based on Statistical Shape Analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(9): 1120-1131, 2003.
10. SMALL CG. *The Statistical Theory of Shape*, Springer Verlag, 1996.
11. OZDEMIR ST, ERCAN I, SEVINC O, GUNEY I, OCAKOGLU G, ASLAN E, BARUT C. Statistical Shape Analysis of Differences in the Shape of the Corpus Callosum between Genders. *The Anatomical Record: Advances in Integrative Anatomy and Evolutionary Biology*, 290(7): 825-830, 2007.
12. ZELDITCH M. *Geometric Morphometrics for Biologists: A Primer*, Academic Press, 2004.
13. ADAMS DC, ROHLF FJ, SLICE DE. Geometric Morphometrics: Ten Years of Progress Following the 'Revolution'. *Italian Journal of Zoology*, 71(1): 5-16, 2004.
14. ARTHUR W. D'arcy Thompson and the Theory of Transformations. *Nature Reviews Genetics*, 7(5): 401-406, 2006.
15. HAMMER Ø, HARPER DAT. *Paleontological Data Analysis*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, Malden (Massachusetts), 2005.
16. SFORZA C, FERRARIO V. Soft-Tissue Facial Anthropometry in Three Dimensions: From Anatomical Landmarks to Digital Morphology in Research, Clinics and Forensic Anthropology. *Journal Of Anthropological Sciences*, 84: 97-124, 2006.
17. REYMENT R. *Morphometrics: An Historical Essay*. 1 1, Morphometrics for Nonmorphometricians, Editor: M. Elewa, Springer, London, 9-24, 2010.
18. SANFILIPPO PG, CARDINI A, HEWITT AW, CROWSTON JG, MACKAY DA. Optic Disc Morphology-Rethinking Shape. *Progress in retinal and eye research*, 28(4): 227-248, 2009.
19. ROBINS G, FOWLER AS. *Proportion and Style in Ancient Egyptian Art*, University of Texas Press, Austin, 1994.

20. SLICE DE. Modern Morphometrics, Modern Morphometrics in Physical Anthropology, Editor: T.H. Tuttle, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 1-45, 2005.
21. NAINI FB, MOSS JP, GILL DS. The Enigma of Facial Beauty: Esthetics, Proportions, Deformity, and Controversy. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 130(3): 277-282, 2006.
22. BALTANÁS A. Contribution to Geometric Morphometrics: Workshop" Methods in Ostracodology, Editor: D. Danielopol, M. Gross, and W. Piller, Institut für Erdwissenschaften, Bereich Geologie und Paläontologie, Karl-Franzens-Universität, Graz, 2008.
23. ROLHF F, MARCUS L. A Revolution in Morphometrics. *Trends in Ecology & Evolution*, 8: 129-132, 1993.
24. MARCUS L. Traditional Morphometrics, Proceedings of the Michigan Morphometrics Workshop, Editor: F. Rohlf and F. Bookstein, Ann Arbor: University of Michigan Museum of Zoology, 1990.
25. BURNABY T. Growth-Invariant Discriminant Functions and Generalized Distances. *Biometrics*, 22(1): 96-110, 1966.
26. JOLICOEUR P. The Multivariate Generalization of the Allometry Equation. *Biometrics*, 19(1-4): 497-499, 1963.
27. MOSIMANN JE. Size Allometry: Size and Shape Variables with Characterizations of the Lognormal and Generalized Gamma Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 65(330): 930-945, 1970.
28. RICHTSMEIER JT, BURKE DELEON V, LELE SR. The Promise of Geometric Morphometrics. *American journal of physical anthropology*, 119(S35): 63-91, 2002.
29. FADDA C, CORTI M. Three Dimensional Geometric Morphometrics of *Arvicantis*: Implications for Systematics and Taxonomy. *Journal of Zoological Systematics and Evolutionary Research*, 39(4): 235-245, 2001.
30. MCNULTY KP. A Geometric Morphometric Assessment of Hominoid Crania: Conservative African Apes and Their Liberal Implications. *Annals of Anatomy-Anatomischer Anzeiger*, 186(5-6): 429-433, 2004.
31. REYMENT R, KENNEDY W. Taxonomic Recognition of Species *Ofneogastrolites* (Ammonoidea, Cenomanian) by Geometric Morphometric Methods. *Cretaceous Research*, 19(1): 25-42, 1998.
32. SHIPUNOV AB, BATEMAN RM. Geometric Morphometrics as a Tool for Understanding *Dactylorhiza* (Orchidaceae) Diversity in European Russia. *Biological Journal of the Linnean Society*, 85(1): 1-12, 2005.
33. OZDEMIR ST, ERCAN I, OZKAYA G, CANKUR NS, ERDAL YS. Geometric Morphometric Study and Cluster Analysis of Late Byzantine and Modern Human Crania. *Collegium antropologicum*, 34(2): 493-499, 2010.
34. MACLEOD N. Landmarks, Localization, and the Use of Morphometrics in Phylogenetic Analysis. *Topics in geobiology*, 19: 197-234, 2001.
35. RUBER L, ADAMS D. Evolutionary Convergence of Body Shape and Trophic Morphology in Cichlids from Lake Tanganyika. *Journal of Evolutionary Biology*, 14(2): 325-332, 2001.
36. HOWELLS W. Cranial Variation in Man: A Study by Multivariate Analysis of Patterns of Difference among Recent Human Populations, Peabody Museum of Archaeology and Ethnology, Harvard University, Cambridge, 1973.
37. HANIHARA T. Frontal and Facial Flatness of Major Human Populations. *American journal of physical anthropology*, 111(1): 105-134, 2000.

38. HOWELLS W. Skull Shapes and the Map: Craniometric Analyses in the Dispersion of Modern Homo, Peabody Museum of Archaeology and Ethnology, Harvard University, Cambridge, 1989.
39. TATLIDIL H. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz. Cem Web Ofset, Ankara 1996.
40. KENDALL DG. Shape Manifolds, Procrustean Metrics, and Complex Projective Spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 16(2): 81, 1984.
41. BOOKSTEIN FL. Principal Warps: Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformations. *IEEE Trans Pattern Anal Machine Intelligence*, 11(6): 567-585, 2002.
42. ERCAN I, ETOZ A, GUNEY I, OCAKOGLU G, TURAN-OZDEMIR S, KAN I, KAHVECİ R. Statistical Shape Analysis of Nose in Turkish Young Adults. *Journal of Craniofacial Surgery*, 18(1): 219, 2007.
43. MARCUS JR, DOMESHEK LF, DAS R, MARSHALL S, NIGHTINGALE R, STOKES TH, MUKUNDAN JR S. Objective Three-Dimensional Analysis of Cranial Morphology. *Eplasty*, 8: 180, 2008.
44. BOOKSTEIN FL. *Morphometric Tools for Landmark Data: Geometry and Biology*, Cambridge University Press, 1997.
45. LELE S, RICHTSMEIER JT. *An Invariant Approach to Statistical Analysis of Shapes*, Chapman & Hall, Florida, 2001.
46. HAMMER Ø. *Morphometrics-Brief Notes*. Course texts, Paläontologisches Institut und Museum, Zürich: 49 pp 2002.
47. FERSON S, ROHLF FJ, KOEHN RK. Measuring Shape Variation of Two-Dimensional Outlines. *Systematic Zoology*, 34(1): 59-68, 1985.
48. MACLEOD N. Generalizing and Extending the Eigenshape Method of Shape Space Visualization and Analysis. *Paleobiology*, 25(1): 107-138, 1999.
49. RICHTSMEIER JT, CHEVERUD JM, LELE S. Advances in Anthropological Morphometrics. *Annual Review of Anthropology*, 21: 283-305, 1992.
50. BOOKSTEIN FL. "Size and Shape": A Comment on Semantics. *Systematic Zoology*, 38(2): 173-180, 1989.
51. MCINTYRE GT, MOSSEY PA. Size and Shape Measurement in Contemporary Cephalometrics. *The European Journal of Orthodontics*, 25(3): 231, 2003.
52. LUX CJ, RUBEL J, STARKE J, CONRADT C, STELLZIG A, KOMPOSCH G. Effects of Early Activator Treatment in Patients with Class II Malocclusion Evaluated by Thin-Plate Spline Analysis. *Angle Orthodontist*, 71(2): 121, 2001.
53. LELE S, RICHTSMEIER JT. Euclidean Distance Matrix Analysis: A Coordinate-Free Approach for Comparing Biological Shapes Using Landmark Data. *American journal of physical anthropology*, 86(3): 415-427, 1991.
54. SLICE DE, BOOKSTEIN FL, MARCUS LF, ROHLF FJ. A Glossary for Geometric Morphometrics. [03.01.2011]; Available from: <http://www.paleo.geos.vt.edu/geos5384/Gloss.htm>.
55. LOZANOFF S. Sphenoethmoidal Growth, Malgrowth and Midfacial Profile. *On growth and form: spatio-temporal patterning in biology*. New York: John Wiley & Sons, Inc.: 357-372, 1999.
56. MOSS ML, SKALAK R, PATEL H, SEN K, MOSS-SALENTIEN L, SHINOZUKA M, VILMANN H. Finite Element Method Modeling of Craniofacial Growth. *American Journal of Orthodontics*, 87(6): 453-472, 1985.
57. CHEVERUD J, LEWIS JL, BACHRACH W, LEW WD. The Measurement of Form and Variation in Form: An Application of Three Dimensional Quantitative

- Morphology by Finite Element Methods. American journal of physical anthropology, 62(2): 151-165, 1983.
58. SINGH G, CLARK W. Localization of Mandibular Changes in Patients with Class II Division 1 Malocclusions Treated with Twin-Block Appliances: Finite Element Scaling Analysis. American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics, 119(4): 419-425, 2001.
  59. ANDERSON C, Object Recognition Using Statistical Shape Analysis. 1997, PhD thesis, University of Leeds.
  60. SIBSON R. Studies in the Robustness of Multidimensional Scaling: Procrustes Statistics. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 40(2): 234-238, 1978.
  61. MONTEIRO LR, BORDIN B, FURTADO DRS. Shape Distances, Shape Spaces and the Comparison of Morphometric Methods. Trends in Ecology & Evolution, 15(6): 217, 2000.
  62. KENDALL D. The Statistics of Shape. Interpreting multivariate data: 75-80, 1981.
  63. KENT JT. The Complex Bingham Distribution and Shape Analysis. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 56(2): 285-299, 1994.
  64. GOODALL C. Procrustes Methods in the Statistical Analysis of Shape. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 53(2): 285-339, 1991.
  65. SCHMIDHEINY K. The Bootstrap. Unversitat Pompeu Fabra, Short Guides to Microeconometrics 2008.
  66. AKTÜKÜN A. Asal Bileşenler Analizinde Bootstrap Yaklaşımı. Ekonometri ve İstatistik (1): 1-10, 2005.
  67. TAKMA Ç, ATIL H. Bootstrap Metodu Ve Uygulanışı Üzerine Bir Çalışma 2. Güven Aralıkları, Hipotez Testi Ve Regresyon Analizinde Bootstrap Metodu. Ege Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi, 43(2): 63-72, 2006.
  68. BOOKSTEIN FL. Shape and the Information in Medical Images: A Decade of the Morphometric Synthesis. Computer Vision and Image Understanding, 66(2): 97-118, 1997.
  69. DRYDEN I, MARDIA K. Multivariate Shape Analysis. Sankhy : The Indian Journal of Statistics, Series A, 55(3): 460-480, 1993.
  70. GOOD P, Permutation Tests: A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypothesis. 1994, Springer Verlag Inc., New York.
  71. RICHTSMEIER J, LELE S, COLE T. "Landmark Morphometrics and the Analysis of Variation," in Variation: A Central Concept in Biology, Variation, Editor: B. Hallgrimsson and B. Hall, Elsevier, Amsterdam, 49, 2005.
  72. ERCAN I, OCAKOGLU G, GUNAY I, YAZICI B. Adaptation of Generalizability Theory for Inter-Rater Reliability for Landmark Localization. International Journal of Tomography & Statistics, 9(S08): 51-58, 2008.
  73. ERCAN I, OZDEMIR ST, ETOZ A, SIGIRLI D, TUBBS RS, LOUKAS M, GUNAY I. Facial Asymmetry in Young Healthy Subjects Evaluated by Statistical Shape Analysis. Journal of Anatomy, 213(6): 663-669, 2008.
  74. ERCAN İ, ÖZKAYA G, SİĞİRLİ D. Referans Landmarkların Değişmesi Durumunda Bookstein Koordinatlarına Uygulanan Hotelling T2 Testi İçin Tip I Hatanın İncelenmesi. in 7. İstatistik Kongresi. 2011. Antalya.
  75. R Development Core Team, R: A Language and Environment for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2011.



## 7. TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve tez aşamasında ilgisini, desteğini ve sabrını benden hiç esirgemeyen, bilimsel gelişimime katkılarından ve ayırdığı zamandan dolayı değerli danışmanım ve Anabilim Dalı Başkanımız Doç. Dr. İlker ERCAN'a teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince, tezin değerlendirilmesinde değerli katkılarını benimle paylaşan tez izleme komitesindeki değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca ve tez çalışmam sırasında göstermiş olduğu destek ve sabrından dolayı eşime, beni yetiştiren ve bugünlere ulaşmamı sağlayan sevgili aileme sonsuz destekleri için teşekkür ederim.

## 8. ÖZGEÇMİŞ

05 Mart 1980 tarihinde İzmir’de doğdum. İlkokulu İzmir Mehmet Akif Ersoy ilkokulunda bitirdim. Orta öğrenimimi Güzelyalı ortaokulunda tamamladım. Lise öğrenimimi İzmir Atatürk Süper Lisesinde tamamladım. 2003 yılında Eskişehir Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümünü bitirdim. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Tıp fakültesi Biyoistatistik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimime başladım ve 2006 yılında tamamladım. Halen aynı anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.