PARADEĞME GEOMETRİDE

SIFIRLIK DAĞILIMLARI

İrem KÜPELİ ERKEN

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARADEĞME GEOMETRİDE SIFIRLIK DAĞILIMLARI

İrem KÜPELİ ERKEN

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2016

TEZ ONAYI

İrem KÜPELİ ERKEN tarafından hazırlanan "Paradeğme Geometride Sıfırlık Dağılımları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN
İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Cumali EKİCİ
Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

10/06/2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10/06/2016

İmza

İrem KÜPELİ ERKEN

ÖZET

Doktora Tezi

PARADEĞME GEOMETRİDE SIFIRLIK DAĞILIMLARI

İrem KÜPELİ ERKEN

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde hemen hemen paradeğme manifoldu, hemen hemen paradeğme metrik manifoldu tanımlanıp özellikleri incelenmiştir. Bir hemen hemen paradeğme manifoldun torsiyon tensör alanı tanımlanıp, manifold üzerinde normal yapı kurulmuştur. Üstelik bir K-paradeğme manifoldu tanımlanıp, manifoldun K-paradeğme olması için bazı şartlar verilmiştir. Ayrıca para-Sasakian manifoldu tanıtılıp özellikleri incelenmiştir. Yine bu bölümde paradeğme manifoldların eğrilik özellikleri ve Legendrian foliasyonlar çalışılmıştır.

Dördüncü bölüm paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara ayrılmış olup, üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım, paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar ile ilgili temel tanımlar ve teoremlere, ikinci kısım ise $\tilde{\kappa} > -1$ için paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara, üçüncü kısım ise $\tilde{\kappa} < -1$ için paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara ayrılmıştır.

Beşinci bölüm 3-boyutlu paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlara ayrılmış olup, üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım, $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar ile ilgili sonuçlara ayrılmıştır. İkinci kısımda 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların sınıflandırılması ve üçüncü kısımda ise bir uygulama verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Paradeğme metrik manifold, Para-Sasakian, Değme metrik manifold, (κ,μ)-manifold, Legendrian foliasyon

2016, v + 160 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

NULLITY CONDITIONS IN PARACONTACT GEOMETRY

İrem KÜPELİ ERKEN

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

In this thesis, there are 5 chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.

Second chapter contains some well-known definitions and results which will be used in other chapters.

In the third chapter, the features of almost paracontact manifolds and almost paracontact metric manifolds were examined. The torsion tensor field of almost paracontact manifold was defined and on manifold the normal structure was constructed. Also a K-paracontact manifold was defined and some properties were given to be a K-paracontact manifold. Also para-Sasakian manifold was introduced and properties were given. In this chapter paracontact manifolds curvature properties and Legendrian foliations were also studied.

The fourth section contains paracontact $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolds and has three subsection. First section is devoted to basic definitions and theorems about paracontact $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolds, second subsection is devoted to paracontact $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolds with $\tilde{\kappa} > -1$ and third subsection is related to paracontact $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolds with $\tilde{\kappa} < -1$.

In the fifth section, we deal with 3-dimensional paracontact $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifolds. In this section, there are three subsection. First subsection is devoted to preliminary results on (2n+1)-dimensional paracontact metric $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifolds. Second subsection is related to classification of the 3-dimensional paracontact metric $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifolds. Finally, we gave an application in the third subsection.

Key words: Paracontact metric manifold, Para-Sasakian, Contact metric manifold, (κ,μ)-manifold, Legendre foliation.

2016, v + 160 pages.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve destekleriyle beni yönlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a en içten saygı ve sevgilerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca manevi ve bilimsel desteğini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olduğunu hissettiren, akademik çalışma disiplinini kazanmam için tavsiyelerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a ayrıca çok teşekkür ederim.

En önemlisi bugünlere gelmemi sağlayan, tüm öğrenim hayatım boyunca bana her koşulda destek olan, sabrını ve emeğini benden esirgemeyen sevgili anneme ve babama, bana gösterdiği sevgiyle, saygıyla, güvenle her zorluğu aşmama yardımcı olan ve ona ayırmam gereken zamandan fedakarlık eden sevgili eşim Bilal ERKEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Doktora tezimi Tübitak Bideb 2211 Yurtiçi Doktora Burs Programı ile destekleyen TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

İrem KÜPELİ ERKEN
10 / 06 / 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
ϕ	Simetrik iki-lineer form
q	İndeks
$\otimes$	Tensör çarpımı
$\Vert , \Vert$	Norm
$\langle , \rangle$	Skalar çarpım
T_pM	p noktasındaki teğet uzay
M	Manifold
g	Değme yapıdaki metrik tensör
$\tilde{g}$	Paradeğme yapıdaki metrik tensör
g	Lie cebiri
G	Lie grup
C^{∞}	Diferensiyellenebilme
∇	Yarı-Riemann manifold üzerindeki Afin konneksiyon
$\tilde{\nabla}$	Paradeğme manifold üzerindeki Afin konneksiyon
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
π	Dik izdüşüm
$[,]$	Lie parantez operatörü
d	Dış türev operatörü
R	Yarı-Riemann manifoldun Riemann eğrilik tensörü
$\tilde{R}$	Paradeğme manifoldun Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci tensörü
Q	Ricci operatörü
D	Dağılım
∂	Kısmi türev
φ	Değme yapıdaki tensör alanı
$\tilde{\varphi}$	Paradeğme yapıdaki tensör alanı
ξ	Vektör alanı
η	1-form
$\tilde{\Phi}$	Paradeğme yapının Temel 2-Formu
K	Kesitsel eğrilik
τ	Skaler eğrilik
Δ	Laplace

1. GİRİŞ

Değme geometri bundan iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jacobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından doğmuştur ve Sophus Lie, Elie Carton ve Darboux gibi pek çok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır (Etnyre 2002). Değme geometrinin köklerine, 1872 de Lie'nin değme transformasyonu diferensiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında geometrik bir araç olarak tanımlamasıyla rastlanır. Değme geometri, teorik matematiğin diğer alanlarıyla bağlantılar içerir ve mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisinin uygulama alanlarında önemli bir yere sahiptir.

1970 lerin başlarında, değme geometride, topolojik metotlar önemli bir rol almaya başladı. Fakat global topolojik sonuçların alınması 1980 lerin ortalarını buldu. Bundan sonra, 3-boyutlu değme geometri ve topoloji çalışmalarının engin ve yararlı faaliyetler olduğu görüldü ve daha yüksek boyutlu değme topolojiyi anlamak için önemli adımlar atılmaya başlandı.

Bir $2n+1$-boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu $\tilde{\varphi}$ $(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η da 1-form olmak üzere

$$\tilde{\varphi}^2 = I - \eta \otimes \xi,\ \tilde{\varphi}(\xi) = 0,\ \eta(\xi) = 1,\ \eta \circ \tilde{\varphi} = 0,\ D = Çek\eta$$

şartını sağlayan bir $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta)$ hemen hemen paradeğme yapısına sahiptir.

$(\tilde{\varphi}, \xi, \eta)$ hemen hemen paradeğme yapısı ile verilen diferensiyellenebilir M manifolduna hemen hemen paradeğme manifold denir.

$M(\tilde{\varphi}, \xi, \eta)$ hemen hemen paradeğme manifoldu üzerinde

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) = -\tilde{g}(X,Y) + \eta(X)\eta(Y),\ \tilde{g}(X,\xi) = \eta(X),\ X,Y \in \chi(M)$$

şartını sağlayan bir $\tilde{g}$ yarı-Riemann metriği vardır. $\tilde{g}$ yarı-Riemann metriği ile verilen bir hemen hemen paradeğme M manifolduna bir hemen hemen paradeğme metrik manifold denir.

$M(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir hemen hemen paradeğme metrik manifold olsun.

$$d\eta(X,Y) = \tilde{\Phi}(X,Y)$$

şartını sağlarsa manifold paradeğme metrik manifold olarak adlandırılır.

Hemen hemen paradeğme metrik yapı normal ise manifold para-Sasakian manifold olarak adlandırılır. Ayrıca her para-Sasakian manifold bir paradeğme metrik manifold dur.

Değme metrik (κ, μ)-uzayı ξ vektör alanı ve

$$R(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \tag{1}$$

eğrilik tensör alanı ile verilen bir (M,φ,ξ,η,g) değme Riemann manifoldudur. Burada κ ve μ reel sayılar ve $2h$ da φ nin ξ yönündeki Lie türevini belirtmektedir.

Sasakian durumun $R(X,Y)\xi = (\eta(Y)X - \eta(X)Y)$ ve $R(X,Y)\xi = 0$ şartını sağlayan değme metrik manifoldların bir genellemesi olarak Riemann manifoldların bu yeni sınıfı Blair ve ark. tarafından tanıtılmıştır (Blair ve ark. 1995). Son zamanlarda, değme Riemann geometride değme (κ, μ)-manifoldlar çok önemli bir başlık olmuştur. (κ, μ)-uzayları çalışmak için bir çok neden vardır. Bunlardan birincisi, Sasakian olmayan durumda $\kappa \neq 1$için (1) durumu eğrilik tensör alanını belirtmektedir. Bundan başka, (κ, μ)-uzayları, değme Riemann manifoldların aşikar olmayan bazı değerli sınıflarını içermektedir. Örnek olarak, CR-integrallenebilir değme metrik manifoldlar (Tanno 1989), H-değme manifoldlar (Perrone 2004), harmonik değme metrik manifoldlar (Vergara-Diaz ve Wood 2006) veya η-paralel torsiyon tensörü ile verilen değme Riemann manifoldlar (Gosh ve Sharma 2008) verilebilir. Ayrıca Boeckx değme metrik (κ, μ)-uzayları için bir sınıflandırma vermiştir (Boeckx 2000).

Değme (κ, μ)- uzayları ve paradeğme geometri arasında bir ilişki Cappelletti Montano ve Di Terlizzi tarafından kuruldu (Cappelletti Montano ve Di Terlizzi 2010). Yine aynı çalışmada herhangi (Sasakian olmayan) değme (κ, μ)-uzayının, Levi-Civita konneksiyonu

$$\tilde{R}(X,Y)\xi = \tilde{\kappa}(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \tilde{\mu}(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y) \tag{2}$$

şartını sağlayan bir kanonik paradeğme metrik yapısı $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ taşıdığı ispatlandı.

İlk olarak 1976 yılında Sato diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde

$$\tilde{\varphi}^2 = I - \eta \otimes \xi\,,\ \eta(\xi) = 1 \text{ ve } D = çek\eta$$

şartını sağlayan $(\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ hemen hemen paradeğme yapıyı tanıtmıştır (Sato 1976).

1977 yılında Adati T ve Miyazawa T, Sato tarafından tanıtılan hemen hemen paradeğme manifoldların özel durumları olarak düşünülen para-Sasakian manifoldları tanımlamışlardır (Adati ve Miyazawa 1977). Hemen hemen değme manifoldlardaki K-değme ve Sasakian yapılara benzer olarak, 1977 yılında Sharfuddin ve Hussain paradeğme metrik ve para-Sasakian yapıları üzerine çalışmışlardır (Sharfuddin ve

Hussain 1977). Kaneyuki ve Williams da paradeğme geometri alanında çalışmışlardır (Kaneyuki ve Williams 1985). Son yıllarda, paradeğme metrik manifoldlar ve bazı altsınıflarına ait (para-Sasakian) çalışmalar Zamkovoy tarafından yürütülmektedir. Hemen hemen paradeğme metrik manifoldların özellikleri ve paradeğme metrik manifoldlarda konformal dönüşümler Zamkovoy tarafından incelenmiştir (Zamkovoy 2009). Paradeğme geometrinin özellikle para-Sasakian geometrinin önemi birçok makale ile vurgulanmıştır (Alekseevsky ve ark. 2009), (Alekseevsky ve ark. 2006), (Cortes ve ark. 2004), (Cortes ve ark. 2006), (Erdem 2002).

Yüksek lisans çalışmasında, hemen hemen paradeğme metrik manifoldu tanımlanıp özellikleri incelenmişti. Bir hemen hemen paradeğme manifoldun torsiyon tensör alanı tanımlanıp, manifold üzerinde normal yapı kurulmuştu. Üstelik bir K-Paradeğme manifoldu tanımlanıp, manifoldun K-Paradeğme olması için bazı şartlar verilmişti. Ayrıca para-Sasakian manifoldu tanıtılıp, manifoldun özellikleri incelenip, paradeğme manifoldların eğrilik özellikleri çalışılmıştı.

Orijinal kısımda, Zbigniew Olszak ın 1986 yılında yaptığı üç boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldları ile ilgili çalışmanın (Olszak 1986), üç boyuttaki normal hemen hemen paradeğme metrik manifoldlardaki karşılıkları bulunmuştu. Normal hemen hemen paradeğme metrik manifoldlar ile ilgili temel önermeler verildikten sonra, manifoldun Ricci eğrilik tensörü hesaplanmıştı ve bir kompakt M manifoldu üzerinde K sabit eğriliğinin sıfırdan büyük, sıfırdan küçük veya eşit olma durumlarına göre sınıflandırma verilmişti.

Doktora tez çalışması ise yüksek lisans tez çalışmasının bir devamı niteliğindedir. Yukarıda verilen çalışmalar bizi (2) eşitliği ile verilen ve sıfırlık durumunu sağlayan paradeğme metrik manifoldların bir sınıfını çalışmaya motive etmiştir. Bu yarı-Riemann manifoldlara paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar denir. Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar çok geniştir. Para-Sasakian manifoldları ve $\tilde{R}(X,Y)\xi=0$ şartını sağlayan paradeğme metrik manifoldları içerir.

Değme Riemann durumundan farklı olarak, $\tilde{\kappa}=-1$ olan bir paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold genellikle para-Sasakian değildir. Aslında paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar için $\tilde{h}^2=0$ $(\tilde{k}=-1)$ fakat $\tilde{h}\neq 0$ geçerlidir.

Değme Riemann durumundan bir başka farkı ise metriğin pozitif tanımlı olma şartı yoktur. Değme metrik (κ, μ)-uzaylarda κ sabiti 1 den büyük olamazken, paradeğme ($\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}$)-uzaylarda $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\mu}$ sabitleri için bir kısıtlama yoktur.

Bu çalışmada $\tilde{\kappa} < -1$ ve $\tilde{\kappa} > -1$ durumlarının tüm özellikleri verilmiştir. $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\mu}$ değerleri değiştikçe (2) formunun D-homotetik deformasyonlar altında değişip değişmediği ve herhangi paradeğme ($\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}$)-manifoldunun integrallenip integrallenemediği araştırılmıştır.

$\tilde{\kappa} < -1$ veya $\tilde{\kappa} > -1$ olma durumlarına göre, manifoldun geometrik davranışı çok farklı olduğundan, ayrı ayrı iki durum da ele alınmıştır. Özellikle, her iki durumda da ($\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}$)-sıfırlık durumunun bütün eğrilik tensör alanını tamamen belirlediği gösterilmiştir.

Paradeğme metrik manifoldu için $\tilde{\kappa} < -1$ veya $\tilde{\kappa} > -1$ olma durumlarının her ikisine göre Riemann eğrilik tensörü hesaplanmıştır.

$\tilde{\kappa} < -1$ olma durumunda, manifoldun boyutu 3 den büyük ise Einstein paradeğme ($\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}$)-metriklerin varlığı gösterilmiştir.

Paradeğme ($\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}$)-manifoldlar ile ilgili $\tilde{\kappa} < -1$ ve $\tilde{\kappa} > -1$ için örnekler verilmiştir.

G. Calvaruso ve D. Perrone ξ karakteristik vektör alanının harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şartın ξ nın değme Yarı-Riemannian manifoldların Ricci operatörünün bir karakteristik vektörü olması gerektiğini ispatlamışlardır (Calvaruso ve Perrone 2013).

(Calvaruso 2011a) da G. Calvaruso, 3-boyutlu Lorentzian Lie gruplarda sol invaryant vektör alanlarının harmonik özelliklerini incelemiş ve birçok sınıflandırma sonuçları elde etmiş ve enerji fonksiyonellerinin kritik noktaları için yeni örnekler vermiştir.

(Calvaruso 2012) de G. Calvaruso, 4-boyutlu yarı-Riemann genelleştirilmiş simetrik uzaylarda vektör alanlarının harmonik özelliklerini çalışmıştır. Ayrıca (Calvaruso 2011b) de, 3-boyutlu homojen paradeğme metrik manifoldların bir sınıflandırmasını vermiştir.

Son zamanlarda, G. Calvaruso ve D. Perrone (Calvaruso ve Perrone arxiv) da tüm 3-boyutlu homojen paradeğme metrik manifoldların H-paradeğme olduğunu yani ξ karakteristik vektör alanı harmonik olan paradeğme metrik manifoldlar olduğunu ispatlamışlardır.

Bu çalışmanın amacı (2) şartını sağlayan paradeğme metrik manifoldları incelemektir. Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlar olup iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Simetrik İki-Lineer Formlar ele alınmıştır. İkinci kısımda Yarı-Riemann manifoldlar tanımlanmış ve bazı temel özelikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde paradeğme manifoldlar incelenmiş olup yedi kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım hemen hemen paradeğme manifoldlara, İkinci kısım hemen hemen paradeğme metrik manifoldlara, Üçüncü kısım hemen hemen paradeğme manifoldların torsiyon tensörüne, Dördüncü kısım K-Paradeğme manifoldlara, Beşinci kısım para-Sasakian manifoldlara, Altıncı kısım paradeğme manifoldların eğriliğine ve yedinci kısım Legendrian foliasyonlara ayrılmıştır.

Dördüncü bölüm, paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara ayrılmış olup üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar ile ilgili Temel Tanımlar ve Teoremlere, ikinci kısım $\tilde{\kappa} > -1$ için paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara üçüncü kısım ise $\tilde{\kappa} < -1$ için paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara ayrılmıştır.

Beşinci bölüm, 3-boyutlu paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlara ayrılmış olup, üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım, $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar ile ilgili sonuçlara ayrılmıştır. İkinci kısımda 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların sınıflandırılması verilmiştir.

Ayrıca, 3-boyutlu harmonik karakteristik vektör alanlı paradeğme metrik manifoldlara ve $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar için sınıflandırmaya ayrılmıştır. Bu bölümde paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Karakteristik vektör alanı ξ harmonik olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifoldlar karakterize edilmiştir. Paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların tanımı kullanılarak, paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir. $\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu}$ değerleri değiştikçe paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar D-homotetik deformasyonlar altında değişmediği ispatlanmıştır. Ayrıca boyut 3 den büyük ve $\tilde{\kappa} \neq -1$ iken paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldun, paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolda dönüştüğü ispatlanmıştır. 5 boyutta $\tilde{h}^2 = 0$ olup $\tilde{h} \neq 0$ olan ilk $(-1,\tilde{\mu},\tilde{\nu} \neq 0)$-paradeğme manifold örneği verilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu paradeğme metrik manifoldlar için ξ karakteristik vektör alanının harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şartın ξ karakteristik vektör alanının, Ricci operatörünün bir karakteristik vektörü olması gerektiği ispatlanmıştır. Ayrıca yine 3-boyutlu M paradeğme metrik manifoldunun karakteristik vektör alanı ξ harmonik ise, M nin her açık ve yoğun alt cümlesinde paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold olduğu ve tersine eğer M bir paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold ise M nin karakteristik vektör alanı ξ harmonik olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bu bölümde, $\tilde{\kappa}=-1$ olan paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların para-Sasakian manifold olması gerekmediği gösterilmiştir. Böylelikle, değme Riemann durumu ile fark ortaya konulmuştur. Son kısımda da, $\xi(I_M)=0$ ile verilen Sasakian olmayan $(\kappa,\mu,\nu=sbt)$-değme metrik manifold ile 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold arasında ilişki verilmiştir. $\tilde{\kappa}=-1$ olup para-Sasakian olmayan örnek verilmiştir. $\tilde{\kappa}>-1$, $\tilde{\kappa}=-1$, $\tilde{\kappa}<-1$ olma durumlarına göre paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların özellikleri incelenip, her bir durum için örnek oluşturulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.0. Giriş

Bu bölüm de daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Simetrik İki-Lineer Formlar ele alınmıştır. İkinci kısımda Yarı-Riemann manifoldlar tanımlanmış ve bazı temel özelikleri verilmiştir.

2.1. Simetrik İki-Lineer Form

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

i) $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \phi(\vec{v}, \vec{u})$

ii) $\phi(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = a\phi(\vec{u}, \vec{w}) + b\phi(\vec{v}, \vec{w})$

$\phi(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = a\phi(\vec{u}, \vec{v}) + b\phi(\vec{u}, \vec{w})$

özelliklerine sahip ise ϕ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir **simetrik iki-lineer form** denir (O'Neill 1983).

Ayrıca,

i) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise, ϕ simetrik iki-lineer formuna **pozitif tanımlı,**

ii) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise, ϕ simetrik iki-lineer formuna **negatif tanımlı,**

iii) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise bu durumda ϕ simetrik iki-lineer formuna **yarı-pozitif tanımlı,**

iv) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise bu durumda ϕ simetrik iki-lineer formuna **yarı-negatif tanımlı** dır denir.

Bundan başka,

a) ϕ nin **dejenere** olmaması için gerek ve yeter koşul $\phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ve

$\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} = \vec{0}$ olmasıdır.

b) ϕ nin **dejenere** olması için gerek ve yeter koşul $\phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ve $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq \vec{0}$ olmasıdır.

Tanım 2.1.2: V bir vektör uzayı ve

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik iki-lineer form olsun.

$$\phi|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna ϕ simetrik iki-lineer formunun **indeksi** denir ve q ile gösterilir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.1: Bir ϕ simetrik iki-lineer formun dejenere olmaması için gerek ve yeter şart ϕ nin herhangi bir baza göre ters matrisinin mevcut olmasıdır (O'Neill, 1983).

Örnek 2.1.1:

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$g(v,w) = v_1 w_1 - v_2 w_2$$

dönüşümü iki-lineer ve simetriktir. g ye karşılık gelen matrisi $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dır ve regülerdir. Böylece g dejenere değildir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.2:

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$g(v,w) = v_1 w_1 - v_2 w_2$$

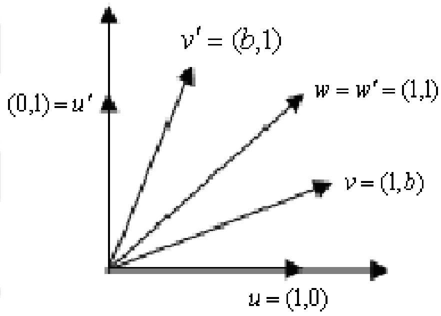
dönüşümü iki-lineer ve simetriktir. g ye karşılık gelen matrisi $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır ve regüler değildir. Böylece g dejeneredir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3: Bir V vektör uzayı üzerinde dejenere olmayan simetrik iki-lineer forma V vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpma** denir. V üzerindeki bir skalar çarpma ϕ ise

(V,ϕ) ikilisine **skalar çarpımlı vektör uzayı** denir. ϕ skalar çarpımının indeksi q ise $0 \le q \le boyV$ dir. Ayrıca skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4: $\vec{v},\vec{w} \in V$ için $\vec{v} \ne \vec{0}$ ve $\vec{w} \ne \vec{0}$ iken $\left\langle \vec{v},\vec{w} \right\rangle = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri **diktir** denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.3: Örnek 2.1.1 deki skalar çarpımı göz önüne alınsın. $\mathbb{R}^2$ de $v=(1,b), v'=(b,1), u=(1,0), u'=(0,1), w=w'=(1,1)$ vektörleri seçilsin.



Dikkat edilirse burada u' ve u, v' ile v, w ile w' birbirine dik vektörlerdir.
$v,w \in V$ ortogonal ise $v \perp w$ yazılır ve $g(v,w)=0$ denklemini sağlar (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5: V vektör uzayının bir altuzayı W ise $W^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in V \middle| \vec{v} \perp W \right\}$ olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V nin **dik altuzayı** denir.

Uyarı 2.1.1: Ancak, $W^{\perp}$ altuzayına W nın dik tümleyeni denilemez. Çünkü $W+W^{\perp}$ genellikle V nin tamamı değildir. Bu aşağıdaki örnek ile açıklanabilir.

Örnek 2.1.4:

$$W = Sp\{(1,1)\} \to W^{\perp} = W$$

Teorem 2.1.2: W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman şu özellikler vardır:

i) $boyW + boyW^{\perp} = boyV$

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6: V üzerinde bir skalar çarpma ϕ ve W, V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde ϕ dejenere değil ise W ya **dejenere olmayan altuzay**, dejenere ise W ya **dejenere altuzay** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.3: V n boyutlu bir vektör uzay ve W, V nin bir altuzayı olsun.
O zaman;

$$W \text{ dejenere değildir} \Leftrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$$

dır.
Burada $W^{\perp}$ altuzayı,

$$W^{\perp} = \left\{ y \middle| \phi(x_0, y) = 0, \forall x_0 \in W, y \in V \right\}$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7: Bir V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma ϕ olsun. $\vec{v} \in V$ **vektörünün normu**

$$\left\| \vec{v} \right\| = \sqrt{\left| \phi\left(\vec{v}, \vec{v} \right) \right|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre **birim vektör** ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine **ortonormal vektör sistemi** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.4: Bir $V \neq \left\{ \vec{0} \right\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill 1983).

Bundan sonra ϕ gösterimi yerine g gösterimi kullanılacaktır.

Teorem 2.1.5: V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve V üzerinde tanımlı bir skalar iç çarpım g olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi q olmak üzere $q=1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir (O'Neill 1983).

2.2. Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1: M bir C^{∞} manifold olsun.

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\to g_p(u,v) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı, simetrik, iki-lineer, dejenere olmayan ve sabit indeksli (0,2) tensör alanı olmak üzere M bir g metrik tensörü ile donatılmışsa (M,g) ye bir **yarı-Riemann manifold** denir (O'Neill 1983).

$p \in M$ noktasında T_pM tanjant uzayının bir ortonormal baz sistemi

$$\begin{aligned} g(e_i,e_i) &= 1, \ 1 \leq i \leq r \\ g(e_j,e_j) &= -1, \ r+1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

şeklinde belirlenebilir. Böylece bu baz sistemine göre g ye karşılık gelen matris

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & 1 & & & . \\ 0 & & & -1 & & 0 \\ . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

formundadır. $q = n - r$ pozitif tamsayısı $\forall p \in M$ noktası için aynıdır.

Bundan sonraki kullanımlarda (M,g) yarı-Riemann manifoldu, kısaca M ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.2: M bir yarı-Riemann manifold olsun. g nin sabit indeksi q ya M **yarı-Riemann manifoldunun indeksi** denir. q indeksli ve n-boyutlu bir yarı-Riemann manifold M_q^n ile gösterilir. Burada metrik tensörün indeksi ile yarı-Riemann manifoldun indeksi gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3: M_q^n bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna **Lorentz manifoldu** denir.
Özel olarak $q = 0$ ise bu durumda M^n bir **Riemann manifoldu** ve g de bir Riemann metriğidir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4: $\mathbb{R}_q^n$ Öklid n-uzay verilsin. $0 \leq q \leq n,$ olmak üzere q tamsayısı için, $\mathbb{R}_q^n$ üzerinde

$$g_p(X_p, Y_p) = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{i=q+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, ve $(\mathbb{R}_q^n, g)$ ikilisi **yarı-Öklid uzay** olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_q^n$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.5: M bir C^∞ yarı-Riemann manifoldu ve g, M üzerinde tanımlanmış bir metrik tensör olsun. Eğer $\forall p \in M$ ve $\vec{v} \in T_p(M)$ için,

$$g\big|_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathrm{R}$$

olmak üzere

i) $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ veya $\vec{v} = \vec{0}$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **uzay benzeri**,

ii) $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **zaman benzeri**,

iii) $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **ışık benzeri (ligtlike)** denir (O'Neill 1983).

Bir yarı-Riemann manifold üzerinde konneksiyon denildiğinde, aksi söylenmedikçe, yarı-Riemann konneksiyonu kastedilecektir. Bu konneksiyon aşağıdaki teorem ile nitelendirilmiştir.

Teorem 2.2.1: g bir yarı-Riemann metrik olsun. $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir tek torsiyonsuz ∇ afin konneksiyonu vardır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \overset{iki-lineer}{\rightarrow} \chi(M)$$

dönüşümü;

$\forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned}
&i)\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \\
&ii)\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \\
&iii)\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \\
&iv)Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),
\end{aligned}$$

özellikleri sağlandığında ∇ ya M^n üzerinde torsiyonsuz bir yarı-Riemann konneksiyon denir. Bu konneksiyona kısaca M^n üzerindeki **yarı-Riemann konneksiyonu** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.7: M bir C^∞ yarı-Riemann manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned}
[\, , \,] : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\
(X, Y) &\rightarrow [X, Y]
\end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[\, , \,]$ ye bir **Lie operatörü** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.8: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için L_X, keyfi bir (p, q) tipinde tensör alanını yine (p, q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre **Lie türev operatörü** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

i) $L_X(f) = X(f), \ \forall f \in C^{\infty}(M, IR)$

ii) $L_X Y = [X, Y], \quad \forall Y \in \chi(M)$

iii) $L_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y), \forall Y, Z \in \chi(M).$

Tanım 2.2.9: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir **Killing vektör alanı** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel q-forma bir diferensiyel $q+1$-form karşılık getiren diferensiyel operatörü **dış türev operatörü** olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir 1-form w ve bir 2-form Ω için d operatörü

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X,Y]$$

ve

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X,Y,Z) &= X(\Omega(Y,Z)) + Y(\Omega(Z,X)) + Z(\Omega(X,Y)) \\ &\quad - \Omega([X,Y],Z) - \Omega([Y,Z],X) - \Omega([Z,X],Y) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Bejancu ve Duggal 1996).

M bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir yarı-Riemann konneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere yarı-Riemann konneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifold ve $x_1, x_2, ..., x_n$, M^n nin lokal koordinatları olsun. $V = f(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ...dx_n$ ve $f(x) > 0$ ise V ye M^n üzerindeki bir **hacim form** denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.2.12: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye **yönlendirilebilir**dir denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.2.13: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir yarı-Riemann konneksiyonu olsun. O zaman,

$R:\chi(M^n)\times\chi(M^n)\times\chi(M^n)\to\chi(M^n)$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.2.1}$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli tensör alanı R ye M^n nin **Riemann eğrilik tensörü** denir. Ayrıca, $\forall\, X,Y,Z,V,W\in\chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

$i) R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z,$
$ii) g(R(X,Y)V,W)=-g(R(X,Y)W,V),$
$iii) R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0,$
$iv) g(R(X,Y)V,W)=g(R(V,W)X,Y)$

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.1: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir yarı-Riemann konneksiyonu ve E (1,1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$((\nabla_X E)Y)=\nabla_X EY-E(\nabla_X Y)$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.2: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall$ X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y,Z)=g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.3: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall$ X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y,Z)=-g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.14: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, lokal ortonormal

vektör alanları olmak üzere,

$S:\chi(M)\times\chi(M)\to\mathbb{R}$

$$(X,Y)\to S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.2.2}$$

$$S=iz\{R\to R(X,.)Y\}$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** denir.

Ayrıca, (0,2)-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y)=g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.15: M n-boyutlu bir yarı-Riemann manifold olsun. $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye **Einstein manifoldu** ve M nin Ricci tensörü S

$$S(X,Y)=ag(X,Y)+b\eta(X)\eta(Y)$$

$a,b : M \xrightarrow{C^\infty} R$ formunda ise M ye η **-Einstein manifoldu** denir. Ricci tensör S özdeş olarak sıfıra eşitse manifold **Ricci-flat** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.16: M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i S(e_i, e_i)$$

değerine M nin **skalar eğriliği** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.17: M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için T_pM^n nin $r-$boyutlu altuzayı ($r \le n$) D ve D_p nin bir kolleksiyonu $D=\{D_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında hala D_p nin bir bazı oluyorsa D ye M^n üzerinde bir $r-$**boyutlu dağılım** ve $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ cümlesine U üzerinde D için bir **lokal baz** denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.2.18: M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. M^n nin bir haritası $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa X haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına **integrallenebilirdir** denir (Sharpe 1997).

Teorem 2.2.2: (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Lie grupları öyle gruplardır ki aynı zamanda birer diferensiyellenebilen manifoldlardır. Bu da Lie grubunun işleminin diferensiyellenebilir olduğunu ifade eder.

Tanım 2.2.19: Bir *M* diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa *(M,G)* ikilisine bir **Lie grubu** denir.

(L.1) *M* nin noktaları ile G nin elemanları çakışır.

(L.2) $$\begin{array}{l} M \times M \to M \\ (a\ ,\ b) \to ab^{-1} \end{array}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

M ye Lie grubunun temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir. (Brickell ve Clark 1970).

Buna göre bir Lie grubunu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz:

G bir grup ve $(a\ ,\ b) \to ab^{-1}$ şeklinde tanımlanan

$$\mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathsf{G}$$

grup işlemi C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir olsun. Eğer G bir diferensiyellenebilir manifold ise G ye bir **Lie grubu** denir.

Tanım 2.2.20: G bir reel vektör uzayı olsun. G üzerinde bracket operatörü denen bir iki lineer

$$[\,,\,]:\ \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$
$$(x\,,y) \to [x,y]$$

dönüşümü

(i) $[x,y] = -[y,x]$ (ters simetri özelliği)

(ii) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ (jacobi özdeşliği)

olacak şekilde tanımlanırsa G vektör uzayına yani $(\mathbf{G}\,,[\,,\,])$ ikilisine bir **Lie cebiri** denir ve $\mathfrak{g}$ ile gösterilir (Brickell ve Clark 1970).

Her bir Lie grubuna eşlik eden sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır. Bu nedenle Lie grupları teorisi Lie cebirleri ile Lie grupları arasındaki bağlılığa önemli bir yer ayırır. Böylece Lie grubunun özellikleri bu gruba karşılık gelen Lie cebirlerine birer özellik olarak aksettirilir.

Tanım 2.2.21: G bir Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. $\forall\ g_1, g_2 \in$ G için

$$(l_{g_1})_* X(g_2) = X(g_1, g_2)$$

koşulunu sağlayan X vektör alanına **sol invaryant vektör alanı** denir.

G bir Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. $\forall\ g_1, g_2 \in$ G için

$$(r_{g_1})_* X(g_2) = X(g_2, g_1)$$

koşulunu sağlayan X vektör alanına **sağ invaryant vektör alanı** denir (Brickell ve Clark 1970).

3. PARADEĞME MANİFOLDLAR

3.0. Giriş

Bu bölümde konunun anlaşılabilirliğini sağlayacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen paradeğme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 3.1.1: M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, $\tilde{\varphi},\xi,\eta$ da M^{2n+1} üzerinde sırasıyla, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer $\tilde{\varphi},\xi,\eta$ için, M^{2n+1} üzerinde,

i) $\eta(\xi)=1,$ (3.1.1)

ii) $\tilde{\varphi}^2 = Id - \eta \otimes \xi,$ (3.1.2)

iii) $D =$ çekirdek η; η tarafından üretilen dağılım (3.1.3)

(D hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir.)

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman $(\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ üçlüsüne M üzerinde bir **hemen hemen paradeğme yapı** ve bu yapı ile birlikte $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ dörtlüsüne bir **hemen hemen paradeğme manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.1.1: $(M^{2n+1},\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ dörtlüsü hemen hemen paradeğme manifold olmak üzere;

i) $\tilde{\varphi}(\xi)=0,$ (3.1.4)

ii) $\eta \circ \tilde{\varphi} = 0,$ (3.1.5)

iii) $\operatorname{rank}\tilde{\varphi} = 2n$ (3.1.6)

dir (Zamkovoy 2009).

3.2. Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen paradeğme manifoldlar üzerinde bir metrik tanımlanacak ve bazı özellikleri ele alınacaktır.

Teorem 3.2.1: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ 2n+1-boyutlu bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. Bu durumda M manifoldu üzerinde bir $\overline{G}$ yarı-Riemann metrik tensör alanı

$$\overline{G}(X,\xi)=\eta(X),\ \forall X\in\chi(M) \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde vardır (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.2.2: $(M^{2n+1},\widetilde{\varphi},\xi,\eta)$ bir hemen hemen paradeğme diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $\xi\in\chi(M)$ için,

i) $\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}(X),\widetilde{\varphi}(Y))=-\widetilde{g}(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$ (3.2.2)

ii) $\eta(X)=\widetilde{g}(X,\xi)$ (3.2.3)

özelliklerini sağlayacak şekilde bir $\widetilde{g}$ yarı-Riemann metriği vardır (Zamkovoy 2009).

Sonuç 3.2.1: M hemen hemen paradeğme manifoldu üzerinde

$$\eta(X)=\widetilde{g}(X,\xi)$$
$$\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}(X),\widetilde{\varphi}(Y))=-\widetilde{g}(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde $\widetilde{g}$ yarı-Riemann metriği için,

$$\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)+\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)=0$$

dır (Zamkovoy 2009).

Tanım 3.2.1: $(M^{2n+1},\widetilde{\varphi},\xi,\eta)$ bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. (3.2.2) ve (3.2.3) koşullarını sağlayan $\widetilde{g}$ yarı-Riemann metriğine $(M^{2n+1},\widetilde{\varphi},\xi,\eta)$ üzerinde **hemen hemen paradeğme metrik**, $(\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ yapısına da **hemen hemen paradeğme metrik yapı**, $(M^{2n+1},\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ beşlisine de **hemen hemen paradeğme metrik manifold** denir (Zamkovoy 2009).

$(\widetilde{\phi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ hemen hemen paradeğme metrik yapısı ile birlikte M^{2n+1} için lokal ortonormal baz sistemi inşa edilebilir. M^{2n+1}nin bir koordinat komşuluğu U olsun. U da ξ ya ortogonal olacak şekilde bir birim vektör alanı X_1 olsun ve $\left|\widetilde{\phi}X_1\right|^2=-1$ dir. Bu durumda (3.1.4), (3.1.5), (3.2.2) den

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X_1,\xi)&=\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}^2X_1,\widetilde{\varphi}\xi)+\eta(\widetilde{\varphi}X_1)\eta(\xi)\\&=0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X_1,X_1)&=-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}^2X_1,\widetilde{\varphi}X_1)-\eta(\widetilde{\varphi}X_1)\eta(X_1)\\&=-\widetilde{g}(X_1,\widetilde{\varphi}X_1)\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X_1, X_1) = 0$$

olacak şekilde $\widetilde{\varphi}X_1, \xi$ ve X_1 e diktir. Benzer şekilde U üzerinde ξ, X_1 ve $\widetilde{\varphi}X_1$ e dik olacak şekilde bir X_2 birim vektör alanı alınabilir. $\left|\widetilde{\phi}X_2\right|^2 = -1$ olur. $\widetilde{\varphi}X_2, \xi, X_1, \widetilde{\varphi}X_1$ ve X_2 ye diktir. Bu şekilde devam edilirse U üzerinde bir $\left(X_i, \widetilde{\varphi}X_i, \xi\right), i = 1...n$ lokal ortonormal bazı elde edilir ve bu baza $\widetilde{\varphi}$ -bazı denir (Zamkovoy 2009).

Böylece M^{2n+1} in indeksi n-dir.

Tanım 3.2.2: M üzerinde bir $(\widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ hemen hemen paradeğme metrik yapısı verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\widetilde{\Phi}(X, Y) = \widetilde{g}(X, \widetilde{\varphi}Y) \tag{3.2.4}$$

şeklinde tanımlı antisimetrik $\widetilde{\Phi}$ dönüşümüne $(\widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ hemen hemen paradeğme metrik yapısının **Temel 2-Formu** denir (Zamkovoy 2009).

Sonuç 3.2.2: M^{2n+1} yarı-Riemann manifoldu olsun. $\widetilde{\Phi}$ temel 2-form ters simetriktir ve Tanım 3.2.2 yardımıyla $\eta \wedge \widetilde{\Phi}^n \neq 0$ dır.

Tanım 2.2.11, Tanım 2.2.12 ve Sonuç 3.2.2 yardımıyla Sonuç 3.2.3 verilebilir.

Sonuç 3.2.3 M^n üzerinde bir hemen hemen paradeğme metrik yapısı $(\widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ olmak üzere M^n yönlendirilebilirdir.

3.3. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldların Torsiyon Tensörü

Tanım 3.3.1: M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M nin her p noktası için $J^2 = I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması varsa, o zaman M üzerindeki $(1,1)$ tipindeki J tensör alanına bir **hemen hemen parakompleks yapı** denir. Bir J hemen hemen parakompleks yapısı ile verilen manifolda bir **hemen hemen parakompleks manifold** denir (Kaneyuki ve Willams 1985).

Teorem 3.3.1: $(M^{2n+1},\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. Bu taktirde $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı vardır (Kaneyuki ve Willams 1985).

Tanım 3.3.2: J, M^n üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı olsun. M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü;

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$
$$= [X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$

şeklindedir (Bucki ve Miernowski 1985).

Tanım 3.3.3: (M^{2n},J) hemen hemen parakompleks manifold olsun. O zaman, $N_J=0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilir** dir denir (Bucki ve Miernowski 1985).

Tanım 3.3.4: Eğer $M^{2n}\times\mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen parakompleks yapısı integrallenebilir ise $(\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ hemen hemen paradeğme yapısına **normal** dir denir.

Şimdi dört tane tensör alanı $N^{(1)},N^{(2)},N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y)=N_{\tilde{\varphi}}(X,Y)-2d\eta(X,Y)\xi$$
$$N^{(2)}(X,Y)=\left(L_{\tilde{\varphi}X}\eta\right)Y-\left(L_{\tilde{\varphi}Y}\eta\right)X$$
$$N^{(3)}(X,Y)=\left(L_{\xi}\tilde{\varphi}\right)X$$
$$N^{(4)}(X,Y)=(L_{\xi}\eta)X$$

olarak tanımlansın.

Yardımcı Teorem 3.3.1: Bir hemen hemen $(\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ paradeğme yapısı için;

$N^{(1)}=0$ ise $N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$ dır (Zamkovoy 2009).

Önerme 3.3.1: M nin $(\tilde{\varphi},\xi,\eta)$ hemen hemen paradeğme yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_{\tilde{\varphi}}-2d\otimes\xi=0$$

olmasıdır (Zamkovoy 2009).

3.4. K-Paradeğme Manifoldlar

Tanım 3.4.1: $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen paradeğme metrik manifoldu $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ olsun. Eğer $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$d\eta(X,Y)=\frac{1}{2}\big(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\big)$$

olarak tanımlandığında

$$\tilde{\Phi}\,(X,Y)=\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}(Y))=d\eta(X,Y)$$

oluyorsa $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ dörtlüsüne paradeğme metrik yapı ve $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ ye de **paradeğme metrik manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Tanım 3.4.2: $(2n+1)$-boyutlu bir M paradeğme metrik manifoldu verilsin. Eğer $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ hemen hemen paradeğme metrik yapısında yer alan ξ vektör alanı $\tilde{g}$ ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapıya **K-paradeğme yapı** ve M ye de **K-paradeğme manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.4.1: $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldu, $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda $N^{(2)}=N^{(4)}=0$ dır. Ayrıca $N^{(3)}=0 \Leftrightarrow \xi$ Killing vektör alanıdır (Zamkovoy 2009).

Önerme 3.4.1: M^{2n+1} bir paradeğme metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} in K-paradeğme manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\tilde{\nabla}_X\xi=-\tilde{\varphi}X \tag{3.4.1}$$

olmasıdır (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.4.1 yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.4.2: M^{2n+1} bir paradeğme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin K-paradeğme manifold olması için gerek ve yeter şart $N^3=0$ olmasıdır (Zamkovoy 2009).

Yardımcı Teorem 3.4.1: M nin bir $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ hemen hemen paradeğme metrik yapısı için

$$2g\big((\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y,Z\big)=-3d\tilde{\Phi}(X,\tilde{\varphi}Y,\tilde{\varphi}Z)-3d\tilde{\Phi}(X,Y,Z)-g(N^{(1)}(Y,Z),\tilde{\varphi}X)$$

$$+N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\tilde{\varphi}Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\tilde{\varphi}Z,X)\eta(Y)$$

dır (Zamkovoy 2009).

Yardımcı Teorem 3.4.2: $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme metrik yapısına sahip ve $\tilde{\Phi}=d\eta$ ve $N^{(2)}=0$ özelliğindeki M manifoldu için

$$2\tilde{g}\left((\nabla_X\tilde{\varphi})Y,Z\right)=-g(N^{(1)}(Y,Z),\tilde{\varphi}X)+2d\eta(\tilde{\varphi}Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\tilde{\varphi}Z,X)\eta(Y) \qquad (3.4.2)$$

dır (Zamkovoy 2009).

Sonuç 3.4.1: (3.4.2) denkleminde X yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned}
2g\left((\tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi})Y,Z\right) &= -g(N^{(1)}(Y,Z),\tilde{\varphi}\xi)+2d\eta(\tilde{\varphi}Y,\xi)\eta(Z)-2d\eta(\tilde{\varphi}Z,\xi)\eta(Y)\\
&=2\tilde{\Phi}(\tilde{\varphi}Y,\xi)\eta(Z)-2\tilde{\Phi}(\tilde{\varphi}Z,\xi)\eta(Y)\\
&=2g(\tilde{\varphi}Y,\tilde{\varphi}\xi)\eta(Z)-2g(\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}\xi)\eta(Y)\\
&=0
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece bir paradeğme metrik manifoldda

$$\tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi}=0 \qquad (3.4.3)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.4.2: Bir paradeğme metrik manifoldda ξ nın integral eğrisi bir geodeziktir (Zamkovoy 2009).

Bir paradeğme manifold üzerinde

$$\begin{aligned}
\tilde{h}:\chi(M)&\to\chi(M)\\
X&\to\tilde{h}(X)=\frac{1}{2}(L_\xi\tilde{\varphi})(X)=\frac{1}{2}\left(L_\xi\tilde{\varphi}(X)-\tilde{\varphi}L_\xi(X)\right)
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\tilde{h}$ tensör alanı tanımlansın.

X yerine ξ alınırsa

$$\tilde{h}\xi=\frac{1}{2}(L_\xi\tilde{\varphi})(\xi)=\tilde{\varphi}[\xi,\xi]-[\tilde{\varphi}\xi,\xi]=0$$

$$\tilde{h}\xi=0 \qquad (3.4.4)$$

olduğu görülür (Zamkovoy 2009).

Yardımcı Teorem 3.4.3: Bir paradeğme metrik manifoldda, $\tilde{h}$ bir simetrik operatördür. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -\tilde{\varphi}X + \tilde{\varphi}\tilde{h}X \tag{3.4.5}$$

dır. $\tilde{h}$, $\tilde{\varphi}$ ile anti-değişmelidir ve iz$\tilde{h} = 0 = \tilde{h}\xi$ dır (Zamkovoy 2009).

3.5. Para-Sasakian Manifoldlar

Tanım 3.5.1: $2n+1$-boyutlu bir paradeğme metrik manifold $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ olsun. Eğer M nin paradeğme metrik yapısı normal ise bu durumda M manifoldu bir para-Sasakian yapıya sahiptir ve M manifolduna da **para-Sasakian manifold** denir. Bir para-Sasakian manifold, bir paradeğme metrik manifolddur fakat tersi her zaman doğru değildir (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.5.1: M^{2n+1} bir paradeğme metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} de bir $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ hemen hemen paradeğme metrik yapısı bir para-Sasakian yapıdır gerek ve yeter şart

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi})Y = -\tilde{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X \tag{3.5.1}$$

denkleminin sağlanmasıdır, burada $\tilde{\nabla}$, $\tilde{g}$ ye göre yarı-Riemann konneksiyondur. Özellikle bir para-Sasakian manifold, K-paradeğmedir (Zamkovoy 2009).

3.6. Paradeğme Manifoldların Eğriliği

Önerme 3.6.1: Bir M^{2n+1} paradeğme metrik manifoldunda

$$(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h})X = -\tilde{\varphi}X + \tilde{h}^2\tilde{\varphi}X + \tilde{\varphi}\tilde{R}(\xi, X)\xi \tag{3.6.1}$$

$$\left(\tilde{R}(\xi, X)\xi + \tilde{\varphi}\tilde{R}(\xi, \tilde{\varphi}X)\xi\right) = 2\tilde{\varphi}^2 X - 2\tilde{h}^2 X \tag{3.6.2}$$

dır. Burada ξ karakteristik vektör alanıdır ve $X \in M^{2n+1}$ dir (Zamkovoy 2009).

Sonuç 3.6.1: Bir M^{2n+1} paradeğme metrik manifoldunda, ξ doğrultusunda Ricci eğriliği

$$S(\xi, \xi) = -2n + iz\tilde{h}^2$$

şeklinde verilir (Zamkovoy 2009).

Önerme 3.6.2: M^{2n+1} bir K-paradeğme manifold olsun. M^{2n+1} de Q Ricci eğrilik operatörü olmak üzere

$$Q\xi = -2n\xi$$

dir (Zamkovoy 2009).

Önerme 3.6.3: Bir para-Sasakian manifoldda

$$\tilde{R}(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

dır (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.6.1: $(M^{2n+1},\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme metrik manifoldu üzerinde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}X}\tilde{\varphi})\tilde{\varphi}Y - (\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y = 2\tilde{g}(X,Y)\xi - \eta(Y)(X - \tilde{h}X + \eta(X)\xi), \tag{3.6.3}$$

$$\tilde{R}(\xi,X)\xi + \tilde{\varphi}\tilde{R}(\xi,\tilde{\varphi}X)\xi = 2(\tilde{\varphi}^2 X - \tilde{h}^2 X), \tag{3.6.4}$$

$$\tilde{R}(\xi,X,Y,Z) = -\tilde{g}(Y,(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Z) + \tilde{g}(X,(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi}\tilde{h})Z) - \tilde{g}(X,(\tilde{\nabla}_Z\tilde{\varphi}\tilde{h})Y), \tag{3.6.5}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(\xi,X,Y,Z) + \tilde{R}(\xi,X,\tilde{\varphi}Y,\tilde{\varphi}Z) - \tilde{R}(\xi,\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y,Z) - \tilde{R}(\xi,\tilde{\varphi}X,Y,\tilde{\varphi}Z)\\ &= -2(\tilde{\nabla}_{\tilde{h}X}\tilde{\Phi})(Y,Z) + 2\eta(Y)\tilde{g}(X - \tilde{h}X,Z) - 2\eta(Z)\tilde{g}(X - \tilde{h}X,Y).\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Burada $\tilde{\Phi} := \tilde{g}(.,\tilde{\varphi}.)$ paradeğme metrik yapının Temel 2-formudur (Zamkovoy 2009).

Ayrıca Zamkovoy, herhangi bir paradeğme metrik manifold üzerinde, bir değme metrik manifoldda genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonun paradeğme geometrisi ile (Tanno 1989) aynı rolü üstlenen bir kanonikal konneksiyon tanıtmıştır.

Teorem 3.6.2: Herhangi bir paradeğme metrik manifold üzerinde kanonikal paradeğme konneksiyon olarak adlandırılan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir tek $\tilde{\nabla}^{pc}$ konneksiyonu vardır;

(i) $\tilde{\nabla}^{pc}\eta = 0,\ \tilde{\nabla}^{pc}\xi = 0,\ \tilde{\nabla}^{pc}\tilde{g} = 0,$

(ii) $(\tilde{\nabla}^{pc}_X\tilde{\varphi})Y = (\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y + \tilde{g}(X - \tilde{h}X,Y)\xi - \eta(Y)(X - \tilde{h}X),$

(iii) $\tilde{T}^{pc}(\xi,\tilde{\varphi}Y) = -\tilde{\varphi}\tilde{T}^{pc}(\xi,Y),$

(iv) $\tilde{T}^{pc}(X,Y) = 2d\eta(X,Y)\xi \quad D = \ker(\eta).$

Ayrıca $\tilde{\nabla}^{pc}$ konneksiyonu

$$\widetilde{\nabla}^{pc}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \eta(X)\widetilde{\varphi}Y + \eta(Y)(\widetilde{\varphi}X - \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X) + \widetilde{g}(X - \widetilde{h}X, \widetilde{\varphi}Y)\xi \tag{3.6.7}$$

denklemi ile verilir (Zamkovoy 2009).

$X, Y \in \Gamma(D)$ için eğer $N_{\widetilde{\varphi}}(X,Y) \in \Gamma(\mathbb{R}\xi)$ ise $(\widetilde{\varphi}, \xi, \eta)$ hemen hemen paradeğme yapısına integrallenebilir denir. Paradeğme metrik yapılar için integrallenebilme şartı $\widetilde{\nabla}^{pc}\widetilde{\varphi} = 0$ dır (Zamkovoy 2009).

3.7. Legendrian Foliasyonları

Tanım 3.7.1: (M, η) değme manifoldu üzerinde tüm $X, Y \in \Gamma(L)$ için $d\eta(X, X') = 0$ şartını sağlayan değme dağılımın bir n-boyutlu alt demeti L ye **Legendrian dağılım** denir ve L nin integrallenebilir olması için $2d\eta(X, X') = X(\eta(X')) - X'(\eta(X)) - \eta([X, X']) = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekmektedir (Pang 1990).

L integrallenebilir olduğunda, (M, η) nın bir Legendrian foliasyonunu tanımlar. Legendrian foliasyonlar son zamanlarda birçok kişi tarafından çalışılmaktadır. Özellikle Pang, F foliasyonunun teğet demeti üzerindeki

$$\Pi_F(X, X') = -(\mathrm{L}_X \mathrm{L}_{X'}\eta)(\xi) = 2d([\xi, X], X') \tag{3.7.1}$$

ile tanımlanan simetrik iki-lineer form Π_F yi kullanarak Legendrian foliasyonların bir sınıfını verip Π_F nin sıfır, dejenere, dejenere olmaması, pozitif(negatif) tanımlı olmasına göre F yi flat, dejenere, dejenere olmayan, pozitif(negatif) tanımlı olarak adlandırdı (Pang 1990).

Libermann, dejenere olmayan Legendrian foliasyonu için

$$\Pi_F(\wedge_F Z, X) = d\eta(Z, X) \tag{3.7.2}$$

eşitliği ile tanımlanan $\wedge_F : TM \to TF$ lineer dönüşümü tanımladı (Libermann 1991). Burada $Z \in \Gamma(TM)$, $X \in \Gamma(TF)$ dir. $\wedge_F$ operatörü örtendir ve $\forall X \in \Gamma(TF)$ için $(\wedge_F)^2 = 0$ ve $\wedge_F[\xi, X] = \frac{1}{2}X$ özelliklerini sağlar.

$$\overline{\Pi}_F(Z, Z') := \begin{cases} \Pi_F(Z, Z'), & Z, Z' \in \Gamma(TF) \\ \Pi_F(\wedge_F Z, \wedge_F Z'), & \end{cases}$$

şartı koyularak Π_F, TM üzerindeki simetrik iki-lineer forma genişletilebilir.

Tanım 3.7.2: (M,η) değme manifoldu, $TM = L_1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{R}\xi$ şeklinde verilen iki dik Legendrian dağılıma sahipse manifolda **hemen hemen bi-Legendrian manifold** denir. (L_1, L_2) ye (M,η) değme manifoldu üzerinde bir **hemen hemen bi-Legendrian yapı** denir. L_1 ve L_2 ikisi de integrallenebilirse manifolda **bi-Legendrian manifold** denir (Cappelletti Montano 2009a).

Herhangi $(M^{2n+1}, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ paradeğme metrik manifoldu, ± 1karakteristik değerlere karşılık gelen $\tilde{\varphi}$ nin D^+ve D^-karakteristik dağılımları ile verilen hemen hemen bi-Legendrian yapıya sahiptir.

Tersine, her hemen hemen bi-Legendrian manifold paradeğme metrik yapıya sahiptir (Cappelletti Montano 2009a).

Paradeğme geometrideki integrallenebilme koşulu ($\nabla^{pc}\tilde{\varphi} = 0$) Legendrian dağılımları $D^{\pm}$ nin integrallenebilmesine denktir.

Herhangi hemen hemen bi-Legendrian manifold, hemen hemen bi-Legendrian manifoldlardaki çalışmalarda önemli role sahip bi-Legendrian konneksiyon olarak adlandırılan konneksiyona sahiptir.

Teorem 3.7.1: (M, η, L_1, L_2) hemen hemen bi-Legendrian manifold olsun.

(i) $\nabla^{bl} L_1 \subset L_1,\ \nabla^{bl} L_2 \subset L_2,\ \nabla^{bl}\ \mathbb{R}\xi) \subset \mathbb{R}\xi$

(ii) $\nabla^{bl} d\eta = 0,$

(iii) $$\begin{aligned} T^{bl}(X,Y) &= 2d\eta(X,Y)\xi;\ \forall X \in \Gamma(L_1), Y \in \Gamma(L_2) \\ T^{bl}(X,\xi) &= [\xi, X_{L_1}]L_2 + [\xi, X_{L_2}]L_1;\ \forall X \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek ∇^{bl} konneksiyonu vardır. Burada X_{L_1} ve X_{L_2} ile sırasıyla; X in $TM = L_1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{R}\xi$ ayrışımına göre TM nin L_1ve L_2 altdemetlerine olan izdüşümleri belirtilmektedir (Cappelletti Montano 2005).

Bi-Legendrian konneksiyonunun özelliklerini kullanarak, değme metrik (κ, μ)-uzayları ve Legendrian foliasyonları arasında ilişki aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.7.2: (M,φ,ξ,η,g), K-değme olmayan bir değme metrik manifold olsun. (M,φ,ξ,η,g) nin bir değme metrik (κ,μ)-manifold olması için gerek ve yeter şart birbirine dik L ve Q Legendrian dağılımlarına sahip olması ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek $\overline{\nabla}$ lineer konneksiyonuna sahip olmasıdır :

(i) $\overline{\nabla}L \subset L,\ \overline{\nabla}Q \subset Q,$

(ii) $\overline{\nabla}\eta = 0,\ \overline{\nabla}d\eta = 0,\ \overline{\nabla}g = 0,\ \overline{\nabla}\varphi = 0,\ \overline{\nabla}h = 0,$

(iii) $\begin{array}{l} \overline{T}(X,Y) = 2d\eta(X,Y)\xi;\ \forall X,Y \in \Gamma(D), \\ \overline{T}(X,\xi) = [\xi, X_L]_Q + [\xi, X_Q]_L;\ \ \forall X \in \Gamma(TM) \end{array}$

(Cappelletti Montano ve Di Terlizzi 2008).

Daha da ötesi; $\overline{\nabla}$ tek olarak bellidir ve (L,Q) nun bi-Legendrian konneksiyonu ile çakışır. L ve Q integrallenebilirdir ve h nın $D_h(\lambda)$ ve $D_h(-\lambda)$ karakteristik uzayları ile çakışırlar.

Bir sonraki teorem ile değme (κ,μ)-manifoldlar ile paradeğme geometri arasındaki ilişki kurulmuştur.

Teorem 3.7.3: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ)-uzayı olduğunda M nin $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ kanonikal paradeğme metrik yapısı

$$\tilde{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}h, \qquad \tilde{g} := \frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}d\eta(.,h.) + \eta\otimes\eta \tag{3.7.3}$$

ile verilir.

Ayrıca, $(M,\tilde{g})$ nin Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensör alanı $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-sıfırlık durumunu

$$\tilde{R}(X,Y)\xi = \tilde{\kappa}\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) + \tilde{\mu}\big(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y\big) \tag{3.7.4}$$

sağlar. Burada $\tilde{\kappa} = \kappa - 2 + \left(1-\dfrac{\mu}{2}\right)^2$, $\tilde{\mu} = 2$ dir (Cappelletti Montano ve Di Terlizzi 2010).

Teorem 3.7.4: (M,η,L_1,L_2) bir hemen hemen bi-Legendrian manifold ve (ψ,ξ,η,g) M üzerine indirgenmiş kanonikal paradeğme metrik yapı olsun. ∇^{bl} ve ∇^{pc} sırasıyla bi-Legendrian ve kanonikal paradeğme konneksiyonları olsunlar. O halde

(a) $\nabla^{bl}\psi = 0$, $\nabla^{bl} g = 0$;

(b) bi-Legendrian ve kanonikal paradeğme konneksiyonlarının çakışması için gerek ve yeter şart indirgenmiş paradeğme metrik yapının integrallenebilir olmasıdır (Cappelletti Montano 2009a).

Teorem 3.7.5: (M,ϕ,ξ,η,g), K-değme olmayan bir değme metrik (κ,μ)-uzayı olsun. $D(\lambda)$ ve $D(-\lambda)$ Legendrian foliasyonlarının Pang invaryantları

$$\Pi_{D(\lambda)} = \frac{(\lambda+1)^2-\kappa-\mu\lambda}{\lambda} g\big|_{D(\lambda)\times D(\lambda)} = (2\sqrt{1-\kappa}-\mu+2)g\big|_{D(\lambda)\times D(\lambda)} \tag{3.7.5}$$

$$\Pi_{D(-\lambda)} = \frac{-(\lambda-1)^2+\kappa-\mu\lambda}{\lambda} g\big|_{D(-\lambda)\times D(-\lambda)} = (-2\sqrt{1-\kappa}-\mu+2)g\big|_{D(-\lambda)\times D(-\lambda)} \tag{3.7.6}$$

ile verilir (Cappelletti Montano ve Di Terlizzi 2008).

Sonuç 3.7.1: Bir hemen hemen bi-paradeğme yapı (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3)nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart D değme dağılımı üzerinde $N^{(1)}_{\phi_1}, N^{(1)}_{\phi_2}$ tensör alanlarının sıfır olmasıdır. Ayrıca, integrallenebilir hemen hemen bi-paradeğme manifoldunda D değme dağılımı üzerinde $N^{(1)}_{\phi_3}$ değeri sıfırdır (Cappelletti Montano 2010b).

Teorem 3.7.6: (M,ϕ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ)-manifold olsun. (M,ϕ,ξ,η,g) ile ilişkili olan $(D(\lambda), D(-\lambda))$ bi-Legendrian yapısı flat değildir. Daha açık olarak aşağıdaki durumlardan sadece biri var ve geçerlidir:

(I) $D(\lambda)$ ve $D(-\lambda)$ pozitif tanımlı;

(II) $D(\lambda)$ pozitif tanımlı ve $D(-\lambda)$ negatif tanımlı;

(III) $D(\lambda)$ ve $D(-\lambda)$ negatif tanımlı;

(IV) $D(\lambda)$ pozitif tanımlı ve $D(-\lambda)$ flat;

(V) $D(\lambda)$ flat ve $D(-\lambda)$ negatif tanımlı.

Ayrıca, M nin (I), (II), (III), (IV), (V) sınıflarından birine ait olması için gerek ve yeter şart sırasıyla $I_M > 1$, $-1 < I_M < 1$, $I_M < -1, I_M = 1, I_M = -1$ şartlarının sağlanmasıdır (Cappelletti Montano 2009b).

Yardımcı Teorem 3.7.1: (M, ϕ, ξ, η, g) L Legendrian dağılımı ile verilen bir değme metrik manifold olsun. $Q := \phi L$, L nin eşlenik Legendrian dağılımı ve ∇^{bl} ise (L, Q) ile ilişkili olan bi-Legendrian konneksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\nabla^{bl} g = 0.$

(ii) $\nabla^{bl} \phi = 0.$

(iii) $\nabla^{bl}{}_X X' = -(\phi[X, \phi X'])_L$ tüm $X, X' \in \Gamma(L)$, $\nabla^{bl}{}_Y Y' = -(\phi[Y, \phi Y'])_Q$ tüm $Y, Y' \in \Gamma(Q)$ ve h tensör alanı L altdemetini L ye ve Q altdemetini Q ya resmeder.

Ayrıca, L ve Q nun integrallenebilir olduğu kabul edilirse, (i)-(iv) şartları, L ve Q tarafından tanımlanan Legendrian foliasyonların total geodezikliğine eşdeğerdir (Cappelletti Montano 2010a).

4. PARADEĞME $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})-$MANİFOLDLAR

4.0. Giriş

Bu bölümde Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildikten sonra $\tilde{\kappa}>-1$ ve $\tilde{\kappa}<-1$ olma durumuna göre Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar iki kısımda incelenecektir.

4.1. Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-Manifoldlarlar ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda (4.1.1) şartını sağlayan paradeğme metrik manifoldların bazı temel özellikleri verilecektir.

Tanım 4.1.1: Eğrilik Tensör alanı

$$\tilde{R}(X,Y)\xi=\tilde{\kappa}\big(\eta(Y)X-\eta(X)Y\big)+\tilde{\mu}\big(\eta(Y)\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{h}Y\big) \tag{4.1.1}$$

eşitliğini sağlayan bir paradeğme metrik manifolda **paradeğme metrik** $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-**manifold** denir. Burada X,Y; M üzerindeki vektör alanlarıdır ve $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\mu}$ reel sabitlerdir (Cappelletti Montano ve Di Terlizzi 2010).

Yardımcı Teorem 4.1.1: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$\tilde{h}^2=(1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^2, \tag{4.1.2}$$

$$\tilde{Q}\xi=2n\tilde{\kappa}\xi, \tag{4.1.3}$$

$$(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y=-\tilde{g}(X-\tilde{h}X,Y)\xi+\eta(Y)(X-\tilde{h}X),\quad \tilde{\kappa}\neq-1, \tag{4.1.4}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{h})X&=-(1+\tilde{\kappa})(2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\xi+\eta(X)\tilde{\varphi}Y-\eta(Y)\tilde{\varphi}X)\\&\quad+(1-\tilde{\mu})(\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y-\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$$\tilde{\nabla}_\xi\tilde{h}=\tilde{\mu}\tilde{h}\circ\tilde{\varphi},\quad \tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi}\tilde{h}=-\tilde{\mu}\tilde{h} \tag{4.1.6}$$

Burada X *ve* Y, M üzerindeki vektör alanlarıdır ve $\widetilde{Q}$ ise $(M,\widetilde{g})$ nin Ricci operatörüdür (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat : $\widetilde{l}X = \widetilde{R}(X,\xi)\xi$ olduğu göz önüne alınıp (4.1.1) eşitliğinde Y yerine ξ yazılırsa

$$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = \widetilde{\kappa}(X-\eta(X)\xi)+\widetilde{\mu}(\widetilde{h}X) \tag{4.1.7}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte (3.1.2) eşitliği kullanılırsa

$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = \widetilde{\kappa}\widetilde{\varphi}^2X+\widetilde{\mu}(\widetilde{h}X)$ eşitliği diğer bir deyişle

$$\widetilde{l}X = \widetilde{\kappa}\widetilde{\varphi}^2X+\widetilde{\mu}\widetilde{h}X \tag{4.1.8}$$

denklemi elde edilir. (4.1.8) denklemine $\widetilde{\varphi}$ etki ettirilip (3.1.2) eşitliği kullanılırsa $\widetilde{l}\,\widetilde{\varphi}X = \widetilde{\kappa}\widetilde{\varphi}X+\widetilde{\mu}\widetilde{h}\,\widetilde{\varphi}X$ denklemi bulunur. Son olarak bu son eşitliğe $\widetilde{\varphi}$ etki ettirilip $\widetilde{\varphi}$ ile $\widetilde{h}$ nın anti-değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\widetilde{\varphi}\widetilde{l}\,\widetilde{\varphi}X = \widetilde{\kappa}\widetilde{\varphi}^2X-\widetilde{\mu}\widetilde{h}X \tag{4.1.9}$$

olduğu görülür. (3.6.4) eşitliğinden $\widetilde{R}(X,\xi)\xi+\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(\widetilde{\varphi}X,\xi)\xi = -2(\widetilde{\varphi}^2X-\widetilde{h}^2X)$ denklemi elde edilir. (4.1.8) ve (4.1.9) nolu eşitlikler kullanılarak (4.1.2) eşitliği bulunur.

Ricci eğrilik tensör alanı ile ilgili olan (2.2.2) eşitliğinden yararlanılarak

$$S(Y,\xi)\xi = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{g}(\widetilde{R}(e_i,Y)\xi,e_i)-\sum_{i=1}^{n}\widetilde{g}(\widetilde{R}(\widetilde{\varphi}e_i,Y)\xi,\widetilde{\varphi}e_i)+\widetilde{g}(\widetilde{R}(\xi,Y)\xi,\xi) \tag{4.1.10}$$

denklemi elde edilir. (4.1.10) denkleminde (4.1.1) eşitliği ve $iz\widetilde{h}=0$ olduğu kullanılırsa

$$S(Y,\xi) = 2n\widetilde{k}\,\eta(Y) \tag{4.1.11}$$

bulunur. Aynı zamanda $S(Y,\xi)=g(\widetilde{Q}X,Y)$ ile (4.1.11) eşitliğinden (4.1.3) elde edilmiş olur.

(4.1.4) eşitliğini ispatlamak için (3.6.6) eşitliğinde (4.1.1) den yararlanılırsa (3.6.6) eşitliği

$$\begin{aligned} 2\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,Y)\eta(Z)-2\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,Z)\eta(Y) &= -2\widetilde{g}(Y,(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{h}X}\widetilde{\varphi})Z)+2\widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,Z)\eta(Y) \\ &\quad -2\widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,Y)\eta(Z) \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

haline gelir. (4.1.12) eşitliğinde (3.1.2) ve (4.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\widetilde{\kappa}+1)\widetilde{g}(Y,(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Z) &= (\widetilde{\kappa}+1)\eta(Y)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,Z)-(\widetilde{\kappa}+1)\eta(Y)\widetilde{g}(X,Z) \\ &\quad -(\widetilde{\kappa}+1)\eta(Z)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,Y)+(\widetilde{\kappa}+1)\eta(Z)\widetilde{g}(X,Y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $(\widetilde{\kappa}+1)\neq 0$ seçilirse (4.1.4) eşitliği elde edilmiş olur.

Daha sonra (3.4.5) eşitliği Riemann eğrilik tensörünün ifadesinde yani (2.2.1) eşitliğinde kullanılırsa

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi=-(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Y+(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})X+(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}\widetilde{h})X$$

elde edilir. Bu son denklem (4.1.4) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)\xi &= \widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,Y)\xi-\eta(Y)(X-\widetilde{h}X)-\widetilde{g}(Y-\widetilde{h}Y,X)\xi \\ &\quad +\eta(X)(Y-\widetilde{h}Y)+(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}\widetilde{h})X \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

halini alır.

$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}\widetilde{h})X=(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})\widetilde{h}Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})\widetilde{h}X+\widetilde{\varphi}((\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X)$ eşitliği (4.1.1) ve (4.1.4) denklemleri (4.1.13) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa}\big(\eta(Y)X-\eta(X)Y\big)+\widetilde{\mu}\big(\eta(Y)\widetilde{h}X-\eta(X)\widetilde{h}Y\big) &= -\eta(Y)(X-\widetilde{h}X)+\eta(X)(Y-\widetilde{h}Y) \\ &\quad +\widetilde{\varphi}((\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bulunan son denklemin her iki tarafına $\tilde{\varphi}$ etki ettirilip $\tilde{h}$ ve $\tilde{\nabla}_X \tilde{h}$ nın simetrik oluşu kullanılırsa

$$(\tilde{\kappa}+1)\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}X-\eta(X)\tilde{\varphi}Y\big)+(\tilde{\mu}-1)\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\big)=(\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{h})X$$
$$+2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}^2Y)\xi$$

elde edilir. Bu son denklemde (4.1.12) kullanılırsa (4.1.5) denklemi bulunmuş olur.

(4.1.6) denklemlerini ispat etmek için (4.1.5) denkleminde (3.4.5) ve (4.1.12) denklemlerini ve h operatörünün özelliklerini kullanarak

$$\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h}=\tilde{\mu}\tilde{h}\tilde{\varphi}$$

bulunur. Son denkleme $\tilde{\varphi}$ etki ettirilip (3.4.3) eşitliğinden yararlanılırsa (4.1.6) nın ispatı tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.1.1: Herhangi paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold $(\tilde{\kappa}\neq -1)$ integrallenebilirdir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Özellikle Sonuç 4.1.1 den $\tilde{\kappa}\neq -1$ ile verilen herhangi paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldunda, D^+ ve D^- ile verilen Legendrian dağılımları integrallenebilirlerdir ve M de iki Legendrian foliasyon tanımlarlar.

(4.1.2) eşitliğinden dolayı, $\tilde{\kappa}=-1$ olan paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar $\tilde{h}^2=0$ eşitliğini sağlarlar. Değme metrik durumundan farklı olarak, $\tilde{h}$ nın sıfır olup manifoldun para-Sasakian olduğu söylenemez. Yani $\tilde{\kappa}=-1$ olması manifoldun para-Sasakian olmasını gerektirmez. $\tilde{h}^2=0$ $(\tilde{\kappa}=-1)$ ve $\tilde{h}\neq 0$ olan paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar vardır.

Aşikar paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold örneği c sabit kesitsel eğrilikli (M,g) Riemannian manifoldunun teğet küre demeti T_1M ile verilsin. T_1M nin aslında bir $(c(2-c),-2c)$-yapısı olan standart değme metrik yapısı (φ,ξ,η,g) düşünülsün (Blair 2010).

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{1}{|1-c|}\varphi h, \quad \tilde{g}_1 := \frac{1}{|1-c|} d\eta(.,\varphi h.) + \eta \otimes \eta \tag{4.1.14}$$

$$\tilde{\varphi}_2 := \frac{1}{|1-c|} h, \quad \tilde{g}_2 := \frac{1}{|1-c|} d\eta(.,h.) + \eta \otimes \eta \tag{4.1.15}$$

tanımlansın.

$(\tilde{\varphi}_1, \xi, \eta, \tilde{g}_1)$ ve $(\tilde{\varphi}_2, \xi, \eta, \tilde{g}_2)$ nin T_1M de paradeğme metrik yapıları tanımladığı açıktır. Böylece (Teorem 5.9, Cappelletti Montano 2010b) yardımıyla $(\tilde{\varphi}_1, \xi, \eta, \tilde{g}_1)$ paradeğme $(\tilde{\kappa}_1, \tilde{\mu}_1)$ -yapısına ve $(\tilde{\varphi}_2, \xi, \eta, \tilde{g}_2)$ paradeğme $(\tilde{\kappa}_2, \tilde{\mu}_2)$ -yapısına

$$\tilde{\kappa}_1 = (1+c)^2 - 1, \quad \tilde{\mu}_1 = 2(1 - |c-1|),$$
$$\tilde{\kappa}_2 = 4c - 1, \quad \tilde{\mu}_2 = 2$$

olacak şekilde sahiptir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1: $c \neq 1$sabit eğriliğe sahip olan Riemannian manifoldunun teğet demeti (4.1.14) den paradeğme $((1+c)^2 - 1, 2(1-|c-1|))$- yapısına ve (4.1.15) den paradeğme $(4c-1, 2)$- yapısına sahiptir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Sonuç olarak, eğer M manifoldu flat ise $(\tilde{\varphi}_2, \xi, \eta, \tilde{g}_2)$ T_1M de, $\tilde{h}_2^{\,2} = 0$ olan fakat $\tilde{h}_2$ sıfır olmadığından para-Sasakian olmayan paradeğme $(-1, 2)$ -yapısıdır.

Gerçekten de (4.1.15) ve (Lemma 4.5, Cappelletti Montano ve Di Terlizzi 2010) dan $\tilde{h}_2 = \frac{1}{2} L_\xi \tilde{\varphi} = \varphi h + \varphi$ elde edilir.

Tanım 4.1.2: $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ paradeğme metrik yapısı ve $\alpha > 0$ için

$$\bar{\eta} = \alpha\eta \ , \ \bar{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi \ , \ \bar{\varphi} = \tilde{\varphi} \ , \ \bar{g} = \alpha\tilde{g} + \alpha(\alpha - 1)\eta \otimes \eta \tag{4.1.16}$$

eşitliği ile verilen yapı tensörlerinin değişimine - **homotetik deformasyon** denir. $(\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ yeni yapı da bir paradeğme metrik yapıdır (Zamkovoy 2009).

Önerme 4.1.1: -homotetik deformasyon ile $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ yapısından elde edilen paradeğme metrik yapı $(\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ olsun. $\overline{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonları arasındaki ilişki

$$\overline{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \frac{\alpha-1}{\alpha}\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X,Y)\xi - (\alpha-1)(\eta(Y)\tilde{\varphi}X + \eta(X)\tilde{\varphi}Y) \qquad (4.1.17)$$

ve

$$\overline{h} = \frac{1}{\alpha}\tilde{h} \qquad (4.1.18)$$

şeklindedir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: (4.1.16) dan ve Koszul formülünden yararlanarak herhangi $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
2\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y,Z) = {} & \alpha X\tilde{g}(Y,Z) + \alpha(\alpha-1)\left[(X\eta(Y))\eta(Z) + \eta(Y)(X\eta(Z))\right] \\
& + \alpha Y\tilde{g}(X,Z) + \alpha(\alpha-1)\left[(Y\eta(X))\eta(Z) + \eta(X)(Y\eta(Z))\right] \\
& - \alpha Z\tilde{g}(X,Y) - \alpha(\alpha-1)\left[(Z\eta(X))\eta(Y) + \eta(X)(Z\eta(Y))\right] \\
& + \alpha\tilde{g}([X,Y],Z) + \alpha(\alpha-1)\left(\eta([X,Y])\eta(Z)\right) \\
& + \alpha\tilde{g}([Z,X],Y) + \alpha(\alpha-1)\left(\eta([Z,X])\eta(Y)\right) \\
& + \alpha\tilde{g}([Z,Y],X) + \alpha(\alpha-1)\left(\eta([Z,Y])\eta(X)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\alpha\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z) + \alpha(\alpha-1)\eta(Z)\left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi) - \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}X) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\right] \\
& + \alpha(\alpha-1)\eta(Y)\left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Z,\xi) - \tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}X) + \tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\right] \\
& + \alpha(\alpha-1)\eta(Z)\left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,\xi) - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\right] \\
= {} & + \alpha(\alpha-1)\eta(X)\left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y Z,\xi) - \tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}Y) + \tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\right] \\
& - \alpha(\alpha-1)\eta(Y)\left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z X,\xi) - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\right] \\
& - \alpha(\alpha-1)\eta(X)\left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z Y,\xi) - \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\right] \\
& + \alpha(\alpha-1)\left[\eta([X,Y])\eta(Z) + \eta([Z,X])\eta(Y) + \eta([Z,Y])\eta(X)\right]
\end{aligned}$$

denklemi bulunur.

Bu son denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) = \alpha\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \alpha(\alpha-1)\eta(\tilde{\nabla}_X Y)\eta(Z) + \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X, Y)\eta(Z)$$
$$- \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, Z)\eta(Y) - \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y, Z)\eta(X) \tag{4.1.19}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) = \alpha\tilde{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \alpha(\alpha-1)\eta(\overline{\nabla}_X Y)\eta(Z) \tag{4.1.20}$$

ve

$$\eta(\overline{\nabla}_X Y) = \frac{1}{\alpha^2}\bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, \xi) \tag{4.1.21}$$

denklemlerinden faydalanılarak (4.1.19) denklemi

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2}\left(\bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, \xi)\eta(Z)\right) = \alpha\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) & \\ + \alpha(\alpha-1)\eta(\tilde{\nabla}_X Y)\eta(Z) & \\ + \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X, Y)\eta(Z) & \\ - \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, Z)\eta(Y) & \\ - \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y, Z)\eta(X) & \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

haline dönüşür.

(4.1.19) denkleminde Z yerine ξ yazılırsa

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, \xi) = \alpha\eta(\tilde{\nabla}_X Y) + \alpha(\alpha-1)\eta(\tilde{\nabla}_X Y) + \alpha(\alpha-1)\tilde{g}(\tilde{\varphi}hX, Y) \tag{4.1.23}$$

elde edilir. (4.1.23) denklemi (4.1.22) denkleminde kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.1.17) denklemine ulaşılır.

Son olarak, h nın tanımında (4.1.16) denklemi kullanılırsa (4.1.18) in ispatı tamamlanmış olunur. □

Önerme 4.1.2: Önerme 4.1.1 deki kabuller altında, $\overline{R}$ ve $\widetilde{R}$ eğrilik tensör alanları arasındaki ilişki

$$\alpha\overline{R}(X,Y)\overline{\xi} = \widetilde{R}(X,Y)\xi - (\alpha-1)\big((\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Y - (\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})X + \eta(Y)(X-\widetilde{h}X) - \eta(X)(Y-\widetilde{h}Y)\big)$$
$$-(\alpha-1)^2\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) \tag{4.1.24}$$

denklemi ile verilir.

Özellikle, eğer $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ bir paradeğme $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$ -manifold ise $(\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ yapısı

$$\overline{\kappa} = \frac{\widetilde{\kappa}+1-\alpha^2}{\alpha^2}, \quad \overline{\mu} = \frac{\widetilde{\mu}+2\alpha-2}{\alpha} \tag{4.1.25}$$

olacak şekilde bir paradeğme $(\overline{\kappa},\overline{\mu})$ -yapıdır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: $\overline{R}(X,Y)\overline{\xi} = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\overline{\xi} - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\overline{\xi} - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\xi}$ denkleminde (4.1.16) kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y)\overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\left[\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi\right]$$

denklemi bulunur. Bu son denklemde (4.1.17) den faydalanılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha\overline{R}(X,Y)\overline{\xi} = {} & \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi + \frac{\alpha-1}{\alpha}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X,\widetilde{\nabla}_Y\xi)\xi - (\alpha-1)\eta(X)\widetilde{\varphi}\widetilde{\nabla}_Y\xi \\
& -(\alpha-1)\left[\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}Y + \frac{\alpha-1}{\alpha}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X,\widetilde{\varphi}Y)\xi - (\alpha-1)\eta(X)\widetilde{\varphi}^2Y\right] \\
& -\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi - \frac{\alpha-1}{\alpha}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y,\widetilde{\nabla}_X\xi)\xi + (\alpha-1)\eta(Y)\widetilde{\varphi}\widetilde{\nabla}_X\xi \\
& +(\alpha-1)\left[\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}X + \frac{\alpha-1}{\alpha}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y,\widetilde{\varphi}X)\xi - (\alpha-1)\eta(Y)\widetilde{\varphi}^2X\right] \\
& -\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi + (\alpha-1)\widetilde{\varphi}([X,Y])
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde $\widetilde{R}(X,Y)\xi$ tanımı (3.1.2) ve (3.4.5) denklemleri kullanılırsa (4.1.24) denklemine ulaşılır.

(4.1.1) ve (4.1.4) den faydalanılarak

$$\overline{R}(X,Y)\overline{\xi}=\left(\frac{\tilde{\kappa}-\alpha^2+1}{\alpha}\right)\left(\eta(Y)X-\eta(X)Y\right)+\left(\frac{\tilde{\mu}+2(\alpha-1)}{\alpha}\right)\left(\eta(Y)\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{h}Y\right)$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.18) denklemlerinin bulunan bu son denklemde kullanılmasıyla

$$\overline{R}(X,Y)\overline{\xi}=\left(\frac{\tilde{\kappa}-\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)\left(\overline{\eta}(Y)X-\overline{\eta}(X)Y\right)+\left(\frac{\tilde{\mu}+2(\alpha-1)}{\alpha}\right)\left(\overline{\eta}(Y)\overline{h}X-\overline{\eta}(X)\overline{h}Y\right)$$

sonucuna ulaşılır. □

Bu kısımdan sonra paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$ -manifoldların bazı genel özellikleri verilecektir.

Teorem 4.1.2: $(M^{2n+1},\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ integrallenebilir paradeğme metrik manifold için,

$$\tilde{Q}\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}\tilde{Q}=\tilde{l}\,\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}\tilde{l}-4(n-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}-\eta\otimes\tilde{\varphi}\tilde{Q}\xi+(\eta\circ\tilde{Q}\tilde{\varphi})\otimes\xi \qquad (4.1.26)$$

özelliği geçerlidir. Burada $\tilde{l}$,$\tilde{l}X=\tilde{R}(X,\xi)\xi$ ile tanımlanan Jacobi operatörüdür (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: $\tilde{R}(X,Y)\xi=\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\xi-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\xi-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi$ eşitliğinde $\tilde{\nabla}_Y\xi=-\tilde{\varphi}Y+\tilde{\varphi}\tilde{h}Y$ nin türevi alınırsa

$$\tilde{R}(X,Y)\xi=-(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y+(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi})X+(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}\tilde{h})Y-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi}\tilde{h})X \qquad (4.1.27)$$

elde edilir. İntegrallenebilme şartı $\tilde{\nabla}^{pc}\tilde{\varphi}=0$ ve (4.1.27) eşitliklerini kullanarak kısa bir hesap yapıldıktan sonra

$$\tilde{R}(X,Y)\xi=-\eta(Y)(X-\tilde{h}X)+\eta(X)(Y-\tilde{h}Y)+\tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y-\tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{h})X \qquad (4.1.28)$$

eşitliği bulunur. $\tilde{h}$ simetrik bir operatör olduğundan

$$\widetilde{g}((\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X-(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y,\xi)=\widetilde{g}((\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})\xi,X)-\widetilde{g}((\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})\xi,Y) \tag{4.1.29}$$

yazılabilir. Formül (3.4.5) ve $\widetilde{h}\xi=0$, $\widetilde{\varphi}\widetilde{h}+\widetilde{h}\widetilde{\varphi}=0$ oluşu (4.1.29) da kullanılırsa,

$$\widetilde{g}((\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X-(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y,\xi)=-2\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}^2X,Y)\xi \tag{4.1.30}$$

elde edilir. (4.1.28) denklemine $\widetilde{\varphi}$ etki ettirilip, $\widetilde{\varphi}^2=I-\eta\otimes\xi$ ve (4.1.30) dan faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X&=\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)\xi+2\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}^2X,Y)\xi\\&\quad-\eta(X)(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)+\eta(Y)(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

elde edilir.

P, M nin sabit noktası ve X,Y,Z vektör alanları $(\widetilde{\nabla}X)_P=(\widetilde{\nabla}Y)_P=(\widetilde{\nabla}Z)_P=0$ olacak şekilde var olsun. $\widetilde{\varphi}$ için Ricci özdeşliği

$\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)Z=(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})Z-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Z-(\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\widetilde{\varphi})Z$ olduğundan ve

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})Z=\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})Z-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})\widetilde{\nabla}_XZ$$

yazılabileceğinden P noktasında aşağıdaki forma indirgenebilir:

$$\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)Z=\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})Z-\widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Z.$$

P noktasında integrallenebilme şartı sonucu

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)Z&=\widetilde{g}((\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X,Z)\xi-\eta(Z)((\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X)\\&\quad+\widetilde{g}(Y-\widetilde{h}Y,Z)(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)-\widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,Z)(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)\\&\quad-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X,Z)(Y-\widetilde{h}Y)+\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y,Z)(X-\widetilde{h}X)\end{aligned}$$

(4.1.32)

bulunur. Bulunan (4.1.30) denklemi (4.1.32) de kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)Z = &\left(\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)\xi-\eta(X)(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)+\eta(Y)(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X),Z)\right)\xi \\
&-\eta(Z)\left(\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,Y)\xi-\eta(X)(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)+\eta(Y)(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)\right) \\
&+\widetilde{g}(Y-\widetilde{h}Y,Z)(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)-\widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,Z)(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y) \\
&-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X,Z)(Y-\widetilde{h}Y)+\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y,Z)(X-\widetilde{h}X)
\end{aligned}
\tag{4.1.33}
$$

denklemi bulunur.

(3.2.2) eşitliği ve eğrilik tensör özelliklerini kullanarak

$$
\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(\widetilde{\varphi}X,\widetilde{\varphi}Y)Z,\widetilde{\varphi}W)=-\widetilde{g}(\widetilde{R}(Z,W)\widetilde{\varphi}X,\widetilde{\varphi}Y)+\eta(\widetilde{R}(\widetilde{\varphi}X,\widetilde{\varphi}Y)Z)\eta(W) \tag{4.1.34}
$$

elde edilir.

(4.1.33) denkleminde X yerine Z, Y yerine W, Z yerine X yazılıp bulunan denklem $\widetilde{\varphi}Y$ ile iç çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{g}(\widetilde{R}(Z,W)\widetilde{\varphi}X,\widetilde{\varphi}Y)+\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(Z,W)X,\widetilde{\varphi}Y) = &\ \eta(X)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(Z,W)\xi,\widetilde{\varphi}Y) \\
&-\eta(X)\eta(Z)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}W-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}W,\widetilde{\varphi}Y) \\
&+\eta(X)\eta(W)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Z,\widetilde{\varphi}Y) \\
&-\widetilde{g}(W-\widetilde{h}W,X)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Z,\widetilde{\varphi}Y) \\
&+\widetilde{g}(Z-\widetilde{h}Z,X)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}W-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}W,\widetilde{\varphi}Y) \\
&+\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Z-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Z,X)\widetilde{g}(W-\widetilde{h}W,\widetilde{\varphi}Y) \\
&-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}W-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}W,X)\widetilde{g}(Z-\widetilde{h}Z,\widetilde{\varphi}Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bulunan bu son denklemde (4.1.34) kullanılıp, uzun bir hesap yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)Z,\tilde{\varphi}W) = {} & \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)+\eta(W)\eta(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)Z)\\ & +\eta(Y)\big(-\eta(\tilde{R}(Z,W)X)-\eta(Z)\tilde{g}(W-\tilde{h}W,X)+\eta(W)\tilde{g}(Z-\tilde{h}Z,X)\big)\\ & -\eta(X)\big(-\eta(\tilde{R}(Z,W)Y)-\eta(Z)\tilde{g}(W-\tilde{h}W,Y)+\eta(W)\tilde{g}(Z-\tilde{h}Z,Y)\big)\\ & +\tilde{g}(W-\tilde{h}W,X)\tilde{g}(Z-\tilde{h}Z,Y)-\tilde{g}(Z-\tilde{h}Z,X)\tilde{g}(W-\tilde{h}W,Y)\\ & +\tilde{g}(\tilde{\varphi}Z-\tilde{\varphi}\tilde{h}Z,X)\tilde{g}(W-\tilde{h}W,\tilde{\varphi}Y)\\ & -\tilde{g}(\tilde{\varphi}Z-\tilde{\varphi}\tilde{h}Z,Y)\tilde{g}(W-\tilde{h}W,\tilde{\varphi}X)\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

elde edilir. (4.1.34) denkleminde X yerine $\tilde{\varphi}X$, Y yerine $\tilde{\varphi}Y$ yazılıp $\tilde{\varphi}W$ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}W)-\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)Z,\tilde{\varphi}W) = {} & \tilde{g}(\tilde{\varphi}X+\tilde{\varphi}\tilde{h}X,Z)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y+\tilde{\varphi}\tilde{h}Y,W)\\ & -\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y+\tilde{\varphi}\tilde{h}Y,Z)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X+\tilde{\varphi}\tilde{h}X,W)\\ & -\eta(Y)\eta(W)\tilde{g}(X+\tilde{h}X,Z)\\ & +\tilde{g}(X-\eta(X)\xi+\tilde{h}X,Z)\tilde{g}(Y+\tilde{h}Y,W)\\ & +\eta(X)\eta(W)\tilde{g}(Y+\tilde{h}Y,Z)\\ & -\tilde{g}(Y-\eta(Y)\xi+\tilde{h}Y,Z)\tilde{g}(X+\tilde{h}X,W)\\ & +\eta(Z)\,\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)\xi,W)\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

bulunur. (4.1.35) ve (4.1.36) denklemleri karşılaştırılıp yine uzun bir hesap yapıldıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}W) = {} & \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)+\eta(W)\eta(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)Z)-\eta(Z)\eta(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)W)\\ & +\eta(Y)\big(-\eta(\tilde{R}(Z,W))X+2\eta(Z)\tilde{g}(\tilde{h}X,W)-2\eta(W)\tilde{g}(\tilde{h}Z,X)\big)\\ & -\eta(X)\big(-\eta(\tilde{R}(Z,W))Y+2\eta(Z)\tilde{g}(\tilde{h}Y,W)-2\eta(W)\tilde{g}(\tilde{h}Z,Y)\big)\\ & -2\tilde{g}(W,X)\tilde{g}(\tilde{h}Z,Y)-2\tilde{g}(Z,Y)\tilde{g}(\tilde{h}W,X)\\ & +2\tilde{g}(W,Y)\tilde{g}(\tilde{h}Z,X)+2\tilde{g}(Z,X)\tilde{g}(\tilde{h}W,Y).\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

$\{e_i,\tilde{\varphi}e_i,\xi\}$, $i\in\{1,...,n\}$ için lokal $\tilde{\varphi}$ -bazı olsun. (4.1.37) de $Y=Z=e_i$ yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i,\tilde{\varphi}W)=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\tilde{g}(\tilde{R}(X,e_i)e_i,W)+\eta(W)\eta(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}e_i)e_i)\\+\eta(X)\eta(\tilde{R}(e_i,W))e_i+2\eta(X)\eta(W)\tilde{g}(\tilde{h}e_i,e_i)\\-2\tilde{g}(W,X)\tilde{g}(\tilde{h}e_i,e_i)-2\tilde{g}(e_i,e_i)\tilde{g}(\tilde{h}W,X)\\+2\tilde{g}(W,e_i)\tilde{g}(\tilde{h}e_i,X)+2\tilde{g}(e_i,X)\tilde{g}(\tilde{h}W,e_i).\end{pmatrix} \tag{4.1.38}$$

bulunur. Diğer yandan (4.1.37) de $Y=Z=\tilde{\varphi}e_i$ yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,e_i)e_i,\tilde{\varphi}W)=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\tilde{g}(\tilde{R}(X,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i,W)+\eta(W)\eta(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,e_i)\tilde{\varphi}e_i)\\+\eta(X)\eta(\tilde{R}(\tilde{\varphi}e_i,W))\tilde{\varphi}e_i+2\eta(X)\eta(W)\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\varphi}e_i,\tilde{\varphi}e_i)\\-2\tilde{g}(W,X)\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\varphi}e_i,\tilde{\varphi}e_i)-2\tilde{g}(\tilde{\varphi}e_i,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{g}(\tilde{h}W,X)\\+2\tilde{g}(W,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\varphi}e_i,X)+2\tilde{g}(\tilde{\varphi}e_i,X)\tilde{g}(\tilde{h}W,\tilde{\varphi}e_i)\end{pmatrix} \tag{4.1.39}$$

elde edilir. Ricci operatörün tanımı (4.1.38) ve (4.1.39) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}S(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}W)-\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\xi)\xi,\tilde{\varphi}W)=&-S(X,W)+\tilde{g}(\tilde{R}(X,\xi)\xi,W)\\&+\eta(W)\left(\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,e_i)\tilde{\varphi}e_i,\xi)-\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}e_i)e_i,\xi)\right)\\&+\eta(X)S(W,\xi)-2\eta(X)\eta(W)\left(\tilde{g}(\tilde{h}e_i,e_i)-\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\varphi}e_i,\tilde{\varphi}e_i)\right)\\&+2\tilde{g}(W,X)\left(\tilde{g}(\tilde{h}e_i,e_i)-\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\varphi}e_i,\tilde{\varphi}e_i)\right)+4n\tilde{g}(\tilde{h}W,X)\\&-2\tilde{g}(\tilde{h}W,X)-2\tilde{g}(\tilde{h}W,X)\end{aligned}$$

hesaplanır. Bulunan bu son denklemde iz$\tilde{h}=0$ olduğu ve $\tilde{l}X$ in tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned}-\tilde{\varphi}\tilde{Q}\tilde{\varphi}X+\tilde{\varphi}\tilde{l}\tilde{\varphi}X+\tilde{Q}X-\tilde{l}X=&\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,e_i)\tilde{\varphi}e_i,\xi)-\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}e_i)e_i,\xi)\right)\xi\\&+\eta(X)\tilde{Q}\xi+4(n-1)\tilde{h}X.\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

(4.1.40) denklemine $\tilde{\varphi}$ uygulanıp, $\tilde{\varphi}^2 = I - \eta \otimes \xi$ eşitliği uygulanılırsa istenilen (4.1.26) eşitliği elde edilmiş olur. □

Sonuç 4.1.2: $(M^{2n+1}, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$ -manifold için

$$\tilde{Q}\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\tilde{Q} = 2(2(n-1) + \tilde{\mu})\tilde{h}\,\tilde{\varphi} \tag{4.1.41}$$

eşitliği geçerlidir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: (4.1.1) eşitliği, $\tilde{l}$ operatörünün tanımı ve $\tilde{h}\xi = 0$ oluşu kullanılarak

$$\tilde{l}X = \tilde{\kappa}(X - \eta(X)\xi) + \tilde{\mu}\tilde{h}X \tag{4.1.42}$$

elde edilir. (4.1.42) denkleminde X yerine $\tilde{\varphi}X$ yazılarak bulunan denklem ile (4.1.42) denklemini $\tilde{\varphi}$ ile çarparak elde edilen denklem birbirinden çıkarılıp $\tilde{h}\tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}\tilde{h}$ olduğu kullanılırsa,

$$\tilde{l}\,\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\tilde{l} = 2\tilde{\mu}\tilde{h}\,\tilde{\varphi} \tag{4.1.43}$$

bulunur. Diğer yandan, (4.1.3) eşitliğinin bir sonucu olarak $\eta \otimes \tilde{\varphi}\tilde{Q}\xi + (\eta \circ \tilde{Q}\tilde{\varphi}) \otimes \xi$ terimleri sıfıra eşit olur. Son olarak (4.1.26) dan (4.1.41) elde edilmiş olur. □

Tanım 4.1.3: (M, η) değme manifoldundaki bir hemen hemen bi-paradeğme yapısı; η değme formu ile uyumlu bir hemen hemen değme yapı ϕ_3 ve M de değişmeli olmayan iki tensör ϕ_1, ϕ_2 olmak üzere

$$\phi_1^{\,2} = \phi_2^{\,2} = I - \eta \otimes \xi, \quad \phi_1\phi_2 = \phi_3$$

olacak şekilde (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) üçlüsünden oluşur. Bu yapıya sahip M ye **hemen hemen bi-paradeğme manifold** denir (Cappelletti Montano 2010b).

Tanımdan kolayca $\phi_1\phi_3 = -\phi_3\phi_1 = \phi_2$ ve $\phi_3\phi_2 = -\phi_2\phi_3 = \phi_1$ elde edilir.

Herhangi hemen hemen bi-paradeğme manifold, $D_1^{\pm}, D_2^{\pm}$ 4 tane dağılıma sahiptir. Burada $D_1^{\pm}$ ve $D_2^{\pm}$ sırasıyla ϕ_1 ve ϕ_2 nin ± 1 karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik dağılımlardır. $\forall \alpha \in \{1,2\}$ için D_α^+ ve D_α^- birbirine diktir. Özellikle ϕ_1 ve ϕ_2 hemen hemen paradeğme yapılardır.

Önerme 4.1.3: $(M, \eta, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ bir hemen hemen bi-paradeğme manifold olsun O halde

1. $\phi_1(D_2^+) = D_2^-,\ \phi_1(D_2^-) = D_2^+,$
2. $\phi_2(D_1^+) = D_1^-,\ \phi_2(D_1^-) = D_1^+,$
3. $\phi_3(D_\alpha^+) = D_\alpha^-,\ \phi_3(D_\alpha^-) = D_\alpha^+, \forall \alpha \in \{1,2\},$
4. $\phi_1 : D_2^+ \to D_2^-\ ve\ \phi_2 : D_1^+ \to D_1^-\ izomorfizmlerdir,$
5. $TM = D_\alpha^+ \oplus D_\alpha^- \oplus IR\xi = D_\alpha^{\pm} \oplus D_\beta^{\pm} \oplus IR\xi,\ \forall \alpha, \beta \in \{1,2\}, \alpha \neq \beta,$
6. $boy(D_1^+) = boy(D_1^-) = boy(D_2^+) = boy(D_2^-) = n$

eşitlikleri geçerlidir (Cappelleti Montano 2010b).

Önerme 4.1.4: Herhangi bir bi-paradeğme manifoldu için,

$$D_1^{\pm} = \left\{X + \phi_3 X \,\middle|\, X \in D_2^{\pm}\right\} ve\ D_2^{\pm} = \left\{X + \phi_3 X \,\middle|\, X \in D_1^{\mp}\right\}$$

eşitlikleri geçerlidir (Cappelleti Montano 2010b).

Aşağıdaki önerme ile $\tilde{\kappa} \neq -1$ ile verilen herhangi paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldun bir hemen hemen bi-paradeğme yapıya sahip olduğu gösterilecektir.

Önerme 4.1.5: $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifold olsun. Eğer $\tilde{\kappa} \neq -1$ ise M nin (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) hemen hemen bi-paradeğme yapısı

$$\phi_1 := \tilde{\varphi}, \quad \phi_2 := \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}, \quad \phi_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h} \qquad \tilde{\kappa} > -1 \text{ için} \tag{4.1.44}$$

ve

$$\phi_1 := \tilde{\varphi}, \quad \phi_2 := \frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}, \quad \phi_3 := \frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{h} \qquad \tilde{\kappa} < -1 \text{ için} \tag{4.1.45}$$

olacak şekilde vardır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: İlk önce $\tilde{\kappa} > -1$ için ispat verilsin.

$\phi_1 := \tilde{\varphi}, \quad \phi_2 := \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}, \quad \phi_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}$ şeklinde var olsun. O halde $\phi_1^2 = \varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$ ve (4.1.2) yardımıyla $\phi_2^2 = \varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$ olduğu kolayca görülür. $\tilde{\varphi}\tilde{h} = -\tilde{h}\,\tilde{\varphi}$ olmasını kullanarak $\phi_1\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h} = \phi_3$ ve

$$\phi_1\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}^2\tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h} = \phi_2, \; \phi_3\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}\,\tilde{\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}^2\tilde{h} = -\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h} = -\phi_2$$

elde edilir. Ayrıca

$$\phi_3\phi_2 = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}}\tilde{\varphi}\tilde{h}\,\tilde{h} = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}}\tilde{\varphi}(1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^2 = \tilde{\varphi} = \phi_1, \; \phi_2\phi_3 = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}}\tilde{h}\,\tilde{\varphi}\tilde{h} = -\frac{1}{1+\tilde{\kappa}}\tilde{\varphi}\tilde{h}^2 = -\tilde{\varphi} = -\phi_1$$

olduğu kolayca görülür. Böylece $\tilde{\kappa} > -1$ için ispat tamamlanır. Benzer işlemler yapılarak $\tilde{\kappa} < -1$ için ispat verilebilir. □

Sonuç 4.1.3: $\tilde{\kappa} \neq -1$ için $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifold olsun. Böylece sırasıyla, $\tilde{\kappa} > -1$ için $\tilde{h}$ operatörüne ve $\tilde{\kappa} < -1$ için $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ operatörüne karşılık gelen matris köşegenleştirilebilir ve $\tilde{h}$ ve $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ ya karşılık gelen matrisin karakteristik değerleri $\tilde{h}\xi = 0$, $\tilde{h}e_i = \tilde{\lambda}e_i$, $\tilde{h}\,\tilde{\varphi}e_i = -\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}e_i$ olacak şekilde 0, $\tilde{\lambda}$ ve $-\tilde{\lambda}$ dır. Burada $\tilde{\lambda} := \sqrt{|1+\tilde{\kappa}|}$ dır. $D_{\tilde{h}}(0) = R\xi$, $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$, $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(0) = R\xi$, $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$, $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ kendi aralarında ortogonaldir ve $\tilde{\varphi}D_{\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda}) = D_{\tilde{h}}(\mp\tilde{\lambda})$ ve $\tilde{\varphi}D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda}) = D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\mp\tilde{\lambda})$. Ayrıca,

$$D_{\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda}) = \left\{ X \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}X \,\middle|\, X \in \Gamma(D^{\mp}) \right\} \quad \tilde{\kappa} > -1 \text{ için} \tag{4.1.46}$$

$$D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda}) = \left\{ X \pm \frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}X \,\middle|\, X \in \Gamma(D^{\mp}) \right\}, \quad \tilde{\kappa} < -1 \text{ için} \tag{4.1.47}$$

denklemleri sağlanır. Burada D^+ ve D^- sırasıyla; 1 ve -1 karakteristik değerlerine karşılık gelen $\tilde{\varphi}$ nin karakteristik dağılımlarını belirtmektedirler. Son olarak, $\tilde{\kappa} > -1$ için $D^+, D^-, D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}), D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ dört dağılım arasında herhangi ikisi ve $\tilde{\kappa} < -1$ için $D^+, D^-, D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}), D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ dört dağılım arasında herhangi ikisi ortogonaldir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: İfadenin ilk kısmının ispatı, Öneme 4.1.5 yardımıyla görülebilir. Öyle ki (4.1.44) eşitliğinden $X \in D_2^+$ için $\tilde{h}X = \tilde{\lambda}\phi_2 X = \tilde{\lambda}X$ elde edilir. Yani $X \in D_2^+$ ise $\tilde{h}X \in D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ dır. Tersine $X \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ için (4.1.44) eşitliği yardımıyla $\phi_2 X = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}X = \frac{\tilde{\lambda}X}{\tilde{\lambda}} = X$ bulunur. Benzer şekilde $X \in D_2^-$ için $\tilde{h}X = \tilde{\lambda}\phi_2 X = -\tilde{\lambda}X$ elde edilir. $X \in D_2^-$ için $\tilde{h}X \in D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ bulunur. Yine (4.1.44) eşitliği kullanılarak $X \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için $\phi_2 X = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}X = \frac{-\tilde{\lambda}X}{\tilde{\lambda}} = -X$ olduğu görülür. O halde $\tilde{h} = \tilde{\lambda}\phi_2$ eşitliğinden $D_{\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda}) = D_2^{\pm}$ elde edilmiş olunur. $\tilde{\kappa} > -1$ için $\tilde{h}$ ya karşılık gelen matrisin diagonal olduğu gösterilmiş olunur. Benzer şekilde $\tilde{\kappa} < -1$ için $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ ya karşılık gelen matrisin diagonal olduğu gösterilebilir.

$D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ birbirine diktir. Gerçekten de herhangi $X \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için $\tilde{\lambda}\tilde{g}(X,Y) = \tilde{g}(\tilde{\lambda}X,Y) = \tilde{g}(\tilde{h}X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{h}Y) = -\tilde{\lambda}\tilde{g}(X,Y)$ $\tilde{\lambda} \neq 0$ olduğundan $\tilde{g}(X,Y) = 0$ elde edilir.

Ayrıca $X \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ise $\tilde{h}X = \tilde{\lambda}X$ olur ve $\tilde{\varphi}\tilde{h} = -\tilde{h}\tilde{\varphi}$ olduğu kullanılarak $\tilde{h}\tilde{\varphi}X = -\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}X$ yazılabilir. Böylece $\tilde{\varphi}D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}) = D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ olur. Eğer $X \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ise $\tilde{h}X = -\tilde{\lambda}X$ olacağından $\tilde{\varphi}\tilde{h} = -\tilde{h}\tilde{\varphi}$ olduğu kullanılarak $\tilde{h}\tilde{\varphi}X = \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}X$ yazılabilir. Böylece $\tilde{\varphi}D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}) = D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ olur.

$\tilde{\kappa} < -1$ durumu için de benzer ispat yapılabilir. Son olarak (4.1.46) ve (4.1.47) denklemleri Önerme 4.1.3 den ve son kısım ise Önerme 4.1.4 ün bir sonucudur. Daha açık olarak $\tilde{\kappa} > -1$ için

$X \in D^{+}$ iken

$$\begin{aligned} Y = X - \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}X \Rightarrow \tilde{h}Y &= \tilde{h}X - \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}^2 X = \tilde{h}X - \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\lambda}^2\tilde{\varphi}^2 X \\ &= \tilde{h}X - \tilde{\lambda}X = -\tilde{\lambda}(X - \frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{h}X) = -\tilde{\lambda}Y \end{aligned}$$

elde edilir.

$X \in D^{-}$ iken

$$\begin{aligned} Y = X + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}X \Rightarrow \tilde{h}Y &= \tilde{h}X + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{h}^2 X = \tilde{h}X + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{\lambda}^2\tilde{\varphi}^2 X \\ &= \tilde{h}X + \tilde{\lambda}X = \tilde{\lambda}(X + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{h}X) = \tilde{\lambda}Y \end{aligned}$$

elde edilir.

$\tilde{\kappa} < -1$ durumu için de benzer ispat yapılabilir. □

Böylece paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldlar $\tilde{\kappa} < -1,\ \tilde{\kappa} = -1\ ve\ \tilde{\kappa} > -1$ olacak şekilde üç ana sınıfa ayrılabilirler. (4.1.25) eşitliği ile, bu üç sınıfın D-homotetik deformasyonlar sonucu korunduğu görülür. c sabit eğrilikli manifoldun T_1M teğet küre demetindeki $(\tilde{\varphi}_1, \xi, \eta, \tilde{g}_1)$ paradeğme metrik yapısı $\tilde{\kappa}_1 > -1$ i Teorem 4.1.1 gereği sağlar. $(\tilde{\varphi}_2, \xi, \eta, \tilde{g}_2)$ paradeğme metrik yapısı için $\tilde{\kappa}_2 < -1,\ \tilde{\kappa}_2 = -1\ ve\ \tilde{\kappa}_2 > -1$ olması için gerek ve yeter şartlar sırasıyla $c<0, c=0$ *ve* $c>0$ olmasıdır. Böylece T_1M ; paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$ -manifoldların bu üç sınıfı için örnekleri sağlar.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, $D_{\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda})$ ($\tilde{\kappa}>-1$ durumunda) ve $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda})$ ($\tilde{\kappa}<-1$ durumunda) nın indeksinin sabit olduğu kabul edilecektir. $\tilde{\kappa}>-1$ için $\tilde{h}$ nın veya $\tilde{\kappa}<-1$ durumu için $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ köşegenleştirilebildiği için bir sonraki Yardımcı Teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.1.2: $\tilde{\kappa}\neq-1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. Eğer $\tilde{\kappa}>-1$ ise $\tilde{h}$ nın karakteristik vektörlerinin $\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n,\xi\}$ bir lokal ortogonal $\tilde{\varphi}$-bazı $X_1,\ldots,X_n\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y_1,\ldots,Y_n\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ve eğer $\tilde{\kappa}<-1$ ise $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ nın karakteristik vektörlerinin $\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n,\xi\}$ bir lokal ortogonal $\tilde{\varphi}$-bazı $X_1,\ldots,X_n\in\Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y_1,\ldots,Y_n\in\Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$

$$\tilde{g}(X_i,X_i)=-\tilde{g}(Y_i,Y_i)=\begin{cases}1, & 1\leq i\leq r\\ -1, & r+1\leq i\leq r+s\end{cases} \tag{4.1.48}$$

$\tilde{\kappa}>-1$ için $r=\text{indeks}(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ve $s=n-r=\text{indeks}(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$

$\tilde{\kappa}<-1$için $r=\text{indeks}(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ve $s=n-r=\text{indeks}(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$

olacak şekilde vardır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

(Cappelleti Montano 2009a) da belirtildiği gibi, paradeğme metrik geometri ile Legendrian foliasyonlar arasında sıkı bir ilişki vardır. Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold ile ilişkili olan (D^+,D^-) bi-Legendrian yapılarının özelliklerini incelemek ilginç olacaktır. Bir sonraki önermede, Legendrian foliasyonların dejenere olmadığı ispatlanacak ve pozitif veya negatif tanımlı olması için gerek ve yeter şartlar bulunacaktır.

Önerme 4.1.6: $\tilde{\kappa} \neq -1$ için $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifold olsun. $\tilde{\varphi}$ nin ± 1 karakteristik değerleri ile verilen D^{+} ve D^{-} Legendrian foliasyonları dejenere değillerdir. Pozitif tanımlı olmaları için gerek ve yeter şart $\tilde{\kappa} > -1$ durumunda indeks $(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})) = 0$ ve $\tilde{\kappa} < -1$ durumunda indeks $(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})) = n$ olmasıdır. Negatif tanımlı olmaları için gerek ve yeter şart $\tilde{\kappa} > -1$ durumunda indeks $(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})) = n$ ve $\tilde{\kappa} < -1$ durumunda indeks $(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})) = 0$ olmasıdır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: $\tilde{\kappa} > -1$ durumu göz önüne alınsın. $\tilde{\kappa} < -1$ durumunun ispatı $\tilde{\kappa} > -1$ ispatına benzer şekilde yapılabilir. D^{+} ve D^{-} Legendrian foliasyonları ile ilişkili olan Pang invaryantları

$$\Pi_{D^{+}}(X, X') = 2\tilde{g}(\tilde{h}X, X'), \quad \Pi_{D^{-}}(Y, Y') = 2\tilde{g}(\tilde{h}Y, Y') \tag{4.1.49}$$

eşitliği ile verilsin. Gerçekten de herhangi $X \in \Gamma(D^{+})$ ve $Y \in \Gamma(D^{-})$ için $\tilde{h}X = [\xi, X]_{D^{-}}$ ve $\tilde{h}Y = -[\xi, Y]_{D^{+}}$ dır (Önerme 3.2, Cappelleti Montano 2009a). O halde herhangi $X, X' \in \Gamma(D^{+})$ için

$$\begin{aligned}\Pi_{D^{+}}(X, X') &= 2d\eta([\xi, X], X') = 2\tilde{g}([\xi, X], \tilde{\varphi}X') = 2\tilde{g}([\xi, X], X') \\ &= 2\tilde{g}([\xi, X]_{-}, X') = 2\tilde{g}(\tilde{h}X, X')\end{aligned}$$

ve herhangi $Y, Y' \in \Gamma(D^{-})$ için

$$\begin{aligned}\Pi_{D^{-}}(Y, Y') &= 2d\eta([\xi, Y], Y') = 2\tilde{g}([\xi, Y], \tilde{\varphi}Y') = 2\tilde{g}([\xi, Y], -Y') \\ &= 2\tilde{g}(-[\xi, Y]_{+}, -Y') = 2\tilde{g}(\tilde{h}Y, Y')\end{aligned}$$

eşitliklerinin geçerli olduğu görülmüş olunur.

$\tilde{h}$ nın karakteristik vektörlerinin $\{X_i, Y_i = \tilde{\varphi}X_i, \xi\}$ $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\tilde{\varphi}$-bazı Yardımcı Teorem 4.1.2 deki gibi ele alınsın.

$$D^{\pm} = \left\{ X \pm \widetilde{\varphi} X \middle| X \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda})) \right\} \tag{4.1.50}$$

denklemi göz önüne alınsın. Bu eşitlik, Önerme 4.1.4 deki hemen hemen bi-paradeğme yapının $(M, \widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ ye uygulanması ile elde edilir. $\widetilde{h} D^{+} \subset D^{-}$ olduğundan (4.1.49) dan $\forall X, X' \in \Gamma(D^{+})$ için,

$$\Pi_{D^{+}}(Y, X') = 2\widetilde{g}(\widetilde{h} Y, X') = 2\widetilde{g}(\lambda(X - \widetilde{\varphi}X), Z + \widetilde{\varphi}Z) = 0$$

$$= 4\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X, Z) = 0 \overset{\widetilde{\lambda} \neq 0}{\Rightarrow} X = 0$$

elde edilir. Böylece D^{+} dejenere değildir. D^{-} için benzer ispat yapılabilir.

(4.1.50) eşitliğinden D^{+} nın pozitif ya da negatif tanımlı olmasını kontrol etmek yerine, $\Pi_{D^{+}}$ yı $X_i + \widetilde{\varphi} X_i = X_i + Y_i$ formunda yazarak $\Pi_{D^{+}}$ nın pozitif ya da negatif tanımlı olmasına bakmak yeterlidir. (4.1.49) eşitliğini kullanarak $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ için,

$$\Pi_{D^{+}}(X_i + Y_i, X_i + Y_i) = 2\widetilde{g}(\widetilde{h} X_i + \widetilde{h} Y_i, X_i + Y_i) = 2\widetilde{g}(\widetilde{\lambda} X_i, X_i) - 2\widetilde{g}(\widetilde{\lambda} Y_i, Y_i) = \pm 4\widetilde{\lambda}$$

elde edilir. + işaretinin gelmesi indeks $(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})) = 0$ olmasına ve - işaretinin gelmesi indeks $(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})) = n$ olmasına bağlıdır.

Diğer taraftan, benzer şekilde (4.1.50) eşitliğinden D^{-} nın pozitif ya da negatif tanımlı olmasını kontrol etmek yerine, $\Pi_{D^{-}}$ yı $Y_i - \widetilde{\varphi} Y_i = Y_i - X_i$ formunda yazarak $\Pi_{D^{-}}$ nın pozitif ya da negatif tanımlı olmasına bakmak yeterlidir. (4.1.49) eşitliğini kullanarak $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ için,

$$\Pi_{D^{-}}(Y_i - X_i, Y_i - X_i) = 2\widetilde{g}(\widetilde{h} Y_i - \widetilde{h} X_i, Y_i - X_i) = -2\widetilde{g}(\widetilde{\lambda} Y_i, Y_i) + 2\widetilde{g}(\widetilde{\lambda} X_i, X_i) = \pm 4\widetilde{\lambda}$$

elde edilir. + işaretinin gelmesi indeks $(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})) = 0$ olmasına ve - işaretinin gelmesi indeks $(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})) = n$ olmasına bağlıdır. Tersine, eğer $\Pi_{D^{-}}$ pozitif tanımlı ise D^{-} nin bir lokal bazı $\{Z_1,...,Z_n\}$, $\Pi_{D^-}(Z_i,Z_j)=\delta_{ij}$ olacak şekilde vardır. (4.1.46) eşitliği gözönüne alınırsa, $\forall i\in\{1,...,n\}$ için,

$X_i := \sqrt{\widetilde{\lambda}}(Z_i + \frac{1}{\widetilde{\lambda}}\widetilde{h}Z_i)$ yazılsın.

$$\widetilde{g}(X_i,X_j)=\sqrt{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{g}(Z_i,Z_j)+\frac{1}{\widetilde{\lambda}^2}\widetilde{g}(\widetilde{h}Z_i,\widetilde{h}Z_j)+\frac{2}{\widetilde{\lambda}}\widetilde{g}(\widetilde{h}Z_i,hZ_j))=\Pi_{D^-}(Z_i,Z_j)=\delta_{ij}$$

$\forall X,X^{'}\in\Gamma(D^+)$ için $\widetilde{g}(X,X^{'})=0$ olduğundan $\{X_1,X_2,...,X_n\}$, $D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})$ nın son eşitliği sağlayacak şekilde bir lokal bazıdır. Böylece indeks $(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))=0$ dır. İspat burada tamamlanır. □

Uyarı 4.1.1: Önerme 4.1.6 nın ispatı sırasında aslında verilenlerden daha fazlası ispat edildi. Yani, $\widetilde{\kappa}>-1$durumu için indeks $(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$, indeks $(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ ile verilen Π_{D^+} ve Π_{D^-} nin aynı işarete sahip olduğu ve $\widetilde{\kappa}<-1$durumu için indeks $(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$, indeks $(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ ile verilen Π_{D^+} ve Π_{D^-} nin aynı işarete sahip olduğu ispatlandı.

Önerme 4.1.6 aşağıdaki tanımın verilmesine neden olmuştur.

Tanım 4.1.4: $\widetilde{\kappa}\neq -1$ için verilen bir $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ paradeğme $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$-manifoldun pozitif tanımlı veya negatif tanımlı olarak adlandırılması M ile ilişkili olan (D^+,D^-) bi-Legendrian yapılarının sırasıyla pozitif veya negatif tanımlı olmasına bağlıdır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

4. bölümde paradeğme $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$-yapıların pozitif veya negatif tanımlı olması önemli rol oynamaktadır. Aşağıdaki örnek negatif tanımlı paradeğme $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$-manifoldlara bir örnektir.

Örnek 4.1.1: $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ bazı ile verilen Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olsun. Lie bracketleri

$$[e_1,e_5]=\frac{\alpha\beta}{2}e_2+\frac{\alpha^2}{2}e_3,\quad [e_2,e_5]=-\frac{\alpha\beta}{2}e_1+\frac{\alpha^2}{2}e_4, \tag{4.1.51}$$

$$[e_3,e_5]=-\frac{\beta^2}{2}e_1+\frac{\alpha\beta}{2}e_4,\quad [e_4,e_5]=-\frac{\beta^2}{2}e_2-\frac{\alpha\beta}{2}e_3, \tag{4.1.52}$$

$$[e_1,e_2]=\alpha e_2,\qquad [e_1,e_3]=-\beta e_2+2e_5,\qquad [e_1,e_4]=0, \tag{4.1.53}$$

$$[e_2,e_3]=\beta e_1-\alpha e_4,\qquad [e_2,e_4]=\alpha e_3+2e_5,\qquad [e_3,e_4]=-\beta e_3 \tag{4.1.54}$$

olsun. Burada α,β **,** $\alpha^2-\beta^2\neq 0$ olacak şekilde reel sayılardır. G**,** Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olan Lie grup olmak üzere, G üzerinde $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ sol invaryant paradeğme metrik yapısı

$\tilde{g}(e_1,e_1)=-1,\ \tilde{g}(e_2,e_2)=-1,\ \tilde{g}(e_3,e_3)=1,\ \tilde{g}(e_4,e_4)=1,\ \tilde{g}(e_5,e_5)=1,\ \ \tilde{g}(e_i,e_j)=0\ \ (i\neq j)$
ve $\tilde{\varphi}e_1=e_3,\ \tilde{\varphi}e_2=e_4,\ \tilde{\varphi}e_3=e_1,\ \tilde{\varphi}e_4=e_2,\ \tilde{\varphi}e_5=0,\ \xi=e_5$ ve $\eta=\tilde{g}(.,e_5)$ verilsin. Burada

$$\tilde{h}e_1=\tilde{\lambda}e_1,\ \tilde{h}e_2=\tilde{\lambda}e_2,\tilde{h}\tilde{\varphi}e_1=-\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{h}\tilde{\varphi}e_2=-\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}e_2,\tilde{h}\xi=0$$

şeklindedir. $\tilde{\nabla}$, yarı-Riemann metrik $\tilde{g}$ nin Levi-Civita konneksiyonu ve $\tilde{R}$ ise $\tilde{g}$ nün eğrilik tensörüdür. Koszul formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{e_1}\xi=(\tilde{\lambda}-1)\tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{\nabla}_{e_2}\xi=(\tilde{\lambda}-1)\tilde{\varphi}e_2,\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}\xi=-(\tilde{\lambda}+1)e_1,\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}\xi=-(\tilde{\lambda}+1)e_2,\\
&\tilde{\nabla}_{\xi}e_1=-\frac{\alpha\beta}{2}e_2-\frac{\tilde{\mu}}{2}\tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{\nabla}_{\xi}e_2=\frac{\alpha\beta}{2}e_1-\frac{\tilde{\mu}}{2}\tilde{\varphi}e_2,\\
&\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\varphi}e_1=-\frac{\tilde{\mu}}{2}e_1-\frac{\alpha\beta}{2}\tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\varphi}e_2=-\frac{\tilde{\mu}}{2}e_2+\frac{\alpha\beta}{2}\tilde{\varphi}e_1,\\
&\tilde{\nabla}_{e_1}e_1=0,\ \tilde{\nabla}_{e_1}e_2=0,\ \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\varphi}e_1=-(\tilde{\lambda}-1)\xi,\ \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\varphi}e_2=0,\\
&\tilde{\nabla}_{e_2}e_1=-\alpha e_2,\ \tilde{\nabla}_{e_2}e_2=\alpha e_1,\ \tilde{\nabla}_{e_2}\tilde{\varphi}e_1=-\alpha\tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{e_2}\tilde{\varphi}e_2=\alpha\tilde{\varphi}e_1-(\tilde{\lambda}-1)\xi,\\
&\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}e_1=\beta e_2-(\tilde{\lambda}+1)\xi,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}e_2=-\beta e_1,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}\tilde{\varphi}e_1=\beta\tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}\tilde{\varphi}e_2=-\beta\tilde{\varphi}e_1,\\
&\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}e_1=0,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}e_2=-(\tilde{\lambda}+1)\xi,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}\tilde{\varphi}e_1=0,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}\tilde{\varphi}e_2=0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $\tilde{\lambda}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$, $\tilde{\kappa}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-16}{16}$ ve $\tilde{\mu}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}+2$. O halde G bir paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olur (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

4.2. $\tilde{\kappa}>-1$ için Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-Manifoldlar

Bu kısımda, $\tilde{\kappa}>-1$ için paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar çalışılacaktır. Bu durumda Sonuç 4.1.3 e göre, $\tilde{\lambda}:=\sqrt{1+\tilde{\kappa}}$ olmak üzere, $0,+\tilde{\lambda},-\tilde{\lambda}$ karakteristik değerleriyle $\tilde{h}$ köşegenleştirilebilir. İlk sonuç, $\tilde{h}$ nın karakteristik uzayları tarafından tanımlanan dağılımlarının bazı değerli özelliklerini içermektedir.

Teorem 4.2.1: $\tilde{\kappa}>-1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. $\tilde{h}$ nın $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ karakteristik dağılımları integrallenebilirdir ve M nin iki total geodezik Legendrian foliasyonunu tanımlarlar. Daha da fazlası herhangi $X\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$, $Y\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için sırasıyla $\tilde{\nabla}_X Y$ nin $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ boyunca ve $\tilde{\nabla}_Y X$ nin $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ boyunca bileşeni yoktur (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: (4.1.5) denkleminde Y yerine $\tilde{\varphi}Y$ yazılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X\tilde{h})\tilde{\varphi}Y-(\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}Y}\tilde{h})X=-(1+\tilde{\kappa})(2\tilde{g}(X,Y)\xi-3\eta(X)\eta(Y)\xi+\eta(X)Y)-(1-\tilde{\mu})\eta(X)\tilde{h}Y$$

elde edilir. Burada $X,Y\in\Gamma(TM)$ dir. $X,Y,Z\in\Gamma(D)$ için bulunan son denklem Z ile iç çarpılırsa

$$\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X\tilde{h})\tilde{\varphi}Y-(\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}Y}\tilde{h})X,Z)=0.$$

Diğer bir yazılımla

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{h}\tilde{\varphi}Y-\tilde{h}\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}Y-\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}Y}\tilde{h}X+\tilde{h}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}Y}X,Z)=0 \qquad (4.2.1)$$

bulunur. (4.2.1) eşitliğinde $X,Y,Z\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ alınırsa

$$-2\tilde{\lambda}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}Y,Z)=0$$

elde edilir. $\tilde{\lambda}\neq 0$ olduğundan

$$0=\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}Y,Z)=X(\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,Z))-\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,\tilde{\nabla}_X Z)=-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Z,\tilde{\varphi}Y)$$

yazılabilir. Böylece $\tilde{\nabla}_X Z$, $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ ya diktir. Diğer taraftan;

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Z,\xi)=X(\tilde{g}(Z,\xi))-\tilde{g}(Z,\tilde{\nabla}_X\xi)=\tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}X)-\tilde{\lambda}\tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}X)=0$$

O halde $\tilde{\nabla}_X Z\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ dır.

Açıkça söylenebilir ki, eğer $X,Z\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ise $\tilde{\nabla}_X Z\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ dır. Böylece $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ total geodeziktir. Eğer $X,Z\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ise, $\tilde{\nabla}_X Z\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ olduğundan

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)=X(\tilde{g}(Y,Z))-\tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X Z)=0$$

yazılır. O halde $\tilde{\nabla}_X Y\in\Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})\oplus\mathbb{R}\xi)$ olmalıdır. Benzer method ile, $\tilde{\nabla}_Y X$ in de $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ boyunca bileşeni olmadığı ispatlanabilir.

Özellikle, $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ nın total geodezik oluşu, onların involutive dağılımlar olduğu anlamına gelir. Daha da ötesi, (Cappelletti Montano 2010) gereğince n-boyutludurlar. Böylece, M üzerinde iki Legendrian foliasyon tanımlarlar. □

Legendrian foliasyonların geometrisi (3.7.1) denklemi ile verilen Pang invaryantları ile anlatıldı. Bir sonraki teorem ile $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ Legendrian foliasyonlarının Pang invaryantlarının ifadeleri bulundu.

Teorem 4.2.2: $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ Legendrian foliasyonlarının Pang invaryantları

$$\Pi_{D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})} = -2\left(1-\frac{\tilde{\mu}}{2}-\sqrt{1+\tilde{\kappa}}\right)\tilde{g}\Big|_{D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})\times D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})} \tag{4.2.2}$$

$$\Pi_{D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})} = -2\left(1-\frac{\tilde{\mu}}{2}+\sqrt{1+\tilde{\kappa}}\right)\tilde{g}\Big|_{D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})\times D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})} \tag{4.2.3}$$

ile verilir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: X, $D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ nın bir kesiti olsun. (3.7.4) denkleminden ;

$$\tilde{R}(X,\xi)\xi = \tilde{\kappa}X + \tilde{\mu}\tilde{h}X \tag{4.2.4}$$

elde edilir. Diğer yandan;

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,\xi)\xi &= \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_\xi\xi - \tilde{\nabla}_\xi\tilde{\nabla}_X\xi - \tilde{\nabla}_{[X,\xi]}\xi \\
&= \tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi}X - \tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \tilde{\varphi}([\xi,X]) + \tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] \\
&= (1-\tilde{\lambda})\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}X}\xi + (1-\tilde{\lambda})[\xi,\tilde{\varphi}X] - \tilde{\varphi}[\xi,X] + \tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] \\
&= (1-\tilde{\lambda})(-\tilde{\varphi}^2X + \tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\varphi}X) + (1-\tilde{\lambda})[\xi,\tilde{\varphi}X] - \tilde{\varphi}[\xi,X] + \tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] \\
&= -X + \tilde{\lambda}^2X + 2\tilde{h}X - \tilde{\lambda}[\xi,\tilde{\varphi}X] + \tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] + \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}[\xi,X] - \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}[\xi,X] \\
&= -X + \tilde{\lambda}^2X + 2\tilde{\lambda}X - 2\tilde{\lambda}\tilde{h}X + \tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] - \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}[\xi,X]
\end{aligned}$$

$$\tilde{R}(X,\xi)\xi = -(1-\tilde{\lambda})^2X + \tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] - \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}[\xi,X] \tag{4.2.5}$$

denklemi bulunur.

(4.2.4) ve (4.2.5) denklemlerinden

$$\tilde{\varphi}\tilde{h}[\xi,X] = \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}[\xi,X] + (\tilde{\kappa} + \tilde{\mu}\tilde{\lambda} + (1-\tilde{\lambda})^2)X$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu son denkleme $\tilde{\varphi}$ etki ettirilirse

$$\widetilde{h}[\xi, X] = \widetilde{\lambda}[\xi, X] + (\widetilde{\kappa} + \widetilde{\mu}\widetilde{\lambda} + (1-\widetilde{\lambda})^2)\widetilde{\varphi}X$$

denklemi elde edilir.

$[\xi, X]$ i $D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})$ ve $D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})$ bileşenleri boyunca ayırırsak, son eşitlikten

$$[\xi, X]_{D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})} = -\frac{\widetilde{\lambda}^2 - 2\widetilde{\lambda} + 1 + \widetilde{\kappa} + \widetilde{\mu}\widetilde{\lambda}}{2\widetilde{\lambda}}\widetilde{\varphi}X = \left(1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2} - \sqrt{1+\widetilde{\kappa}}\right)\widetilde{\varphi}X$$

hesaplanır. Böylelikle herhangi $X, X' \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ için

$$\begin{aligned}\Pi_{D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})}(X, X') &= 2\widetilde{g}([\xi, X]_{D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})}, \widetilde{\varphi}X') \\ &= -2\left(1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2} - \sqrt{1+\widetilde{\kappa}}\right)\widetilde{g}(X, X')\end{aligned}$$

denklemi bulunur. (4.2.3) eşitliğinin de ispatı benzer şekilde yapılabilir. □

Önerme 4.2.1: $\widetilde{\kappa} > -1$ için $(M, \widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ paradeğme $(\widetilde{\kappa}, \widetilde{\mu})$-manifold olsun. X, Y vektör alanları olmak üzere,

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{h})Y = -\widetilde{g}(X, \widetilde{\varphi}\widetilde{h}^2 Y + \widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)\xi + \eta(Y)((1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}X - \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X) - \widetilde{\mu}\eta(X)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y \tag{4.2.6}$$

eşitliği geçerlidir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: Teorem 4.2.1 gereği $X, Y \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ veya $X, Y \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ için

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{h})Y = 0 \tag{4.2.7}$$

geçerlidir. $X \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ olduğu kabul edilsin. $\{X_1, ..., X_n, \widetilde{\varphi}X_1, ..., \widetilde{\varphi}X_n, \xi\}$ ile verilen $\widetilde{\varphi}$-bazı Yardımcı Teorem 4.1.2 de bahsedildiği gibi olsun. (4.1.48) e göre,

$$\widetilde{h}\widetilde{\nabla}_X Y=\widetilde{h}\left(-\sum_{i=1}^{r}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,\widetilde{\varphi}X_i)\widetilde{\varphi}X_i+\sum_{i=r+1}^{n}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,\widetilde{\varphi}X_i)\widetilde{\varphi}X_i+\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi\right)$$

$$=-\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{\nabla}_X Y,X_i)X_i+\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\sum_{i=r+1}^{n}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{\nabla}_X Y,X_i)X_i$$

$$\begin{aligned}
&=-\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}^2\widetilde{\nabla}_X Y\\
&=-\widetilde{\lambda}(\widetilde{\nabla}_X Y-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi)\\
&=-\widetilde{\lambda}(\widetilde{\nabla}_X Y+\widetilde{g}(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi)\xi)\\
&=-\widetilde{\lambda}(\widetilde{\nabla}_X Y-\widetilde{g}(Y,\widetilde{\varphi}X)\xi+\widetilde{g}(Y,\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)\xi)\\
&=\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h}Y-\widetilde{\lambda}(1-\widetilde{\lambda})\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\xi
\end{aligned}$$

olacak şekilde hesaplanır. Böylece $X\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ için

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y=\widetilde{\lambda}(1-\widetilde{\lambda})\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\xi \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Benzer method ile

$$(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{h})X=\widetilde{\lambda}(1+\widetilde{\lambda})\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\xi \tag{4.2.9}$$

bulunur.

X ve Y, M üzerinde iki vektör alanı olsun. $TM=D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})\oplus D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})\oplus\mathbb{R}\xi$ ayrışımına göre, X ve Y vektör alanlarını $X=X_+ + X_- +\eta(X)\xi$ ve $Y=Y_+ + Y_- +\eta(Y)\xi$ olacak şekilde ayrılsın. (4.1.6), (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.9) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y&=(\widetilde{\nabla}_{X_+}\widetilde{h})Y_+ +(\widetilde{\nabla}_{X_+}\widetilde{h})Y_- +(\widetilde{\nabla}_{X_+}\widetilde{h})\eta(Y)\xi\\
&\quad+(\widetilde{\nabla}_{X_-}\widetilde{h})Y_+ +(\widetilde{\nabla}_{X_-}\widetilde{h})Y_- +(\widetilde{\nabla}_{X_-}\widetilde{h})\eta(Y)\xi\\
&\quad+\eta(X)\Big((\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{h})Y_+ +(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{h})Y_- +(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{h})\eta(Y)\xi\Big)\\
&=\widetilde{\lambda}(1-\widetilde{\lambda})\widetilde{g}(X_+,\widetilde{\varphi}Y_-)\xi-\widetilde{\lambda}(1+\widetilde{\lambda})\widetilde{g}(X_-,\widetilde{\varphi}Y_+)\xi\\
&\quad+\eta(Y)\Big(\widetilde{h}(\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)\Big)-\widetilde{\mu}\eta(X)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y = & -\tilde{\lambda}^2[\tilde{g}(X_-,\tilde{\varphi}Y_+)+\tilde{g}(X_+,\tilde{\varphi}Y_-)]\xi+\tilde{\lambda}[\tilde{g}(X_+,\tilde{\varphi}Y_-)-\tilde{g}(X_-,\tilde{\varphi}Y_+)]\xi \\
& +\eta(Y)\big(\tilde{h}(\tilde{\varphi}X-\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\big)-\tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y
\end{aligned}
$$

denklemi düzenlenilirse,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y & = -\tilde{g}(\tilde{h}^2X,\tilde{\varphi}Y)\xi+\tilde{g}(X,\tilde{h}\tilde{\varphi}Y)\xi+\eta(Y)\big(\tilde{h}(\tilde{\varphi}X-\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\big)-\tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y \\
& = \big(-(\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)+\tilde{g}(X,\tilde{h}\tilde{\varphi}Y)\big)\xi+\eta(Y)\big(\tilde{h}(\tilde{\varphi}X-\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\big)-\tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y
\end{aligned}
$$

elde edilen bu denklemden (4.2.6) kolayca bulunur. □

Aşağıdaki teorem ile genel sonuç hatırlatılmaktadır.

Teorem 4.2.3: (M,η); $\nabla^{bl}\Pi_{F_1}=\nabla^{bl}\Pi_{F_2}=0$ olacak şekilde (F_1,F_2) bi-Legendrian yapısına sahip bir değme manifolddur. Burada ∇^{bl}; (F_1,F_2) ile ilişkili bi-Legendrian konneksiyonu belirtmektedir. Aşağıda verilen şartlardan birinin geçerli olduğu varsayılsın.

(I) F_1 ve F_2 pozitif tanımlıdırlar ve TF_1 de $\overline{\Pi}_{F_1}=ab\overline{\Pi}_{F_2}$ ve TF_2 de $\overline{\Pi}_{F_2}=ab\overline{\Pi}_{F_1}$ olacak şekilde iki tane pozitif a ve b sayıları vardır.

(II) F_1 pozitif tanımlıdır, F_2 negatif tanımlıdır ve TF_1 de $\overline{\Pi}_{F_1}=ab\overline{\Pi}_{F_2}$ ve TF_2 de $\overline{\Pi}_{F_2}=ab\overline{\Pi}_{F_1}$ olacak şekilde $a>0$ ve $b>0$ sayıları vardır.

(III) F_1 ve F_2 negatif tanımlıdırlar ve TF_1 de $\overline{\Pi}_{F_1}=ab\overline{\Pi}_{F_2}$ ve TF_2 de $\overline{\Pi}_{F_2}=ab\overline{\Pi}_{F_1}$ olacak şekilde iki tane negatif a ve b sayıları vardır.

(M,η) değme manifoldu aşağıdaki şartları sağlayan bir $(\varphi_{a,b},\xi,\eta,g_{a,b})$ uyumlu değme metrik yapısına sahiptir.

(i) Eğer $a=b$ ise $(M,\varphi_{a,b},\xi,\eta,g_{a,b})$ Sasakian manifolddur.

(ii) Eğer $a \neq b$ ise $(M, \varphi_{a,b}, \xi, \eta, g_{a,b})$ bir $(\kappa_{a,b}, \mu_{a,b})$ değme metrik manifolddur. Burada

$$\kappa_{a,b} = 1 - \frac{(a-b)^2}{16}, \ \mu_{a,b} = 2 - \frac{a+b}{16} \tag{4.2.10}$$

(Cappelletti Montano 2009b).

Teorem 4.2.3 ün ispatında (I), (II), (III) kabulleri uyumlu metrik yapının inşasında kullanılmıştır. Oysaki $\nabla^{bl}\Pi_{F_1} = \nabla^{bl}\Pi_{F_2} = 0$ hipotezleri sadece değme metrik yapının sıfırlık şartını sağladığını ispatlamada gereklidir.

Aşağıdaki teorem ile paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldlar ile değme Riemann geometri arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 4.2.4: $\tilde{\kappa} > -1$ için $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ pozitif ya da negatif tanımlı bir paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifold olsun. M, $ab = 4(1+\tilde{\kappa})$ eşitliğini sağlayan a ve b reel sayıları ile parametrelendirilmiş $(\varphi_{a,b}, \xi, \eta, g_{a,b})$ değme Riemann yapılarının bir ailesine sahiptir.

Her değme metrik $(\varphi_{a,b}, \xi, \eta, g_{a,b})$ yapısı

$$\varphi_{a,b} = \begin{cases} \dfrac{b}{2(1+\tilde{\kappa})}\tilde{h}, & D^{+} \ \textit{üzerinde} \\ \dfrac{-a}{2(1+\tilde{\kappa})}\tilde{h}, & D^{-} \ \textit{üzerinde} \\ 0, & IR\xi \ \textit{üzerinde} \end{cases} \tag{4.2.11}$$

$$g_{a,b} = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\tilde{g}(\tilde{h}\cdot, \cdot), & D^{+} \times D^{+} \ \textit{üzerinde} \\ \dfrac{2}{b}\tilde{g}(\tilde{h}\cdot, \cdot), & D^{-} \times D^{-} \ \textit{üzerinde} \\ \eta \otimes \eta, & \end{cases} \tag{4.2.12}$$

ile verilir.

Ayrıca, eğer $\tilde{\mu} = 2$ ise her $(\varphi_{a,b}, \xi, \eta, g_{a,b})$ yapısı bir değme metrik $(\kappa_{a,b}, \mu_{a,b})$ -yapısıdır. Burada $\kappa_{a,b} = 1 - \dfrac{(a-b)^2}{16}$ ve $\mu_{a,b} = 2 - \dfrac{a+b}{2}$ dir. ($a = b$ ise Sasakian dir) (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ nın kanonikal bi-Legendrian (D^+, D^-) yapısının, Teorem 4.2.3 deki (I)-(III) kabüllerinden birini sağladığı ispatlanırsa sonuç çıkacaktır.

Paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$ -yapısı $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ nın pozitif ya da negatif tanımlı olduğu kabülünden, D^+ ve D^- nin pozitif ya da negatif tanımlı oluşu elde edilir.

O halde geriye, Teorem 4.2.3 deki (I) veya (III) kabüllerindeki gibi, $\overline{\Pi}_{D^+}$ ve $\overline{\Pi}_{D^-}$ Pang-Libermann invaryantları ile ilişkili olan a ve b reel sayılarının varlığını ispatlamak kalıyor. İlk önce $\wedge_{\_} : TM \to D^+$ Libermann dönüşümünün ifadesi bulunsun. Tanımdan $\forall Y \in \Gamma(D^-)$ için $\wedge_{D^+} \xi = 0$ ve $\wedge_{D^-} Y = 0$ eşitlikleri sağlanır. $X \in \Gamma(D^+)$ olsun. (4.1.49) eşitliği kullanılarak herhangi $Y \in \Gamma(D^+)$ için

$$2\tilde{g}(\tilde{h} \wedge_{D^-} X, Y) = \Pi_{D^+}(\wedge_{D^-} X, Y) = d\eta(X, Y) = \tilde{g}(X, \tilde{\varphi}Y) = -\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, Y) = -\tilde{g}(X, Y)$$

elde edilir. Sonuç olarak $2\tilde{h} \wedge_{D^-} X = -X$ dir. Bulunan bu son eşitliğe $\tilde{h}$ operatörü uygulanıp, (4.1.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\wedge_{D^-} X = -\frac{1}{2(1+\tilde{\kappa})} \tilde{h} X \tag{4.2.13}$$

bulunur. Böylece herhangi $X, X' \in \Gamma(D^+)$ için

$$\overline{\Pi}_{D^-}(X,X') = \Pi_{D^-}(\wedge_{D^-}X, \wedge_{D^-}X') = \frac{1}{4(1+\widetilde{\kappa})^2}\Pi_{D^-}(\widetilde{h}X, \widetilde{h}X')$$
$$= \frac{1}{4(1+\widetilde{\kappa})^2} 2\widetilde{g}(\widetilde{h}^2 X, \widetilde{h}X')$$
$$= \frac{1}{2(1+\widetilde{\kappa})}\widetilde{g}(\widetilde{h}X, X') = \frac{1}{4(1+\widetilde{\kappa})}\Pi_{D^+}(X,X').$$

elde edilir. Bunun anlamı,

$$\Pi_{D^+}(X,X') = 4(1+\widetilde{\kappa})\overline{\Pi}_{D^-}(X,X') \tag{4.2.14}$$

eşitliğinin var olmasıdır. Benzer şekilde $\forall Y \in \Gamma(D^-)$ için

$$\wedge_{D^+} Y = \frac{1}{2(1+\widetilde{\kappa})}\widetilde{h}Y \tag{4.2.15}$$

herhangi $Y, Y' \in \Gamma(D^-)$ için

$$\Pi_{D^-}(Y,Y') = 4(1+\widetilde{\kappa})\overline{\Pi}_{D^+}(Y,Y') \tag{4.2.16}$$

bulunur. (4.2.14) eşitliği ile (4.2.16) eşitlikleri kıyaslandığında (D^+, D^-) bi-Legendrian yapıların, Teorem 4.2.3 ün (I) ya da (III) nolu kabullerini sağladığı görülür.

D^+ ve D^- nin sırasıyla pozitif ya da negatif tanımlı olmasına göre a ve b de $ab = 4(1+\widetilde{k})$ eşitliğini sağlayacak şekilde herhangi iki pozitif ya da negatif reel sayıdır. Böylece Teorem 4.2.3 den M de $(\varphi_{a,b}, \xi, \eta, g_{a,b})$ değme Riemann yapıların bir ailesinin varlığı ispat edilmiş olunur. (4.2.11) ve (4.2.12) eşitlikleri (Cappelletti Montano 2009b ,(3.4)-(3.5)) den ve (4.2.13), (4.2.15) ve (4.1.49) nolu denklemlerden kolayca gözükmektedir. Teoremin son kısmı gözönüne alınırsa (D^+, D^-) bi-Legendrian yapısının, Teorem 4.2.3 ün kabulünü sağladığının ispatlanması gerekmektedir. Yani $\nabla^{bl}\Pi F_1 = \nabla^{bl}\Pi F_2 = 0$ olduğu gösterilmelidir. Teorem 3.7.4 den D^+ ve D^- integrallenebilirse ∇^{bl} ile $\widetilde{\nabla}^{pc}$ paradeğme konneksiyonu çakışmaktadır. (3.6.7) ve (4.2.6) denklemlerinden herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X{}^{pc}\tilde{h})Y &= \tilde{\nabla}_X\tilde{h}Y + \eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y + \eta(\tilde{h}Y)(\tilde{\varphi}X - \tilde{\varphi}\tilde{h}X) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\xi - \tilde{g}(\tilde{h}X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\xi \\
&\quad - \tilde{h}\tilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\tilde{h}\tilde{\varphi}Y - \eta(Y)(\tilde{h}\tilde{\varphi}X - \tilde{h}\tilde{\varphi}\tilde{h}X) \\
&= (\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y + 2\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y + \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - (1+\tilde{\kappa})\eta(Y)\tilde{\varphi}X \\
&\quad + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\xi - \tilde{g}(\tilde{h}X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\xi \\
&= \tilde{g}(X,\tilde{h}\tilde{\varphi}Y)\xi - (1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\xi + \eta(Y)\tilde{h}\tilde{\varphi}X + (1+\tilde{\kappa})\eta(Y)\tilde{\varphi}X + \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{h}\tilde{\varphi}Y \\
&\quad + 2\eta(X)\tilde{\varphi}hY + \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - (1+\tilde{\kappa})\eta(Y)\tilde{\varphi}X + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\xi + (1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\xi \\
&= (\tilde{\mu}-2)\eta(X)\tilde{h}\tilde{\varphi}Y.
\end{aligned}
$$

olacak şekilde hesaplanır. Sonuç olarak, eğer $\tilde{\mu} = 2$ ise $\nabla^{bl}\tilde{h} = \tilde{\nabla}^{pc}\tilde{h} = 0$ olur. Diğer yandan Teorem 3.6.2 nin (i) şıkkından, $\nabla^{bl}\tilde{g} = \tilde{\nabla}^{pc}\tilde{g} = 0$ olur. Böylece,

$\forall X, X' \in \Gamma(D^{+})$ ve $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için (4.1.49) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
(\nabla^{bl}_Z \Pi_{D^+})(X,X') &= 2Z(\tilde{g}(\tilde{h}X,X')) - 2\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\nabla}^{pc}_Z X, X') - 2\tilde{g}(\tilde{h}X,\tilde{\nabla}^{pc}_Z X') \\
&= 2Z(\tilde{g}(\tilde{h}X,X')) - 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}^{pc}_Z\tilde{h}X, X') - 2\tilde{g}(\tilde{h}X,\tilde{\nabla}^{pc}_Z X') \\
&= 2(\tilde{\nabla}^{pc}_Z\tilde{g})(\tilde{h}X,X') \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur.

Benzer şekilde, $\forall Y, Y' \in \Gamma(D^{-})$ ve $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için (4.1.49) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
(\nabla^{bl}_Z \Pi_{D^-})(Y,Y') &= 2Z(\tilde{g}(\tilde{h}Y,Y')) - 2\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{\nabla}^{pc}_Z Y, Y') - 2\tilde{g}(\tilde{h}Y,\tilde{\nabla}^{pc}_Z Y') \\
&= 2Z(\tilde{g}(\tilde{h}Y,Y')) - 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}^{pc}_Z\tilde{h}Y, Y') - 2\tilde{g}(\tilde{h}Y,\tilde{\nabla}^{pc}_Z Y') \\
&= 2(\tilde{\nabla}^{pc}_Z\tilde{g})(\tilde{h}Y,Y') \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 4.2.1: $\tilde{\kappa} > -1$ için her pozitif ya da negatif tanımlı paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldu K -değme yapıya sahiptir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: Teorem 4.2.4 de $a = b = \pm 2\sqrt{1+\tilde{\kappa}}$ almak yeterlidir. Çünkü Teorem 4.2.3 ün ispatında (Cappelletti Montano 2009b) $a = b$ ise $h_{a,b} = 0$ olduğu ve böylece değme metrik yapının K-değme olduğu ispatlanmıştır. □

Bir sonraki teorem ile $\tilde{\kappa} > -1$ için herhangi pozitif ya da negatif tanımlı paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldlar üzerinde bir değme metrik yapının tanımlanabileceği ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.5: $\tilde{\kappa} > -1$ için herhangi pozitif ya da negatif tanımlı paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldlar

$$\phi := \mp \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{k}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}, \quad g := -d\eta(\cdot, \phi\cdot) + \eta \otimes \eta \tag{4.2.17}$$

ile tanımlanan bir (ϕ, ξ, η, g) kanonikal değme Riemann yapıya sahiptir. Burada $\mp$ işareti, paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldunun pozitif ya da negatif tanımlı olmasına bağlıdır.

Ayrıca eğer $\tilde{\mu} = 2$ ise (ϕ, ξ, η, g) yapısı Sasakian, eğer $\tilde{\mu} \neq 2$ ise (ϕ, ξ, η, g) yapısı Sasakian olmayan ve

$$\kappa = 1 - (1 - \frac{\tilde{\mu}}{2})^2, \quad \mu = 2(1 \mp \sqrt{1+\tilde{\kappa}}) \tag{4.2.18}$$

ile verilen değme metrik (κ, μ)-yapıya sahiptir. Burada $\mp$ işareti sırasıyla $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ paradeğme metrik yapının pozitif ya da negatif tanımlı olmasına bağlıdır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: (4.2.17) eşitliği ile (1,1) tipinde ϕ tensör alanı ve (0,2) tipinde g tensörü tanımlanmaktadır. İlk önce (4.1.2) eşitliği kullanılarak

$\phi^2 = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}} \tilde{\varphi}\tilde{h}\,\tilde{\varphi}\tilde{h} = -\frac{1}{1+\tilde{\kappa}} \tilde{h}^2 = -\tilde{\varphi}^2 = -I + \eta \otimes \xi$ elde edilir. Daha sonra g nin bir Riemann metrik olduğu ispat edilecektir. $\tilde{h}$ operatörünün $\tilde{g}$ ye göre simetrik oluşu kullanılırsa, herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
g(X,Y) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} d\eta(X, \tilde{\varphi}\tilde{h}Y) + \eta(X)\eta(Y) \\
&= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(X, \tilde{\varphi}^2 \tilde{h}Y) + \eta(X)\eta(Y) \\
&= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(X, \tilde{h}Y) + \eta(X)\eta(Y) \qquad (4.2.19) \\
&= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(Y, \tilde{h}X) + \eta(X)\eta(Y) \\
&= g(Y, X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde g simetriktir. g nin pozitif tanımlı olduğunu ispatlamak için, $\{X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n,\xi\}$ $\tilde{\varphi}$-bazı Yardımcı Teorem 4.1.2 deki gibi alınsın.

$$
\begin{aligned}
g(\xi,\xi) = 1,\ g(X_i, X_i) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(X_i, \tilde{h}X_i) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{\lambda}\tilde{g}(X_i, X_i) \\
&= \pm \tilde{g}(X_i, X_i) = (\pm 1)(\pm 1) = 1
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
g(Y_i, Y_i) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(Y_i, \tilde{h}Y_i) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(Y_i, -\tilde{\lambda}Y_i) \\
&= \mp \tilde{g}(Y_i, Y_i) = (\mp 1)(\mp 1) = 1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ ve $g(X, \phi Y) = d\eta(X,Y)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece (ϕ, ξ, η, g) bir değme Riemann yapıdır. Teoremin ikinci kısmı ispatlansın. (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısı ile ilişkilendirilen h operatörünün ifadesi hesaplansın.

$$
\begin{aligned}
h = \frac{1}{2} L_\xi \phi &= \mp \frac{1}{2\sqrt{1+\widetilde{\kappa}}} L_\xi (\widetilde{\varphi}\widetilde{h}) \\
&= \mp \frac{1}{2\sqrt{1+\widetilde{\kappa}}} \Big((L_\xi \widetilde{\varphi})\widetilde{h} + \widetilde{\varphi}(L_\xi \widetilde{h}) \Big)
\end{aligned}
\tag{4.2.20}
$$

Diğer yandan (4.1.6) eşitliği kullanılarak, herhangi $X \in \Gamma(TM)$ için,

$$
\begin{aligned}
(L_\xi \widetilde{h})X &= [\xi, \widetilde{h}X] - \widetilde{h}[\xi, X] \\
&= \widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{h}X - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{h}X}\xi - \widetilde{h}\widetilde{\nabla}_\xi X + \widetilde{h}\widetilde{\nabla}_X \xi \\
&= (\widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{h})X + \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X - \widetilde{\varphi}\widetilde{h}^2 X - \widetilde{h}\widetilde{\varphi}X + \widetilde{h}\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X \\
&= (2-\widetilde{\mu})\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X - 2(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}X
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde (4.2.20) eşitliği

$$
h = \mp \frac{1}{2\sqrt{1+\widetilde{\kappa}}} (2-\widetilde{\mu})h \tag{4.2.21}
$$

halini alır.

$\widetilde{\mu} \neq 2$ ve $\widetilde{\mu} = 2$ olduğu durumlar incelensin. İlk durumda (4.2.21) eşitliğinden h nın köşegenleşebildiği ve

$$
\lambda := 1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2} \tag{4.2.22}
$$

olmak üzere $0, \pm\lambda$ karakteristik değerlere sahip olduğu ve $\widetilde{h}$ ile aynı karakteristik dağılımlara sahip olduğu görülmektedir.

$D_h(\lambda), D_h(-\lambda)$ Legendrian foliasyonlarının ve onlara karşılık gelen $\widetilde{\nabla}^{bl}$ bi-Legendrian konneksiyonunun Teorem 3.7.2 deki şartları sağladığı gösterilirse, (ϕ, ξ, η, g) bir değme metrik (κ, μ)-yapı oluşturacaktır. İlk önce, $D_h(\lambda)$ *ve* $D_h(-\lambda)$ g-dik olduğu gösterilsin. (4.2.19) eşitliği kullanılarak ve $\widetilde{h}$ nın karakteristik dağılımları Sonuç 4.1.3 nedeniyle $\widetilde{g}$ - dik olması göz önüne alınarak

$$g(X,Y)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}\tilde{g}(X,\tilde{h}Y)=\mp\tilde{g}(X,Y)=0$$

elde edilir.

Bi-Legendrian konneksiyonu tanımından, Teorem 3.7.2 nin (i) ve (ii) şartları ve $\tilde{\nabla}^{bl}\eta=\tilde{\nabla}^{bl}d\eta=0$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\tilde{\nabla}^{bl}h=0$ dır. Çünkü $\tilde{\nabla}^{bl}, D_h(\lambda) ve D_h(-\lambda)$ yı korur. O halde geriye $\tilde{\nabla}^{bl}g=0$ ve $\tilde{\nabla}^{bl}\phi=0$ olduğunu ispatlamak kalıyor. Herhangi $X\in\Gamma(D_h(\lambda))$ ve $Y\in\Gamma(D_h(-\lambda))$ için (Cappelletti Montano 2005) deki tanımdan $\tilde{\nabla}^{bl}_X Y=[X,Y]_{D_h(-\lambda)}$ ve $\tilde{\nabla}^{bl}_Y X=[Y,X]_{D_h(\lambda)}$ olduğu hatırlansın. Herhangi $X,X'\in\Gamma(D_h(\lambda))$ ve $Y,Y'\in\Gamma(D_h(-\lambda))$ için, Koszul formülü kullanarak

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}^{bl}_Y\tilde{g})(X,X')&=Y(\tilde{g}(X,X'))-\tilde{g}([Y,X]_{D_h(\lambda)},X')-\tilde{g}([Y,X']_{D_h(\lambda)},X)\\&=Y(\tilde{g}(X,X'))-\tilde{g}([Y,X],X')-\tilde{g}([Y,X'],X)\\&=-2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X',Y)=0\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\tilde{g}$ -dikliği ve $D_{\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda})=D_h(\pm\lambda)$ nın total geodezikliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}^{bl}_X\tilde{g})(Y,Y')&=X(\tilde{g}(Y,Y'))-\tilde{g}([X,Y]_{D_h(-\lambda)},Y')-\tilde{g}([X,Y']_{D_h(-\lambda)},Y)\\&=-2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y Y',X)=0,\end{aligned}$$

$$(\tilde{\nabla}^{bl}_\xi\tilde{g})(X,X')=-2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X',\xi)=0,$$

$$(\tilde{\nabla}^{bl}_\xi\tilde{g})(Y,Y')=-2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y Y',\xi)=0$$

elde edilir.

Ayrıca herhangi $X,X',X''\in\Gamma(D_h(\lambda))$ için $\tilde{\nabla}^{bl}d\eta=0$ oluşu ve Koszul formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}^{bl}_X \tilde{g})(X', X'') &= X(\tilde{g}(X', X'')) - d\eta(\tilde{\nabla}^{bl}_X X', \tilde{\varphi}X'') - d\eta(X', \tilde{\varphi}\tilde{\nabla}^{bl}_X X'') \\
&= X(\tilde{g}(X', X'')) - X(d\eta(X', \tilde{\varphi}X'')) + d\eta(X', \tilde{\nabla}^{bl}_X \tilde{\varphi}X'') \\
&\quad - X(d\eta(\tilde{\varphi}X', X'')) + d\eta(\tilde{\nabla}^{bl}_X \tilde{\varphi}X', X'') \\
&= X(\tilde{g}(X', X'')) - X(\tilde{g}(X', X'')) + \tilde{g}(X', \tilde{\varphi}\tilde{\nabla}^{bl}_X \tilde{\varphi}X'') \\
&\quad - X(\tilde{g}(\tilde{\varphi}X', \tilde{\varphi}X'')) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}^{bl}_X \tilde{\varphi}X', \tilde{\varphi}X'') \\
&= -X(\tilde{g}(\tilde{\varphi}X', \tilde{\varphi}X'')) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}X', [X, \tilde{\varphi}X'']_{D_{h(-\lambda)}}) + \tilde{g}([X, \tilde{\varphi}X']_{D_{h(-\lambda)}}, \tilde{\varphi}X'') \\
&= -X(\tilde{g}(\tilde{\varphi}X', \tilde{\varphi}X'')) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}X', [X, \tilde{\varphi}X'']) + \tilde{g}([X, \tilde{\varphi}X'], \tilde{\varphi}X'') \\
&= 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}X'} \tilde{\varphi}X'', X) = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Benzer hesaplamalar ile $D_{\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda})$ nın total geodezik oluşu kullanılarak, herhangi $Y, Y', Y'' \in \Gamma(D_h(-\lambda))$ için

$$
(\tilde{\nabla}^{bl}_Y \tilde{g})(Y', Y'') = 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}Y'} \tilde{\varphi}Y'', Y) = 0
$$

bulunur. Tanımdan $\tilde{\nabla}^{bl}\xi = 0$ olduğundan $\tilde{\nabla}^{bl}\tilde{g} = 0$ olur. Böylece (4.2.19) denkleminden, tüm $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}^{bl}_X g)(Y, Z) &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}}}(\nabla^{bl}_X \tilde{g})(Y, \tilde{h}Z) \\
&\quad + (\tilde{\nabla}^{bl}_X \eta)(Y)\eta(Z) + \eta(Y)(\tilde{\nabla}^{bl}_X \eta)(Z)
\end{aligned}
$$

$\tilde{\nabla}^{bl}\tilde{g} = 0$ ve $\tilde{\nabla}^{bl}\eta = 0$ olduğundan $(\tilde{\nabla}^{bl}_X g)(Y, Z) = 0$ olur.

Diğer yandan, $\tilde{\nabla}^{bl} g = 0, \tilde{\nabla}^{bl} d\eta = 0$ ve $d\eta = g(\cdot, \phi\cdot)$ oluşu $\tilde{\nabla}^{bl}$ bi-Legendrian konneksiyonunun ϕ tensör alanını koruduğunu gösterir. Böylece Teorem 3.7.2 e göre, (ϕ, ξ, η, g) bir değme metrik (κ, μ)-yapıdır.

κ ve μ sabitlerinin ifadelerini bulmak için, bazı hazırlıklar yapılsın. (4.2.22) eşitliğinden $\sqrt{1-\kappa} = \left|1 - \frac{\tilde{\mu}}{2}\right|$ elde edilir. Böylece,

$$\kappa = 1 - \left(1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)^2 \qquad (4.2.23)$$

yazılabilir.

$\widetilde{\mu}$ yü bulmak için, $(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}),\ D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $(D_h(-\lambda),\ D_h(\lambda))$ bi-Legendrian yapıları çakıştığından, bunlara karşılık gelen Pang invaryantları da eşit olmalıdır. Yani (4.2.21) eşitliğinden

$$D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}) = \begin{cases} D_h(\pm|\lambda|), & \widetilde{\mu} > 2 \\ D_h(\mp|\lambda|), & \widetilde{\mu} < 2 \end{cases} \qquad (4.2.24)$$

$$D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}) = \begin{cases} D_h(\mp|\lambda|), & \widetilde{\mu} > 2 \\ D_h(\pm|\lambda|), & \widetilde{\mu} < 2 \end{cases} \qquad (4.2.25)$$

elde edilebilir. Burada $\pm$ işareti paradeğme $(\widetilde{\kappa}, \widetilde{\mu})$-manifoldun pozitif ya da negatif tanımlı olmasına bağlıdır. $(M, \widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ pozitif tanımlı ve $\widetilde{\mu} > 2$ olsun. (4.2.24) (4.2.25) eşitliklerini kullanıp, (3.7.5) ile (4.2.2) eşitliği karşılaştırılırsa, herhangi $X, X' \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ için,

$$2\left(1 - \frac{\mu}{2} + |\lambda|\right) g(X, X') = -2\left(1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2} - \sqrt{1 + \widetilde{\kappa}}\right) \widetilde{g}(X, X') \qquad (4.2.26)$$

bulunur. (4.2.19) ve (4.2.23), (4.2.26) eşitliklerinden,

$$2\left(1 - \frac{\mu}{2} - \left(1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)\right) \widetilde{g}(X, X') = -2\left(1 - \frac{\widetilde{\mu}}{2} - \sqrt{1 + \widetilde{\kappa}}\right) \widetilde{g}(X, X')$$

denklemi bulunur. Bu son denklemden

$$\mu = 2(1 - \sqrt{1 + \widetilde{\kappa}}) \qquad (4.2.27)$$

elde edilir.

$\tilde{\mu} < 2$ kabul edilirse, (3.7.6) denkleminden,

$$2\left(1-\frac{\mu}{2}-|\lambda|\right)g(X,X')=-2\left(1-\frac{\tilde{\mu}}{2}-\sqrt{1+\tilde{\kappa}}\right)\tilde{g}(X,X')$$

bulunur. $|\lambda| = 1-\dfrac{\tilde{\mu}}{2}$ olduğundan tekrar (4.2.27) eşitliği elde edilir.

$(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ nin negatif tanımlı olmasını ispatı benzerdir ve

$$\mu = 2(1+\sqrt{1+\tilde{\kappa}}) \tag{4.2.28}$$

elde edilir.

$\tilde{\mu} = 2$ olduğu kabul edilirse, (4.2.21) denkleminden h operatörü sıfır olur. Yani (ϕ,ξ,η,g) değme metrik yapısı K-değme olur. Özellikle tüm $X \in \Gamma(TM)$ için $N_\phi(\xi,X) = \phi^2[\xi,X]-\phi[\xi,\phi X] = -2\phi hX = 0$ dır.

Üstelik, $D^+, D^-, D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}), D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ Legendrian foliasyonları olduğundan, (4.1.44) ile verilen kanonikal hemen hemen bi-paradeğme yapı integrallenebilirdir. Her $X,Y \in \Gamma(D)$ için Sonuç 3.7.1 den $N_\phi(X,Y) = 0$ dır.

Sonuç olarak, N_ϕ tensör alanı sıfırdır ve (M,ϕ,ξ,η,g) bir Sasakian manifolddur. □

Örnek 4.2.1: Örnek 4.1.1 deki $(G,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolduna Teorem 4.2.5 uygulansın. O halde G de (ϕ,ξ,η,g) kanonikal değme (κ,μ)-yapısı (4.2.18) eşitliğine göre $\kappa = 1-\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{16}$ ve $\mu = 2\left(1+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)$ olacak şekilde tanımlıdır. Değme Riemann yapısı

$$\phi e_1 = e_3,\ \phi e_2 = e_4,\ \phi e_3 = -e_1,\ \phi e_4 = -e_2,\ \phi e_5 = 0,\ g(e_i,e_j) = \delta_{ij},\ i,j \in \{1,...,5\}$$

olacak şekilde tanımlıdır. G Lie grubundaki bir değme metrik (κ,μ)-yapısının Boeckx'in sınıflandırmasında nerede olduğunu anlamak için (Boeckx 2000) de verilen Boeckx invaryantının $I_G=\dfrac{1-\frac{\mu}{2}}{\sqrt{1-\kappa}}=\dfrac{1-\frac{\mu}{2}}{\lambda}$ değeri hesaplansın. Kısa bir hesap ile,

$$1-\kappa=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{16}\Rightarrow\sqrt{1-\kappa}=\frac{\left|\alpha^2-\beta^2\right|}{4}$$

$$1-\frac{\mu}{2}=1-\frac{2\left(1+\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)}{2}\Rightarrow 1-\frac{\mu}{2}=-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)$$

eşitliklerinden

$$I_G=\frac{1-\frac{\mu}{2}}{\sqrt{1-\kappa}}=\frac{-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)}{\frac{\left|\alpha^2-\beta^2\right|}{4}}=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\left|\alpha^2-\beta^2\right|}$$

olduğu görülür (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

$I_G<-1$ olması $\alpha,\beta\neq 0$ iken geçerlidir. $I_G=-1$ durumu ise $\alpha=0,\beta\neq 0$ veya $\alpha\neq 0,\beta=0$ olması durumunda geçerlidir. Böylece $(\mathrm{G},\phi,\xi,\eta,g)$ değme Riemann manifoldu (Boeckx, 4.Bölüm 2000) de verilen değme Riemann Lie gruplarından birine lokal izometriktir. Yani (4.1.51)-(4.1.54) denklemleri ile verilen aynı sabit yapılara sahiptir.

Uyarı 4.2.1: (M,ϕ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ',μ')-uzayı olsun. Teorem 3.7.3 de verilen prosedürü uygulayarak

$$\tilde{\kappa}=\kappa-2+\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^2,\quad \tilde{\mu}=2$$

olacak şekilde M de, bir $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-yapısı elde edilir.

Bi-Legendrian (D^{+},D^{-}) yapısı, h nın özdağılımları tarafından tanımlanan $(D_h(\lambda),D_h(-\lambda))$ ile karşılık geldiğinden, Terem 3.7.6 nedeniyle, paradeğme metrik yapı $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ nın pozitif ya da negatif tanımlı olması için gerek ve yeter şartın $I_M^{\;2}>1$ olması gerektiği söylenebilir. Burada I_M değme metrik (κ,μ)-yapı (ϕ,ξ,η,g) nın Boeckx invaryantıdır. Fakat $I_M^{\;2}>1$ olması için gerek ve yeter şart $\dfrac{1-\frac{\mu}{2}}{1-\kappa}>1$ olmasıdır. Yani $\kappa-1+\left(1-\dfrac{\mu}{2}\right)^2>0$ olması diğer bir deyişle $\tilde{\kappa}>-1$ olmasıdır. Böylelikle, yukarıdaki prosedür ile $\tilde{\kappa}>-1$ için pozitif ya da negatif tanımlı paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-yapıları belirlenmektedir. O halde Teorem 4.2.5 kabülü ile yeni bir değme Riemann (ϕ',ξ,η,g') yapısı elde edilebilir. $\tilde{\mu}=2$ olduğundan (ϕ',ξ,η,g') bir Sasakian yapısıdır (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Yardımcı Teorem 4.2.1: $\tilde{\kappa}>-1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. X,Y,Z vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z-\tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z=&(\tilde{\kappa}(\eta(X)\tilde{g}(\tilde{h}Y,Z)-\eta(Y)\tilde{g}(\tilde{h}X,Z))\\&+\tilde{\mu}(1+\tilde{\kappa})(\eta(X)\tilde{g}(Y,Z)-\eta(Y)\tilde{g}(X,Z)))\xi\\&+\tilde{\kappa}(\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y-\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}X+\tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\tilde{\varphi}Y-\tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\tilde{\varphi}X\\&+\eta(Z)(\eta(X)\tilde{h}Y-\eta(Y)\tilde{h}X))-\tilde{\mu}((1+\tilde{\kappa})\eta(Z)(\eta(Y)X-\eta(X)Y)\\&+2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z).\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

eşitliği geçerlidir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: $\tilde{h}$ için Ricci özdeşliği

$$\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z-\tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z=(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\tilde{h})Z-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Z-(\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\tilde{h})Z \tag{4.2.30}$$

dır.

(4.1.2) denklemi (4.2.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y = &-((1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y))\xi + \eta(Y)((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}X - \tilde{\varphi}\tilde{h}X) \\
&- \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y
\end{aligned}
\tag{4.2.31}
$$

elde edilir. (4.2.31) yardımıyla (4.2.30) denklemi açılırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z - \tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z &= (\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \tilde{h})Z - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \tilde{h})Z - (\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\tilde{h})Z \\
&= \tilde{\nabla}_X (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})Z - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_Y (\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Z \\
&\quad + (\tilde{\nabla}_X \tilde{h})\tilde{\nabla}_Y Z - (\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\tilde{h})Z \\
&= -((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\tilde{\varphi}Z) + (\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z) \\
&\quad + \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\xi \\
&\quad - ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\tilde{\nabla}_X \xi \\
&\quad + (\eta(\tilde{\nabla}_X Z) + \tilde{g}(Z,\tilde{\nabla}_X \xi))((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}Y - \tilde{\varphi}\tilde{h}Y) \\
&\quad + \eta(Z)((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}Y - \tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h}Y) \\
&\quad - \tilde{\mu}(\eta(\tilde{\nabla}_X Y) + \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X \xi))\tilde{\varphi}\tilde{h}Z - \tilde{\mu}\eta(Y)\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h}Z \\
&\quad + ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{\nabla}_X Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\nabla}_X Z))\xi \\
&\quad - \eta(\tilde{\nabla}_X Z)((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}Y - \tilde{\varphi}\tilde{h}Y) + \tilde{\mu}\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\nabla}_X Z \\
&\quad + ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,\tilde{\varphi}Z) + (\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(X,\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z) \\
&\quad + \tilde{g}(X,\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\xi \\
&\quad + ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\tilde{\nabla}_Y \xi \\
&\quad - (\eta(\tilde{\nabla}_Y Z) + \tilde{g}(Z,\tilde{\nabla}_Y \xi))((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}X - \tilde{\varphi}\tilde{h}X) \\
&\quad - \eta(Z)((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}X - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h}X) \\
&\quad + \tilde{\mu}(\eta(\tilde{\nabla}_Y X) + \tilde{g}(X,\tilde{\nabla}_Y \xi))\tilde{\varphi}\tilde{h}Z + \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h}Z \\
&\quad - ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{\nabla}_Y Z) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\nabla}_Y Z))\xi \\
&\quad + \eta(\tilde{\nabla}_Y Z)((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}X - \tilde{\varphi}\tilde{h}X) - \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\nabla}_Y Z \\
&\quad + ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}([X,Y],\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}([X,Y],\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\xi \\
&\quad - \eta(Z)((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}[X,Y] - \tilde{\varphi}\tilde{h}[X,Y]) \\
&\quad + \tilde{\mu}\eta([X,Y])\tilde{\varphi}\tilde{h}Z
\end{aligned}
$$

bulunur.

Bu son denklemde $\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}$ nin anti-simetrik oluşu ve $\tilde{h}$ ile $\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h}$ nın simetrik oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z - \tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z = & ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y - (\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi})X,Z) \\
& + \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X\tilde{h}\tilde{\varphi})Y - (\tilde{\nabla}_Y\tilde{h}\tilde{\varphi})X,Z))\xi \\
& - ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z) - \tilde{g}(Y,\tilde{h}\tilde{\varphi}Z))\tilde{\nabla}_X\xi \\
& + ((\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z) - \tilde{g}(X,\tilde{h}\tilde{\varphi}Z))\tilde{\nabla}_Y\xi \\
& + \tilde{g}(Z,\tilde{\nabla}_X\xi))((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}Y + \tilde{h}\tilde{\varphi}Y) \\
& - \tilde{g}(Z,\tilde{\nabla}_Y\xi))((\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}X + \tilde{h}\tilde{\varphi}X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\eta(Z)((\tilde{\nabla}_X\tilde{h}\tilde{\varphi})Y - (\tilde{\nabla}_Y\tilde{h}\tilde{\varphi})X + (\tilde{\kappa}+1)((\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y - (\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi})X)) \\
& - \tilde{\mu}(\eta(Y)(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}\tilde{h})Z - \eta(X)(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi}\tilde{h})Z + 2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)
\end{aligned}$$

(4.2.32)

eşitliği elde edilir.

$$(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}\tilde{h})Y = (\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})\tilde{h}Y + \tilde{\varphi}((\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y) \tag{4.2.33}$$

yazılabilir. $(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})\tilde{h}Y$ ifadesini hesaplamak için (4.1.4) denkleminde Y yerine $\tilde{h}Y$ yazılıp (4.1.2) denkleminden yararlanılırsa,

$$(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})\tilde{h}Y = -\tilde{g}(X,\tilde{h}Y)\xi + \tilde{g}(X,(\tilde{\kappa}+1)\tilde{\varphi}^2Y)\xi \tag{4.2.34}$$

elde edilir.

(4.2.31) denklemine $\tilde{\varphi}$ etki ettirilirse,

$$\tilde{\varphi}((\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y) = \eta(Y)((1+\tilde{\kappa})(X-\eta(X)\xi) - \tilde{h}X) - \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{h}Y \tag{4.2.35}$$

bulunur.

(4.2.34) ve (4.2.35) denklemleri (4.2.33) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y = -\tilde{g}(X,\tilde{h}Y)\xi + (\tilde{\kappa}+1)\tilde{g}(X,Y-\eta(Y)\xi)\xi \\ +\eta(Y)(-\tilde{h}X + (1+\tilde{\kappa})(X-\eta(X)\xi)) - \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{h}Y \tag{4.2.36}$$

elde edilir. (4.2.32) denkleminde (4.2.36) ve (4.1.4) kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılarak (4.2.29) denklemine ulaşılır. □

Teorem 4.2.6: $\tilde{\kappa} > -1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. Herhangi $X, X', X'' \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y,Y',Y'' \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için aşağıdaki denklemler sağlanır.

$$\tilde{R}(X,X')X'' = (2(\tilde{\lambda}-1)+\tilde{\mu})\left(\tilde{g}(X',X'')X - \tilde{g}(X,X'')X'\right), \tag{4.2.37}$$

$$\tilde{R}(X,X')Y = (\tilde{\kappa}+\tilde{\mu})\left(-\tilde{g}(\tilde{\varphi}X',Y)\tilde{\varphi}X + \tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)\tilde{\varphi}X'\right), \tag{4.2.38}$$

$$\tilde{R}(X,Y)X' = \tilde{\kappa}\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,X')\tilde{\varphi}X - \tilde{\mu}\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,X)\tilde{\varphi}X', \tag{4.2.39}$$

$$\tilde{R}(X,Y)Y' = -\tilde{\kappa}\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y')\tilde{\varphi}Y + \tilde{\mu}\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)\tilde{\varphi}Y', \tag{4.2.40}$$

$$\tilde{R}(Y,Y')X = (\tilde{\kappa}+\tilde{\mu})\left(-\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y',X)\tilde{\varphi}Y + \tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,X)\tilde{\varphi}Y'\right), \tag{4.2.41}$$

$$\tilde{R}(Y,Y')Y'' = (-2(\tilde{\lambda}+1)+\tilde{\mu})\left(\tilde{g}(Y',Y'')Y - \tilde{g}(Y,Y'')Y'\right). \tag{4.2.42}$$

(Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: İlk önce (4.2.38) ispatlansın. Yardımcı Teorem 4.1.2 deki gibi bir lokal ortogonal $\{e_i,\tilde{\varphi}e_i,\xi\}, i\in\{1,...,n\}$ $\tilde{\varphi}$-bazı seçilebilir. O halde,

$$\tilde{R}(X,X')Y = \tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\xi)\xi - \sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,e_i)e_i \\ + \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,e_i)e_i + \sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i \\ - \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i \tag{4.2.43}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.1.1) gereği $\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\xi) = -\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')\xi,Y) = 0$ dır. Ayrıca Teorem 4.2.1 gereği (4.2.43) denklemindeki $\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,e_i)$ li terimler sıfıra eşit olur. Diğer taraftan, $X \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ $ve Y,Z \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ise (4.2.29) denkleminden;

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z - \tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z &= -(\tilde{\lambda}\tilde{R}(X,Y)Z + \tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z)\\ &= -2\tilde{\lambda}(\tilde{\kappa}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z)\tilde{\varphi}Y - \tilde{\mu}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}Z)\end{aligned}$$

elde edilir. $X,W \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ *ve* $Y,Z \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için, bulunan bu son denklemin $W \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ile iç çarpımı yapılırsa,

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) = \tilde{\kappa}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,W) - \tilde{\mu}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Z,W) \tag{4.2.44}$$

bulunur. (4.2.43) denklemi ve Birinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,X')Y = &-\sum_{i=1}^{r}(\tilde{g}(\tilde{R}(Y,X)X',\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i + \tilde{g}(\tilde{R}(X',Y)X,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i)\\ &+ \sum_{i=r+1}^{n}(\tilde{g}(\tilde{R}(Y,X)X',\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i + \tilde{g}(\tilde{R}(X',Y)X,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i)\\ = &-\sum_{i=1}^{r}(\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}e_i,X')\tilde{\varphi}e_i - \tilde{g}(\tilde{R}(X',Y)\tilde{\varphi}e_i,X)\tilde{\varphi}e_i\\ &+ \sum_{i=r+1}^{n}(\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}e_i,X')\tilde{\varphi}e_i - \tilde{g}(\tilde{R}(X',Y)\tilde{\varphi}e_i,X)\tilde{\varphi}e_i\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.44) denklemi bu son denklemde kullanılırsa,

$$\widetilde{R}(X,X')Y=-\sum_{i=1}^{r}\begin{pmatrix}\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}^2e_i)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X')\widetilde{\varphi}e_i-\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}^2e_i,X')\widetilde{\varphi}e_i\\-\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}^2e_i)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X)\widetilde{\varphi}e_i+\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}^2e_i,X)\widetilde{\varphi}e_i\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=r+1}^{n}\begin{pmatrix}\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}^2e_i)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X')\widetilde{\varphi}e_i-\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}^2e_i,X')\widetilde{\varphi}e_i\\-\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}^2e_i)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X)\widetilde{\varphi}e_i+\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}^2e_i,X)\widetilde{\varphi}e_i\end{pmatrix}$$

$$=\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X')\widetilde{\varphi}X-\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}X'-\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X)\widetilde{\varphi}X'+\widetilde{\mu}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X')\widetilde{\varphi}X$$
$$=(\widetilde{\kappa}+\widetilde{\mu})(-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X',Y)\widetilde{\varphi}X+\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)\widetilde{\varphi}X').$$

bulunur. Böylece (4.2.38) denklemi ispatlanmış olunur. Şimdi de (4.2.40) ispatlansın.

$$\widetilde{R}(X,Y)Y'=\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',\xi)\xi-\sum_{i=1}^{r}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',e_i)e_i+\sum_{i=r+1}^{n}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',e_i)e_i$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',\widetilde{\varphi}e_i)\widetilde{\varphi}e_i-\sum_{i=r+1}^{n}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',\widetilde{\varphi}e_i)\widetilde{\varphi}e_i \qquad (4.2.45)$$

(4.2.38) in ispatında olduğu gibi $\forall i\in\{1,...,n\}$için
$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',\xi)=\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y',\widetilde{\varphi}e_i)=0$ dır.
Diğer taraftan, $X\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))\ ve Y,Z\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ ise (4.2.29) denkleminden;

$$\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{h}Z-\widetilde{h}\widetilde{R}(X,Y)Z=-(\widetilde{\lambda}\widetilde{R}(X,Y)Z+\widetilde{h}\widetilde{R}(X,Y)Z)$$
$$=-2\widetilde{\lambda}(\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Z)\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}Z)$$

elde edilir. $X,W\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y,Z\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ için, bulunan bu son denklemin $W\in\Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ile iç çarpımı yapılırsa

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W)=\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Z)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,W)-\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Z,W) \qquad (4.2.46)$$

denklemi elde edilir.

(4.2.45) denklemi ve Birinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa,

$$\widetilde{R}(X,Y)Y' = \sum_{i=1}^{r}(\widetilde{g}(\widetilde{R}(Y',X)Y,e_i)e_i + \widetilde{g}(\widetilde{R}(Y,Y')X,e_i)e_i)$$
$$-\sum_{i=r+1}^{n}(\widetilde{g}(\widetilde{R}(Y',X)Y,e_i)e_i + \widetilde{g}(\widetilde{R}(Y,Y')X,e_i)e_i)$$

bulunur. Ayrıca (4.2.46) denklemi elde edilen bu son denklemde kullanılırsa

$$\widetilde{R}(X,Y)Y' = \begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}(-\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y',e_i) + \widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,e_i))e_i \\ &+\sum_{i=r+1}^{n}(\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y',e_i) - \widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,e_i))e_i \\ &+\sum_{i=1}^{r}(\widetilde{\kappa}+\widetilde{\mu})(\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}e_i,Y') - \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}e_i,Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y'))e_i \\ &-\sum_{i=r+1}^{n}(\widetilde{\kappa}+\widetilde{\mu})(\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}e_i,Y') - \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}e_i,Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y'))e_i\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Y' &= \widetilde{\kappa}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}Y' - \widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')\widetilde{\varphi}Y + (\widetilde{\kappa}+\widetilde{\mu})(\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)\widetilde{\varphi}Y' - \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y')\widetilde{\varphi}Y) \\ &= -\widetilde{\kappa}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y')\widetilde{\varphi}Y + \widetilde{\mu}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)\widetilde{\varphi}Y'.\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.40) ın ispatı tamamlanır. Son olarak (4.2.37) nin ispatı yapılsın. Bunun için (4.1.33) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,X')\widetilde{\varphi}X'' - \widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,X')X'' &= \widetilde{g}(X'-\widetilde{h}X',X'')(\widetilde{\varphi}X - \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X) \\ &\quad - \widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,X'')(\widetilde{\varphi}X' - \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X')\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

(4.2.47) denklemine $\widetilde{\varphi}$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\widetilde{R}(X,X')\widetilde{\varphi}X'' - \widetilde{R}(X,X')X'' &= \widetilde{g}(X'-\widetilde{h}X',X'')(X-\widetilde{h}X) - \widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,X'')(X'-\widetilde{h}X') \\ &= (1-\widetilde{\lambda})^2\widetilde{g}(X',X'')X - (1-\widetilde{\lambda})^2\widetilde{g}(X,X'')X'.\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.38) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,X')X'' &= \tilde{\varphi}\tilde{R}(X,X')\tilde{\varphi}X'' - (1-\tilde{\lambda})^2\tilde{g}(X',X'')X + (1-\tilde{\lambda})^2\tilde{g}(X,X'')X' \\
&= (\tilde{\kappa}+\tilde{\mu})(\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}X'')X' - \tilde{g}(\tilde{\varphi}X',\tilde{\varphi}X'')X) \\
&\quad + (1-\tilde{\lambda})^2(\tilde{g}(X,X'')X' - \tilde{g}(X',X'')X) \\
&= (2(\tilde{\lambda}-1)+\tilde{\mu})(\tilde{g}(X',X'')X - \tilde{g}(X,X'')X').
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (4.2.37) nin ispatı tamamlanmış olunur. Diğer durumların ispatları da benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 4.2.6 yı kullanarak aşağıdaki sonuçlar ispatlanabilir.

Sonuç 4.2.2: $\tilde{\kappa} > -1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ nin formülü M deki her X,Y,Z,W vektör alanı için aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= \left(-1+\frac{\tilde{\mu}}{2}\right)(\tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,W) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,W)) \\
&\quad + \tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(\tilde{h}X,W) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(\tilde{h}Y,W) \\
&\quad - \tilde{g}(Y,W)\tilde{g}(\tilde{h}X,Z) + \tilde{g}(X,W)\tilde{g}(\tilde{h}Y,Z) \\
&\quad + \frac{-1+\frac{\tilde{\mu}}{2}}{\tilde{\kappa}+1}\left(\tilde{g}(\tilde{h}Y,Z)\tilde{g}(\tilde{h}X,W) - \tilde{g}(\tilde{h}X,Z)\tilde{g}(\tilde{h}Y,W)\right) \\
&\quad - \frac{\tilde{\mu}}{2}\left(\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,Z)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,W) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Z)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,W)\right) \\
&\quad + \frac{-\tilde{\kappa}-\frac{\tilde{\mu}}{2}}{\tilde{\kappa}+1}\left(\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}Y,Z)\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X,W) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}Y,W)\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X,Z)\right) \\
&\quad + \tilde{\mu}\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)\tilde{g}(\tilde{\varphi}Z,W) \\
&\quad + \eta(X)\eta(W)\left(\left(\tilde{\kappa}+1-\frac{\tilde{\mu}}{2}\right)\tilde{g}(Y,Z) + (\tilde{\mu}-1)\tilde{g}(\tilde{h}Y,Z)\right) \\
&\quad - \eta(X)\eta(Z)\left(\left(\tilde{\kappa}+1-\frac{\tilde{\mu}}{2}\right)\tilde{g}(Y,W) + (\tilde{\mu}-1)\tilde{g}(\tilde{h}Y,W)\right) \\
&\quad + \eta(Y)\eta(Z)\left(\left(\tilde{\kappa}+1-\frac{\tilde{\mu}}{2}\right)\tilde{g}(X,W) + (\tilde{\mu}-1)\tilde{g}(\tilde{h}X,W)\right) \\
&\quad - \eta(Y)\eta(W)\left(\left(\tilde{\kappa}+1-\frac{\tilde{\mu}}{2}\right)\tilde{g}(X,Z) + (\tilde{\mu}-1)\tilde{g}(\tilde{h}X,Z)\right)
\end{aligned}
\tag{4.2.48}
$$

(Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: M deki bir keyfi X vektör alanı $X_{\tilde{\lambda}} \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $X_{-\tilde{\lambda}} \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ olmak üzere $X = X_{\tilde{\lambda}} + X_{-\tilde{\lambda}} + \eta(X)\xi$ olacak şekilde ayrılabilir. Daha sonra $\tilde{R}(X,Y)Z$, $\tilde{R}(X_{\pm\tilde{\lambda}}, Y_{\pm\tilde{\lambda}})Z_{\pm\tilde{\lambda}}$, $\tilde{R}(X,Y)\xi$, $\tilde{R}(X,\xi)Z$ formundaki terimlerin toplamı olarak yazılır. Teorem 4.2.6 ve $X_{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(X - \eta(X)\xi + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{h}X \right), X_{-\tilde{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(X - \eta(X)\xi - \frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{h}X \right)$ oluşu kullanılarak, uzun bir hesap yapıldıktan sonra, (4.2.48) elde edilir. □

Sonuç 4.2.3: $\tilde{\kappa} > -1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. Herhangi $Z \in \Gamma(D)$ için ξ-kesitsel eğrilik $\tilde{K}(Z,\xi)$

$$\tilde{K}(Z,\xi) = \tilde{\kappa} + \tilde{\mu}\frac{\tilde{g}(\tilde{h}Z,Z)}{\tilde{g}(Z,Z)} = \begin{cases} \tilde{\kappa} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}, & Z \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda})), \\ \tilde{\kappa} - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}, & Z \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})). \end{cases}$$

ile verilir. Ayrıca, $X, X' \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y, Y' \in \Gamma(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için ξ ya normal olan düzlem kesitlerinin kesitsel eğriliği

$$\tilde{K}(X,X') = 2(\tilde{\lambda}-1) + \tilde{\mu},\ \tilde{K}(Y,Y') = -2(\tilde{\lambda}+1) + \tilde{\mu},\quad \tilde{K}(X,Y) = (\tilde{\kappa}-\tilde{\mu})\frac{\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)^2}{\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(Y,Y)}$$

ile verilir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Sonuç 4.2.4: $\tilde{\kappa} > -1$ için herhangi $(2n+1)$-boyutlu $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldu için Ricci operatör $\tilde{Q}$

$$\tilde{Q} = (2(1-n) + n\tilde{\mu})I + (2(n-1) + \tilde{\mu})\tilde{h} + (2(n-1) + n(2\tilde{\kappa} - \tilde{\mu}))\eta \otimes \xi. \tag{4.2.49}$$

ile verilir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Özellikle, $(M,\tilde{g})$ manifoldu η-Einstein dır ancak ve ancak $\tilde{\mu} = 2(1-n)$, Einstein dır ancak ve ancak $\tilde{\kappa} = \tilde{\mu} = 0$ ve $n = 1$ (Bu durumda manifold Ricci-flat tır).

Özellikle, 3 boyutta $\tilde{\kappa} > -1$ için herhangi paradeğme $(\tilde{\kappa},0)$-manifoldu η-Einstein dır. 3 boyuttan büyük iken $\tilde{\kappa} > -1$ için Einstein paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldu mevcut değildir.

4.3. $\tilde{\kappa} < -1$ için Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-Manifoldlar

Bu bölüm, $\tilde{\kappa} < -1$ ile verilen paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlara ayrılmıştır. Bu durumda, Sonuç 4.1.3 de belirtildiği gibi $0,\pm\tilde{\lambda}$ öz değerleri ile verilen $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ köşegenleştirilebilir dir. Burada $\tilde{\lambda} = \sqrt{-1-\tilde{\kappa}}$ dır. $\tilde{\kappa} > -1$ durumundaki gibi, $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ nın karakteristik uzayları tarafından tanımlanan dağılımların karşılıklı olarak dik Legendrian foliasyonlar tanımladığı ispatlanacaktır. $\tilde{\kappa} > -1$ durumundan temel farkı (daha genel olarak değme metrik (κ,μ)-uzaylardan) karakteristik dağılımların total geodezik Legendrian foliasyon tanımlamak yerine total umbilik Legendrian foliasyon tanımlamalarıdır.

Teorem 4.3.1: $\tilde{\kappa} < -1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ bir paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ operatörünün $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})\, ve\ (D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ karakteristik dağılımları integrallenebilirler ve M nin total umbilik liflere sahip olan iki dik Legendrian foliasyonunu tanımlarlar. Ayrıca herhangi $X,Y \in D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda})$ için $\tilde{\nabla}_X Y \in D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\pm\tilde{\lambda}) \oplus \mathbb{R}\xi$ (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: Herhangi paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldu için (4.1.5) denklemi

$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X = \tilde{\varphi}((\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})X)$ eşitliğinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X &= \tilde{\varphi}((\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})X) \\ &= \tilde{\varphi}\begin{pmatrix} -(1+\tilde{\kappa})(2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\xi + \eta(X)\tilde{\varphi}Y - \eta(Y)\tilde{\varphi}X) \\ +(1-\tilde{\mu})(\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X = -(1+\tilde{\kappa})(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + (1-\tilde{\mu})(\eta(X)\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{h}X) \quad (4.3.1)$$

elde edilir. (4.3.1) denkleminde Y yerine $\tilde{\varphi}Y$ yazılırsa

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})\widetilde{\varphi}Y-(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}Y}\widetilde{\varphi}\widetilde{h})X=-(1+\widetilde{\kappa})(\eta(X)\widetilde{\varphi}Y)+(1-\widetilde{\mu})(\eta(X)\widetilde{h}\,\widetilde{\varphi}Y)$$

bulunur. $X,Y,Z\in\Gamma(D)$ için bulunan son denklem Z ile iç çarpılırsa,

$\widetilde{g}((\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})\widetilde{\varphi}Y-(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}Y}\widetilde{\varphi}\widetilde{h})X,Z)=0$ elde edilir. Açık olarak

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h}\,\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}Y-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}Y}\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}Y}X,Z)=0 \tag{4.3.2}$$

bulunur. $X,Y,Z\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ olduğu kabul edilsin. (4.3.2) denkleminden

$$0=-\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}Y,Z)-\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}Y,Z)-\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}Y}X,Z)+\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}Y}X,Z)=-2\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}Y,Z)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Z,\xi)=X(\widetilde{g}(Z,\xi))-\widetilde{g}(Z,\widetilde{\nabla}_X\xi)=\widetilde{g}(Z,\widetilde{\varphi}X)-\widetilde{g}(Z,\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)=-\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(Z,X)\neq 0$$

olduğundan $\widetilde{\nabla}_X Z\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(+\widetilde{\lambda})\oplus\mathbb{R}\xi)$ dır. Özellikle tüm $X,Y\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{g}([X,Y],\xi)&=\widetilde{g}(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi)-\widetilde{g}(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi)\\&=-\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)+\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)+\widetilde{g}(Y,\widetilde{\varphi}X)-\widetilde{g}(Y,\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)\\&=\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X,Y)-\lambda\widetilde{g}(Y,X)\\&=0\end{aligned}$$

olduğundan, $D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}),M$ de bir foliasyon tanımlar ve (Önerme 3.2, Cappelletti Montano 2010) gereğince $\text{boy}(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))=n$ dir. Böylece $D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}),$ değme dağılımın n-boyutlu integrallenebilir alt demeti olduğundan, M nin bir Legendrian foliasyonudur. Benzer tartışmalar $D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})$ için de geçerlidir. Yani $\forall X,Z\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ için $\widetilde{\nabla}_X Z\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})\oplus\mathbb{R}\xi)$. İspatı tamamlamak için, $X\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ olduğu kabul edilsin. Herhangi $Z\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ için $\widetilde{\nabla}_X Z\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda})\oplus\mathbb{R}\xi)$ olduğu gözönüne alınırsa $\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,Z)=X(\widetilde{g}(Y,Z))-\widetilde{g}(Y,\widetilde{\nabla}_X Z)=0$ olur. Böylece

$\widetilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi h}}(-\widetilde{\lambda}) \oplus \mathbb{R}\xi)$ olduğu görülür. Benzer yol ile $\widetilde{\nabla}_Y X \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi h}}(\widetilde{\lambda}) \oplus \mathbb{R}\xi)$ oluşu ispatlanabilir. Son olarak, $D_{\widetilde{\varphi h}}(\widetilde{\lambda})$ ve $D_{\widetilde{\varphi h}}(-\widetilde{\lambda})$ liflerin total umbilik olduğu gösterilsin. Herhangi $X, X' \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi h}}(\widetilde{\lambda}))$ için $\widetilde{\nabla}_X X' \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi h}}(\widetilde{\lambda}) \oplus \mathbb{R}\xi)$ olduğundan $B(X, X')$, $\mathbb{R}\xi$ nın bir kesitidir. Burada B ikinci temel formu belirtmektedir. Gerçekten $B(X, X') = -\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X, X')\xi$ olduğu (3.4.5) denklemi kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(B(X, X'), \xi) &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X X', \xi) = -\widetilde{g}(X', \widetilde{\nabla}_X \xi) = -\widetilde{g}(X', -\widetilde{\varphi}X + \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X) \\
&= \widetilde{g}(X', \widetilde{\varphi}X) - \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X', X) \\
&= -\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X', X)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Ortalama eğrilik vektör alanı $H = -\widetilde{\lambda}\xi$ ile verilir. Böylece $B(X, X') = H\widetilde{g}(X, X')$ elde edilir. Diğer foliasyonun ispatı benzerdir. □

Uyarı 4.3.1: $D_{\widetilde{\varphi h}}(\widetilde{\lambda})$ ve $D_{\widetilde{\varphi h}}(-\widetilde{\lambda})$ foliasyonlarının total geodezik olmadığına dikkat edilsin.Gerçektende, $\forall X, Y \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi h}}(\pm\widetilde{\lambda}))$ için

$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi) = X(\widetilde{g}(Y, \xi)) - \widetilde{g}(Y, \widetilde{\nabla}_X \xi) = \widetilde{g}(Y, \widetilde{\varphi}X) - \widetilde{g}(Y, \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X) = -\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(Y, X)$ ifadesi sıfırdan farklıdır. $D_{\widetilde{\varphi h}}(\widetilde{\lambda})$ ve $D_{\widetilde{\varphi h}}(-\widetilde{\lambda})$ Legendrian foliasyonlarının Pang invaryantlarının ifadeleri bulunsun. Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 4.2.2 nin ispatına benzer olduğundan yapılmayacaktır.

Teorem 4.3.2: $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})$ ve $D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})$ Legendrian foliasyonlarının Pang invaryantları

$$\Pi_{D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})} = (\tilde{\mu}-2)\tilde{g}\big|_{D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})\times D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda})} \tag{4.3.3}$$

$$\Pi_{D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})} = (\tilde{\mu}-2)\tilde{g}\big|_{D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})\times D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda})} \tag{4.3.4}$$

ile verilir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Önerme 4.3.1: $\tilde{\kappa} < -1$ için herhangi paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$ -manifold

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y = ((1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,Y) - \tilde{g}(\tilde{h}X,Y))\xi + \eta(Y)\tilde{h}(\tilde{h}X - X) - \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{h}Y \tag{4.3.5}$$

eşitliğini sağlar (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: Yardımcı Teorem 4.1.2 de verildiği gibi $\{X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n,\xi\}$ $\tilde{\varphi}$ -bazı olsun. Herhangi $X,Y \in \Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ için, Teorem 4.3.1 kullanılarak,

$$\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\varphi}\tilde{h}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, X_i)X_i - \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, X_i)X_i + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi \\ -\sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\tilde{\varphi}X_i)\tilde{\varphi}X_i + \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\tilde{\varphi}X_i)\tilde{\varphi}X_i \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{\varphi}\tilde{h}\left(\sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, X_i)X_i - \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, X_i)X_i + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi\right)$$

$$= \tilde{\lambda}\sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, X_i)X_i - \tilde{\lambda}\sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, X_i)X_i$$

$$= \tilde{\lambda}(\tilde{\nabla}_X Y) - \tilde{\lambda}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi$$

$$= \tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h}Y - \tilde{\lambda}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi$$

elde edilir.

Bu son denklemden,

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y = \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi)\xi = -\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(Y,\widetilde{\nabla}_X \xi)\xi = -\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(Y,-\widetilde{\varphi}X + \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X)\xi$$
$$= -\widetilde{\lambda}^2\widetilde{g}(X,Y)\xi \tag{4.3.6}$$

bulunur. Şimdi $X \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ olduğu kabul edilsin. Bir önceki durumdaki tartışmaya benzer olarak,

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y = (\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\varphi}\widetilde{h})X = \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\xi \tag{4.3.7}$$

bulunur.

Son olarak, herhangi $X,Y \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ için,

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y = -\widetilde{\lambda}^2\widetilde{g}(X,Y)\xi \tag{4.3.8}$$

elde edilir.

Daha sonra (4.3.5) eşitliği (4.1.6), (4.3.6)-(4.3.8) eşitliklerinden faydalanılarak bulunur. □

Sonuç 4.3.1: $\widetilde{\kappa} \neq -1$ için herhangi paradeğme $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$-manifold

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{h})Y = -((1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y) + \widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y))\xi + \eta(Y)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}(\widetilde{h}X - X) - \widetilde{\mu}\eta(X)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y \tag{4.3.9}$$

eşitliğini sağlar (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: Eğer $\widetilde{\kappa} > -1$ise (4.3.9) denklemi ile (4.2.6) denklemi aynıdır ve ispatı açıktır.

Eğer $\widetilde{\kappa} < -1$ ise

$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{h})Y = (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi})\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y + \widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y$ eşitliğinin geçerli olduğu açıktır. (4.1.4) denkleminde Y yerine $\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y$ yazılarak

$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y = -\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)\xi-(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\xi$ denklemi elde edilir. (4.3.5) denklemine $\widetilde{\varphi}$ etki ettirerek

$\widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y = \eta(Y)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}(\widetilde{h}X - X) - \widetilde{\mu}\eta(X)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y$ denklemi elde edilir. Bulunan bu son iki denklem $(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{h})Y = (\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y + \widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa (4.3.9) denklemi elde edilmiş olunur. □

$D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda})$ Legendrian foliasyonları total geodezik olmasalar ve $\widetilde{\kappa} > -1$ durumu ile karşılaştırıldıklarında bir çok özellik farklı olsa bile, bu durumda, değme Riemann yapıları ile ilginç bir ilişki bir sonraki teorem ile verilecektir.

Teorem 4.3.3: $\widetilde{\kappa} < -1$ için herhangi pozitif ya da negatif tanımlı paradeğme metrik $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$ -manifoldlar

$$\phi := \pm\frac{1}{\sqrt{-1-\widetilde{k}}}\widetilde{h}, \quad g := -d\eta(\cdot,\phi\cdot)+\eta\otimes\eta \tag{4.3.10}$$

ile tanımlanan bir (ϕ,ξ,η,g) kanonikal değme Riemann yapıya sahiptir. Burada $\pm$ işareti, paradeğme $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$ -manifoldunun pozitif ya da negatif tanımlı olmasına bağlıdır.

Ayrıca (ϕ,ξ,η,g) yapısı

$$\kappa = \widetilde{\kappa} + 2 - (1-\frac{\widetilde{\mu}}{2})^2, \quad \mu = 2$$

ile verilen değme metrik (κ,μ) -yapıya sahiptir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: (4.3.10) eşitliği ile (1,1) tipinde ϕ tensör alanı ve (0,2) tipinde g tensörü tanımlanmaktadır. İlk önce (4.1.2) eşitliği kullanılarak $\phi^2 = \frac{1}{-1-\widetilde{\kappa}}\widetilde{h}\widetilde{h} = -\frac{1}{1+\widetilde{\kappa}}(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}^2 = -\widetilde{\varphi}^2 = -I+\eta\otimes\xi$ elde edilir. Daha sonra g nin bir

Riemann metrik olduğu ispat edilecektir. $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ operatörünün $\tilde{g}$ ye göre simetrik oluşu kullanılırsa, herhangi $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= -d\eta(X,\phi Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= -d\eta(X, \pm\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{h}Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}} d\eta(X,\tilde{h}Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}} \tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= g(Y,X). \end{aligned}$$

O halde g simetriktir. g nin pozitif tanımlı olduğunu ispatlamak için, $\{X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n,\xi\}$ $\tilde{\varphi}$-bazı Yardımcı Teorem 4.1.2 deki gibi alınsın.

$$\begin{aligned} g(\xi,\xi) = 1,\ g(X_i,X_i) &= \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{g}(X_i,\tilde{\varphi}\tilde{h}X_i) = \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\lambda}\tilde{g}(X_i,X_i) \\ &= \mp\tilde{g}(X_i,X_i) = (\mp 1)(\mp 1) = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(Y_i,Y_i) &= \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{g}(Y_i,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y_i) = \mp\frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{g}(Y_i,-\tilde{\lambda}Y_i) \\ &= \pm\tilde{g}(Y_i,Y_i) = (\pm 1)(\pm 1) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ ve $g(X,\phi Y) = d\eta(X,Y)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece (ϕ,ξ,η,g) bir değme Riemann yapıdır.

Teoremin ikinci kısmı olan (ϕ,ξ,η,g) yapısının (κ,μ)-sıfırlık durumunu sağladığını göstermek için

$h=\frac{1}{2}L_{\xi}\phi=\pm\frac{1}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}L_{\xi}\tilde{h}$ operatörü hesaplansın. Tüm $X\in\Gamma(TM)$ için (4.1.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(L_{\xi}\tilde{h})X &= [\xi,\tilde{h}X]-\tilde{h}[\xi,X]\\ &= \tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h}X-\tilde{\nabla}_{\tilde{h}X}\xi-\tilde{h}\tilde{\nabla}_{\xi}X+\tilde{h}\tilde{\nabla}_{X}\xi\\ &= (2-\tilde{\mu})\tilde{\varphi}\tilde{h}X-2(1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}X\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}h &= \pm\left(\frac{1}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}(L_{\xi}\tilde{h})\right)=\pm\left(\frac{1}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}(2-\tilde{\mu})\tilde{\varphi}h-2(1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}\right)\\ &= \pm\left(\frac{1-\frac{\tilde{\mu}}{2}}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}h+\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}\,\tilde{\varphi}\right)\end{aligned}$$

bulunur. h nın köşegenleşebildiği ispat edilsin. $\{X_i,Y_i,\xi\}$, $\tilde{\varphi}$ -bazına göre h nın matris gösterimi

$$\pm\begin{pmatrix} 1-\frac{\tilde{\mu}}{2} & \cdots & 0 & \sqrt{-1-\tilde{\kappa}} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1-\frac{\tilde{\mu}}{2} & 0 & \cdots & \sqrt{-1-\tilde{\kappa}} & 0\\ \sqrt{-1-\tilde{\kappa}} & \cdots & 0 & -1+\frac{\tilde{\mu}}{2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{-1-\tilde{\kappa}} & 0 & \cdots & -1+\frac{\tilde{\mu}}{2} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Böylece karakteristik polinom

$P(\lambda)=\mp\lambda(\lambda^2-(1-\frac{\tilde{\mu}}{2})^2+\tilde{\kappa}+1)^n$ ile verilir ve h, 0 ve $\pm\sqrt{(1-\frac{\tilde{\mu}}{2})^2-\tilde{\kappa}-1}$ özdeğerleri ile verilir. Uzun bir hesap yapıldıktan sonra, $D_h(0)=\mathbb{R}\xi$ ve

$D_h(\lambda) = span\{X_1 + \alpha Y_1,..., X_n + \alpha Y_n\},\ D_h(-\lambda) = span\{X_1 - \beta Y_1,..., X_n - \beta Y_n\}$

$\alpha := \frac{1}{\tilde{\lambda}}\sqrt{(1-\frac{\tilde{\mu}}{2})^2 - \tilde{\kappa} - 1} - \frac{1}{\tilde{\lambda}}(1-\frac{\tilde{\mu}}{2})$ ve $\beta := \frac{1}{\tilde{\lambda}}\sqrt{(1-\frac{\tilde{\mu}}{2})^2 - \tilde{\kappa} - 1} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}(1-\frac{\tilde{\mu}}{2})$ ile verildiği görülebilir. Böylece, h diagonelleşebilirdir.

$D_h(\lambda)$ ve $D_h(-\lambda)$ nın Legendrian foliasyonları oldukları ispat edilsin. Teorem 4.3.1 dikkate alınarak, bazı f_{ij}^k, g_{ij}^k fonksiyonları için

$$\tilde{\nabla}_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k X_k + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X_i} X_j, \xi)\xi,\ \tilde{\nabla}_{Y_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} g_{ij}^k X_k + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Y_i} X_j, \xi)\xi$$

$$\tilde{\nabla}_{X_i} Y_j = \tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{\varphi} X_j = \tilde{\varphi}\tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \tilde{g}(X_i - \tilde{h} X_i, X_j)\xi = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k Y_k - \delta_{ij}\xi$$

$$\tilde{\nabla}_{Y_i} Y_j = \sum_{k=1}^{n} g_{ij}^k Y_k - \tilde{\lambda}\delta_{ij}\xi$$

eşitlikleri hesaplanır. $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X_i} X_j, \xi) = -\tilde{g}(X_j, \tilde{\nabla}_{X_i}\xi) = -\tilde{g}(X_j, -\tilde{\varphi} X_i + \tilde{\varphi}\tilde{h} X_i) = -\tilde{\lambda}\delta_{ij}$ yazılabilir. Uzun bir hesap yapıldıktan sonra

$\tilde{\nabla}_{X_I + \alpha Y_I}(X_j + \alpha Y_j) = \sum_{k=1}^{n}((f_{ij}^k + \alpha g_{ij}^k)(X_k + \alpha Y_k)) - \tilde{\lambda}(1+\alpha^2)\delta_{ij}\xi)$ elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}\left[X_i + \alpha Y_i, X_j + \alpha Y_j\right] &= \tilde{\nabla}_{X_i + \alpha Y_i}(X_j + \alpha Y_j) - \tilde{\nabla}_{X_j + \alpha Y_j}(X_i + \alpha Y_i)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(f_{ij}^k - f_{ji}^k + \alpha(g_{ij}^k - g_{ji}^k))(X_k + \alpha Y_k)\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $D_h(\lambda)$ involutivedir. Benzer yol ile $D_h(-\lambda)$ nın da integrallenebilir olduğu gösterilebilir. Ayrıca, herhangi $X \in \Gamma(D_h(\pm\lambda))$ için $\eta(X) = \pm\frac{1}{\lambda}\eta(hX) = 0$ değme dağılımın n-boyutlu integrallenebilir alt demetleri olduklarından $D_h(\lambda)$ ve $D_h(-\lambda)$ Legendrian foliasyonlardır.

(M, ϕ, ξ, η, g) nin bir değme metrik (κ, μ)-uzay olduğunu ispatlamak yerine, $(D_h(\lambda),\ D_h(-\lambda))$ bi-Legendrian yapısının Teorem 3.7.2 nin hipotezlerini sağladığı gösterilecektir. İlk önce, $\phi h = -h\phi$ özelliğinden dolayı $D_h(\lambda)$ ve $D_h(-\lambda)$ eşlenik Legendrian foliasyonlardır. Yani $\phi D_h(\pm\lambda) = D_h(\mp\lambda)$.

$(D_h(\lambda), D_h(-\lambda))$ ile ilişkili olan ∇^{bl} bi-Legendrian konneksiyonu göz önüne alınsın. Bi-Legendrian konneksiyonu tanımından, ∇^{bl}, Teorem 3.7.2 nin (i) ve (iii) hipotezlerini sağlar.

Ayrıca, $\nabla^{bl}\eta = \nabla^{bl} d\eta = 0$ dır ve ∇^{bl}, $D_h(\pm\lambda)$ yı koruduğundan $\nabla^{bl} h = 0$ dır. O halde geriye ∇^{bl} nin ϕ tensör alanını koruduğu ve bir metrik konneksiyon olduğunu göstermek kalıyor.

Yardımcı Teorem 3.7.1 nedeniyle, $\tilde{\nabla}^{bl}\phi = 0$ ve $\tilde{\nabla}^{bl} g = 0$ olduğunu göstermek yerine $D_h(\pm\lambda)$ nın g ye göre total geodezik foliasyonlar olduğunu göstermek yeterlidir.

∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olsun ve $X, X' \in \Gamma(D_h(\lambda)),\ Y \in \Gamma(D_h(-\lambda))$ olsun.

$g := \mp \frac{1}{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\cdot, \tilde{\varphi}\tilde{h}\cdot) + \eta \otimes \eta$ olduğundan uzun bir hesap yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} g(\nabla_X X', Y) &= -\frac{2\lambda}{2-\tilde{\mu}} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X', Y) - \frac{3\tilde{\lambda}}{2-\tilde{\mu}} d^2\eta(X, X', Y) \\ &\quad - \frac{1}{2\tilde{\lambda}} (X(d\eta(X', \tilde{h}Y)) + X'(d\eta(X, \tilde{h}Y)) + d\eta([X, X'], \tilde{h}Y)). \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1 gereği (4.3.12) denklemi $\tilde{g}(\nabla_X X', Y) = 0$ halini alır. Ayrıca $g(\nabla_X X', \xi) = -g(X', \nabla_X \xi) = -g(X', -\phi X - \phi h X) = (1+\lambda) g(X', \phi X) = 0$. Böylece $D_h(\lambda)$ total geodeziktir ve benzer method ile $D_h(-\lambda)$ nın da total geodezikliği gösterilebilir.

∇^{bl} bi-Legendrian konneksiyonu g ve ϕ yi korur. Böylece Teorem 3.7.2 nin tüm kabulleri sağlanmış oldu ve (ϕ,ξ,η,g) bir değme metrik (κ,μ)-yapıdır denilebilir. κ ve μ sabitlerinin ifadeleri bulunsun.

$\kappa = 1-\lambda^2 = \tilde{\kappa} + 2 - (1-\frac{\tilde{\mu}}{2})^2$ olacak şekilde bulunur. μ yü bulmak için, tüm $X \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{\xi} h)X = \mu h\phi X = \mu\left((\frac{\tilde{\mu}}{2}-1)\tilde{\varphi}X + \tilde{\varphi}\tilde{h}X \right) \tag{4.3.13}$$

bulunur. Diğer yandan $\nabla_X \xi = -\phi X - \phi hX$ ve $h^2 = (k-1)\phi^2$ ilişkisi kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{\xi} h)X &= \nabla_{hX}\xi + [\xi, hX] - h\nabla_X \xi - h[\xi, X]\\ &= -2\phi hX - 2\phi h^2 X + (L_{\xi}h)X \\ &= -2\phi hX - 2(1-\kappa)\phi X + (L_{\xi}h)X\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

hesaplanır. Fakat (4.3.11) den

$$\begin{aligned}(L_{\xi}h)X &= \pm\left(\frac{2-\tilde{\mu}}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}(L_{\xi}\tilde{\varphi})\tilde{h}X + \frac{2-\tilde{\mu}}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}(L_{\xi}\tilde{h})X + \tilde{\lambda}(L_{\xi}\tilde{\varphi})X \right)\\ &= \pm\left(\frac{2-\tilde{\mu}}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{h}^2 X + \frac{(2-\tilde{\mu})^2}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}^2\tilde{h}X + \sqrt{-1-\tilde{\kappa}}(2-\tilde{\mu})\tilde{\varphi}^2 X + 2\tilde{\lambda}\tilde{h}X \right)\\ &= \pm\left(\frac{(2-\tilde{\mu})^2}{2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}} + 2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}} \right)\tilde{h}X\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

(4.3.14) ve (4.3.15) denklemlerinden,

$$(\nabla_{\xi} h)X = -2\phi hX - 2(1-\kappa)\phi X \pm \left(\frac{(2-\tilde{\mu})^2}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}} + 2\sqrt{-1-\tilde{\kappa}} \right)\tilde{h}X \tag{4.3.16}$$

bulunur. Burada $\pm$ işareti $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldunun pozitif veya negatif tanımlılığına bağlıdır.

(4.3.13) eşitliği ile (4.3.16) eşitliği karşılaştırıldığında hem pozitif hem negatif tanımlı olma durumunda $\mu = 2$ elde edilir. □

Uyarı 4.3.2: $\tilde{\kappa} < -1$ olduğundan, bu durumda Uyarı 4.2.1 deki gibi bir yapı kurulamıyor.

Şimdi $\tilde{\kappa} < -1$ için paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifoldların eğrilik özellikleri verilecektir. $\tilde{\kappa} > -1$ için hesaplanan (4.2.29) eşitliği $\tilde{\kappa} < -1$ için de aynıdır. Çünkü ispatta $\tilde{h}$ nın kovaryant türevinin ifadesi gerekmektedir ve bu ifadede $\tilde{\kappa} > -1$ ve $\tilde{\kappa} < -1$ durumları için (4.2.6) ve (4.3.9) eşitliklerinden de görülebileceği gibi aynıdır. (4.1.32) eşitliği (4.3.9) eşitliği ile birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}Z - \tilde{\varphi}\tilde{R}(X,Y)Z &= \tilde{g}\begin{pmatrix} -((1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y))\xi \\ +\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}(\tilde{h}X - X) - \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y \\ +((1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}X) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}X))\xi \\ -\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}(\tilde{h}Y - Y) + \tilde{\mu}\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X, Z \end{pmatrix}\xi \\
&\quad -\eta(Z)\begin{pmatrix} -((1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y))\xi \\ +\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}(\tilde{h}X - X) - \tilde{\mu}\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y \\ +((1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}X) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}X))\xi \\ -\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}(\tilde{h}Y - Y) + \tilde{\mu}\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X \end{pmatrix} \\
&\quad +\tilde{g}(Y - \tilde{h}Y, Z)\tilde{\varphi}(X - \tilde{h}X) - \tilde{g}(X - \tilde{h}X, Z)\tilde{\varphi}(Y - \tilde{h}Y) \\
&\quad -\tilde{g}(\tilde{\varphi}(X - \tilde{h}X), Z)(Y - \tilde{h}Y) + \tilde{g}(\tilde{\varphi}(Y - \tilde{h}Y), Z)(X - \tilde{h}X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}Z - \tilde{\varphi}\tilde{R}(X,Y)Z &= \begin{pmatrix} \eta(Y)\tilde{g}((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}X + (\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}X, Z) \\ -\eta(X)\tilde{g}((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}Y + (\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y, Z) \end{pmatrix}\xi \\
&\quad -\eta(Y)\eta(Z)((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}X + (\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}X) \\
&\quad +\eta(X)\eta(Z)((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}Y + (\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y) \\
&\quad +\tilde{g}(Y - \tilde{h}Y, Z)\tilde{\varphi}(X - \tilde{h}X) - \tilde{g}(X - \tilde{h}X, Z)\tilde{\varphi}(Y - \tilde{h}Y) \\
&\quad -\tilde{g}(\tilde{\varphi}(X - \tilde{h}X), Z)(Y - \tilde{h}Y) + \tilde{g}(\tilde{\varphi}(Y - \tilde{h}Y), Z)(X - \tilde{h}X)
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

elde edilir.

(4.2.29) ve (4.3.17) eşitliklerinde (4.1.2) yi ve $\tilde{h}$ operatörünün özelliklerini kullanarak

$$\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z-\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z=\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z-\tilde{\varphi}\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z+\tilde{\varphi}(\tilde{R}(X,Y)\tilde{h}Z-\tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z)$$

$$\begin{aligned}
&=\begin{pmatrix}\eta(Y)\tilde{g}((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}X+(\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}X,\tilde{h}Z)\\ -\eta(X)\tilde{g}((1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}Y+(\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y,\tilde{h}Z)\end{pmatrix}\xi\\
&+\tilde{g}(Y-\tilde{h}Y,\tilde{h}Z)\tilde{\varphi}(X-\tilde{h}X)-\tilde{g}(X-\tilde{h}X,\tilde{h}Z)\tilde{\varphi}(Y-\tilde{h}Y)\\
&-\tilde{g}(\tilde{\varphi}(X-\tilde{h}X),\tilde{h}Z)(Y-\tilde{h}Y)+\tilde{g}(\tilde{\varphi}(Y-\tilde{h}Y),\tilde{h}Z)(X-\tilde{h}X)\\
&+\tilde{\varphi}\begin{pmatrix}\tilde{\kappa}(\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y-\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}X+\tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\tilde{\varphi}Y\\ -\tilde{g}(Z,\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\tilde{\varphi}X+\eta(Z)(\eta(X)\tilde{h}Y-\eta(Y)\tilde{h}X))\end{pmatrix}\\
&+\tilde{\varphi}\left(-\tilde{\mu}((1+\tilde{\kappa})\eta(Z)(\eta(Y)X-\eta(X)Y)+2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z-\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{R}(X,Y)Z=&\begin{pmatrix}\eta(Y)\tilde{g}((1+2\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}X+(\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}X,\tilde{h}Z)\\ -\eta(X)\tilde{g}((1+2\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}Y+(\tilde{\mu}-1)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y,\tilde{h}Z)\end{pmatrix}\xi\\
&+(\tilde{g}(Y-\tilde{h}Y,\tilde{h}Z)-\tilde{\mu}(1+\tilde{\kappa})\eta(Y)\eta(Z))\tilde{\varphi}X\\
&-(\tilde{g}(X-\tilde{h}X,\tilde{h}Z)-\tilde{\mu}(1+\tilde{\kappa})\eta(X)\eta(Z))\tilde{\varphi}Y\\
&-(\tilde{g}(Y-\tilde{h}Y,\tilde{h}Z)+\tilde{\kappa}\eta(Y)\eta(Z))\tilde{\varphi}\tilde{h}X\\
&+(\tilde{g}(X-\tilde{h}X,\tilde{h}Z)+\tilde{\kappa}\eta(X)\eta(Z))\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\\
&-(1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z+\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)X+(1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z+\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)Y\\
&+\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z+\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\tilde{h}X-\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z+\tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\tilde{h}Y\\
&-2\tilde{\mu}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{h}Z
\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

bulunur.

$\tilde{\kappa}<-1$ için de $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-sıfırlık durumu, eğrilik tensör alanını belirlediği ispatlanacaktır.

Teorem 4.3.4: $\tilde{\kappa}<-1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. M nin eğrilik tensör alanı aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,X')X''=&(\tilde{\kappa}-1+\tilde{\mu})(\tilde{g}(X',X'')X-\tilde{g}(X,X'')X')\\ &+\tilde{\lambda}(\tilde{g}(X',X'')\tilde{\varphi}X-\tilde{g}(X,X'')\tilde{\varphi}X'),\end{aligned}\tag{4.3.19}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,X')Y=&-\tilde{\lambda}(\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}Y)X-\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)X')\\ &-(1-\tilde{\mu})(\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}X-\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}X'),\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

$$\widetilde{R}(X,Y)X' = -\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)X - \widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}X - \widetilde{\lambda}^2\widetilde{g}(X,X')Y + \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X,X')\widetilde{\varphi}Y - \widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}X', \tag{4.3.21}$$

$$\widetilde{R}(X,Y)Y' = \widetilde{\lambda}^2\widetilde{g}(Y,Y')X + \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(Y,Y')\widetilde{\varphi}X + \widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')Y - \widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')\widetilde{\varphi}Y - \widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}Y', \tag{4.3.22}$$

$$\widetilde{R}(Y,Y')X = -\widetilde{\lambda}(\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')Y - \widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)Y') + (1-\widetilde{\mu})(\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y')\widetilde{\varphi}Y - \widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{\varphi}Y'), \tag{4.3.23}$$

$$\widetilde{R}(Y,Y')Y'' = (\widetilde{\kappa}-1+\widetilde{\mu})(\widetilde{g}(Y',Y'')Y - \widetilde{g}(Y,Y'')Y') - \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}(Y',Y'')\widetilde{\varphi}Y - \widetilde{g}(Y,Y'')\widetilde{\varphi}Y'), \tag{4.3.24}$$

Burada $X, X^{'}, X^{''} \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y, Y^{'}, Y^{''} \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: (4.3.19) ve (4.3.20) nolu eşitlikler ispatlanacaktır. Diğer eşitliklerin ispatları benzer şekilde yapılabilir. $\widetilde{R}(X,X')Y$ nin $\mathbb{R}\xi$ boyunca bileşeni yoktur. Çünkü

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,X')Y,\xi) &= -\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,X')\xi,Y)\\ &= -\widetilde{g}(\widetilde{\kappa}(\eta(X')X-\eta(X)X') + \widetilde{\mu}(\eta(X')\widetilde{h}X - \eta(X)\widetilde{h}X',Y) = 0\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

$\widetilde{h}D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda}) = D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\mp\widetilde{\lambda})$ olmasından dolayı (4.3.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned}-\widetilde{\lambda}\widetilde{R}(X,X')Y - \widetilde{\varphi}\widetilde{h}\widetilde{R}(X,X')Y &= \widetilde{g}(X'-\widetilde{h}X',\widetilde{h}Y)\widetilde{\varphi}X - \widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,\widetilde{h}Y)\widetilde{\varphi}X'\\ &\quad - \widetilde{g}(X'-\widetilde{h}X',\widetilde{h}Y)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X + \widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,\widetilde{h}Y)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X^{'}\\ &\quad - (1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)X + (1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)X'\\ &\quad + \widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)\widetilde{h}X - \widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y)\widetilde{h}X'\\ &\quad - 2\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}X')\widetilde{h}Y\end{aligned}$$

$$\widetilde{\lambda}\widetilde{R}(X,X')Y+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\widetilde{R}(X,X')Y=-\widetilde{g}(X',\widetilde{h}Y)\widetilde{\varphi}X+\widetilde{g}(X,\widetilde{h}Y)\widetilde{\varphi}X'$$
$$+\widetilde{g}(X',\widetilde{\lambda}\widetilde{h}Y+(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}Y)X-\widetilde{g}(X,\widetilde{\lambda}\widetilde{h}Y+(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}Y)X'$$
$$-\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{h}X+\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{h}X'$$

bulunur.

Son denklemi herhangi $U\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ile iç çarpıp, $\widetilde{\varphi}\widetilde{h}$ operatörünün simetrik oluşu kullanılırsa,

$$2\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,X')Y,U)=\widetilde{g}(X',\widetilde{\lambda}\widetilde{h}Y+(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X,U)-\widetilde{g}(X,\widetilde{\lambda}\widetilde{h}Y+(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X',U)$$

hesaplanır. $\widetilde{h}Y=-\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}Y$ olduğundan bir önceki denklemden

$$2\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,X')Y,U)=(\widetilde{g}(X',-\widetilde{\lambda}^2\widetilde{\varphi}Y)+\widetilde{g}(X',-\widetilde{\lambda}^2\widetilde{\varphi}Y))\widetilde{g}(X,U)$$
$$-(\widetilde{g}(X,-\widetilde{\lambda}^2\widetilde{\varphi}Y)+\widetilde{g}(X,-\widetilde{\lambda}^2\widetilde{\varphi}Y))\widetilde{g}(X',U)$$

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,X')Y,U)=\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X',U)-\widetilde{\lambda}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X,U) \tag{4.3.25}$$

bulunur.

$V\in\Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ için benzer tartışma yapılarak

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)X',V)&=\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}V)+(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X,X')\widetilde{g}(Y,V)\\&+\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}V)\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.1.2 deki gibi $\{e_i,\widetilde{\varphi}e_i,\xi\}, i\in\{1,...,n\}$ $\widetilde{\varphi}$ -bazı gözönüne alınsın. (4.3.26) eşitliğinden

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,X')Y,\widetilde{\varphi}e_i)=-\widetilde{g}(\widetilde{R}(X',Y)X,\widetilde{\varphi}e_i)+\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)X',\widetilde{\varphi}e_i)$$
$$=-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X)\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}^2e_i)-(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X,X')\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}e_i)$$
$$-\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}^2e_i)+\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,X')\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}^2e_i)$$
$$+(1+\widetilde{\kappa})\widetilde{g}(X,X')\widetilde{g}(Y,\widetilde{\varphi}e_i)+\widetilde{\mu}\widetilde{g}(X,\widetilde{\varphi}Y)\widetilde{g}(X',\widetilde{\varphi}^2e_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}X)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X',\tilde{\varphi}e_i) - (1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,X')\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}e_i) \\
&\quad + \tilde{\mu}\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}Y)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}e_i) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}X')\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}e_i) \\
&\quad + (1+\tilde{\kappa})\tilde{g}(X,X')\tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}e_i) - \tilde{\mu}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{g}(\tilde{\varphi}X',\tilde{\varphi}e_i)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\tilde{\varphi}e_i) = (\tilde{\mu}-1)\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{g}(X',e_i) - (\tilde{\mu}-1)\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}Y)\tilde{g}(X,e_i) \tag{4.3.27}
$$

elde edilir.

(4.3.26) ve (4.3.27) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,X')Y &= \sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,e_i)e_i - \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,e_i)e_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i + \sum_{i=r+1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}(X,X')Y,\tilde{\varphi}e_i)\tilde{\varphi}e_i \\
&= \tilde{\lambda}\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)X' - \tilde{\lambda}\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}Y)X + (1-\tilde{\mu})\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}X' - (1-\tilde{\mu})\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}X
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (4.3.20) denkleminin ispatı biter.

(4.3.19) denklemini ispat etmek için (4.3.17) denklemi kullanılarak, uzun bir hesap yapıldıktan sonra

$$
\tilde{\varphi}\tilde{R}(X,X')\tilde{\varphi}X'' - \tilde{R}(X,X')X'' + \tilde{g}(\tilde{R}(X,X')X'',\xi)\xi =
$$
$$
\tilde{\varphi}\begin{pmatrix} \tilde{g}(X'-\tilde{h}X',X'')\tilde{\varphi}(X-\tilde{h}X) - \tilde{g}(X-\tilde{h}X,X'')\tilde{\varphi}(X'-\tilde{h}X') \\ -\tilde{g}(\tilde{\varphi}(X-\tilde{h}X),X'')(X'-\tilde{h}X') + \tilde{g}(\tilde{\varphi}(X'-\tilde{h}X'),X'')(X-\tilde{h}X) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,X')X'' &= \tilde{\varphi}\begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}(\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}^2X'')X - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}^2X'')X') \\ -(1-\tilde{\mu})(\tilde{g}(X',\tilde{\varphi}^2X'')\tilde{\varphi}X - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}^2X'')\tilde{\varphi}X' \end{pmatrix} \\
&\quad - \tilde{g}(X'-\tilde{h}X',X'')((X-\tilde{h}X) - \tilde{g}(X-\tilde{h}X,\xi)\xi) \\
&\quad + \tilde{g}(X-\tilde{h}X,X'')((X'-\tilde{h}X') - \tilde{g}(X'-\tilde{h}X',\xi)\xi) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\varphi}X-\tilde{\varphi}\tilde{h}X,X'')(\tilde{\varphi}X'-\tilde{\varphi}\tilde{h}X^{'}) - \tilde{g}(\tilde{\varphi}X'-\tilde{\varphi}\tilde{h}X',X'')(\tilde{\varphi}X-\tilde{\varphi}\tilde{h}X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,X')X'' &= (\widetilde{\kappa}-1+\widetilde{\mu})\widetilde{g}(X',X'')X+\widetilde{g}(X',X'')\widetilde{h}X\\
&\quad -(\widetilde{\kappa}-1+\widetilde{\mu})\widetilde{g}(X,X'')X'-\widetilde{g}(X,X'')\widetilde{h}X'
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.2: $\widetilde{\kappa}<-1$ için $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ paradeğme metrik $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu})$-manifold olsun. M deki her X,Y,Z,W vektör alanı için Riemann eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ nin formülü aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) &= \left(-1+\frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)\left(\widetilde{g}(Y,Z)\widetilde{g}(X,W)-\widetilde{g}(X,Z)\widetilde{g}(Y,W)\right)\\
&\quad +\widetilde{g}(Y,Z)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,W)-\widetilde{g}(X,Z)\widetilde{g}(\widetilde{h}Y,W)\\
&\quad -\widetilde{g}(Y,W)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,Z)+\widetilde{g}(X,W)\widetilde{g}(\widetilde{h}Y,Z)\\
&\quad +\frac{-1+\frac{\widetilde{\mu}}{2}}{\widetilde{\kappa}+1}\left(\widetilde{g}(\widetilde{h}Y,Z)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,W)-\widetilde{g}(\widetilde{h}X,Z)\widetilde{g}(\widetilde{h}Y,W)\right)\\
&\quad -\frac{\widetilde{\mu}}{2}\left(\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,Z)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,W)-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Z)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Y,W)\right)\\
&\quad +\frac{-\widetilde{\kappa}-\frac{\widetilde{\mu}}{2}}{\widetilde{\kappa}+1}\left(\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y,Z)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X,W)-\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y,W)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X,Z)\right)\\
&\quad +\widetilde{\mu}\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}X,Y)\widetilde{g}(\widetilde{\varphi}Z,W)\\
&\quad +\eta(X)\eta(W)\left(\left(\widetilde{\kappa}+1-\frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)\widetilde{g}(Y,Z)+(\widetilde{\mu}-1)\widetilde{g}(\widetilde{h}Y,Z)\right)\\
&\quad -\eta(X)\eta(Z)\left(\left(\widetilde{\kappa}+1-\frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)\widetilde{g}(Y,W)+(\widetilde{\mu}-1)\widetilde{g}(\widetilde{h}Y,W)\right)\\
&\quad +\eta(Y)\eta(Z)\left(\left(\widetilde{\kappa}+1-\frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)\widetilde{g}(X,W)+(\widetilde{\mu}-1)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,W)\right)\\
&\quad -\eta(Y)\eta(W)\left(\left(\widetilde{\kappa}+1-\frac{\widetilde{\mu}}{2}\right)\widetilde{g}(X,Z)+(\widetilde{\mu}-1)\widetilde{g}(\widetilde{h}X,Z)\right)
\end{aligned}
\tag{4.3.28}
$$

(Cappelletti Montano ve ark. 2012).

İspat: M deki bir keyfi X vektör alanı $X_{\tilde{\lambda}} \in \Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $X_{-\tilde{\lambda}} \in \Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ olmak üzere $X = X_{\tilde{\lambda}} + X_{-\tilde{\lambda}} + \eta(X)\xi$ olacak şekilde ayrılabilir. Daha sonra $\tilde{R}(X,Y)Z$, $\tilde{R}(X_{\pm\tilde{\lambda}},Y_{\pm\tilde{\lambda}})Z_{\pm\tilde{\lambda}}$, $\tilde{R}(X,Y)\xi$, $\tilde{R}(X,\xi)Z$ formundaki terimlerin toplamı olarak yazılır. Teorem 4.3.4 ve $X_{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(X - \eta(X)\xi + \frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}X \right)$, $X_{-\tilde{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(X - \eta(X)\xi - \frac{1}{\sqrt{-1-\tilde{\kappa}}}\tilde{\varphi}\tilde{h}X \right)$ oluşu kullanılarak ve uzun bir hesap yapıldıktan sonra, (4.3.28) elde edilir. □

Uyarı 4.3.3.: $\tilde{\kappa} < -1$ ve $\tilde{\kappa} > -1$ durumları geometrik olarak çok farklı olmasına karşın, (4.3.28) formülü ve (4.2.48) formüllerinin aynı çıkmış olması oldukça ilginçtir.

Sonuç 4.3.3: $\tilde{\kappa} < -1$ için $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold olsun. Herhangi $Z \in \Gamma(D)$ için ξ-kesitsel eğrilik sabittir ve $\tilde{K}(Z,\xi) = \tilde{\kappa}$ ile verilir. Ayrıca, $X, X' \in \Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ ve $Y,Y' \in \Gamma(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ için ξ ya normal olan düzlem kesitlerinin kesitsel eğriliği

$$\tilde{K}(X,X') = \tilde{K}(Y,Y') = \tilde{\kappa} - 1 + \tilde{\mu},$$
$$\tilde{K}(X,Y) = \tilde{\lambda}^2 - (\tilde{\mu}+1)\frac{\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)^2}{\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(Y,Y)}$$

ile verilir (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Sonuç 4.3.2, (4.1.3) ve (4.1.41) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki sonucun ispatı verilebilir.

Sonuç 4.3.4: $\tilde{\kappa} < -1$ için herhangi $(2n+1)$-boyutlu $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldu için $\tilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\tilde{Q} = (2(1-n) + n\tilde{\mu})I + (2(n-1) + \tilde{\mu})\tilde{h} + (2(n-1) + n(2\tilde{\kappa} - \tilde{\mu}))\eta \otimes \xi$$

denklemi ile verilir.

Özellikle, $(M,\tilde{g})$ manifoldu η-Einstein dır ancak ve ancak $\tilde{\mu}=2(1-n)$, Einstein dır ancak ve ancak $\tilde{\kappa}=\dfrac{1-n^2}{n}$ ve $\tilde{\mu}=2(1-n)$ (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

Uyarı 4.3.4: Eğer $\tilde{\kappa}<-1$ ise Sonuç 4.3.4 e göre, boyut 3 den büyük iken Einstein paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar mevcuttur. Bu $\tilde{\kappa}>-1$ durumundan ve değme metrik durumundan farklı bir özelliktir.

Bu bölüm $\tilde{\kappa}<-1$ için bir paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifold örneği verilerek bitirilsin.

Örnek 4.3.1: $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ bazı ile verilen Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olsun. Lie bracketleri

$$[e_1,e_5]=\alpha\beta e_1+\alpha\beta e_2,\ [e_2,e_5]=\alpha\beta e_1+\alpha\beta e_2,\ [e_3,e_5]=-\alpha\beta e_3+\alpha\beta e_4,$$

$$[e_4,e_5]=\alpha\beta e_3-\alpha\beta e_4,\ [e_1,e_2]=\alpha e_1+\alpha e_2,\qquad [e_1,e_3]=\beta e_2+\alpha e_4-2e_5,$$

$$[e_1,e_4]=\beta e_2+\alpha e_3,\qquad [e_2,e_3]=\beta e_1-\alpha e_4,\qquad [e_2,e_4]=\beta e_1-\alpha e_3+2e_5,$$

$$[e_3,e_4]=-\beta e_3+\beta e_4$$

olsun. Burada α,β , $\alpha\beta>0$ olacak şekilde sıfırdan farklı reel sayılardır. G, Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olan Lie grup olmak üzere, G üzerinde $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ sol invaryant paradeğme metrik yapısı

$\tilde{g}(e_1,e_1)=\tilde{g}(e_4,e_4)=-\tilde{g}(e_2,e_2)=-\tilde{g}(e_3,e_3)=\tilde{g}(e_5,e_5)=1,\ \tilde{g}(e_i,e_j)=0\ \ (i\neq j)$ ve
$\tilde{\varphi}e_1=e_3,\ \tilde{\varphi}e_2=e_4,\ \tilde{\varphi}e_3=e_1,\ \tilde{\varphi}e_4=e_2,\ \tilde{\varphi}e_5=0,\ \xi=e_5$ ve $\eta=\tilde{g}(.,e_5)$ verilsin. Burada
$\tilde{\varphi}\tilde{h}e_1=\tilde{\lambda}e_1,\ \tilde{\varphi}\tilde{h}e_2=\tilde{\lambda}e_2,\tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\varphi}e_1=-\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\varphi}e_2=-\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}e_2,\tilde{h}\xi=0.$

şeklindedir. $\tilde{\nabla}$, yarı-Riemann metrik $\tilde{g}$ nin Levi-Civita konneksiyonu ve $\tilde{R}$ ise $\tilde{g}$ nün eğrilik tensörüdür. Koszul formülü kullanılarak,

$$\tilde{\nabla}_{e_1}\xi = \alpha\beta e_1 - \tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{\nabla}_{e_2}\xi = \alpha\beta e_2 - \tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}\xi = -e_1 - \alpha\beta\tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}\xi = -e_2 - \alpha\beta\tilde{\varphi}e_2,$$

$$\tilde{\nabla}_{\xi}e_1 = -\alpha\beta e_2 - \tilde{\varphi}e_1,\ \tilde{\nabla}_{\xi}e_2 = -\alpha\beta e_1 - \tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\varphi}e_1 = -e_1 - \alpha\beta\tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\varphi}e_2 = -e_2 - \alpha\beta\tilde{\varphi}e_1,$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1}e_1 = \alpha e_2 - \alpha\beta e_5,\ \tilde{\nabla}_{e_1}e_2 = \alpha e_1,\ \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\varphi}e_1 = \alpha\tilde{\varphi}e_2 - e_5,\ \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\varphi}e_2 = \alpha\tilde{\varphi}e_1,$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2}e_1 = -\alpha e_2,\ \tilde{\nabla}_{e_2}e_2 = -\alpha e_1 + \alpha\beta e_5,\ \tilde{\nabla}_{e_2}\tilde{\varphi}e_1 = -\alpha\tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{e_2}\tilde{\varphi}e_2 = -\alpha\tilde{\varphi}e_1 + e_5,$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}e_1 = -\beta e_2 + e_5,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}e_2 = -\beta e_1,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}\tilde{\varphi}e_1 = -\beta\tilde{\varphi}e_2 - \alpha\beta e_5,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_1}\tilde{\varphi}e_2 = -\beta\tilde{\varphi}e_1,$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}e_1 = -\beta e_2,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}e_2 = -\beta e_1 - e_5,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}\tilde{\varphi}e_1 = -\beta\tilde{\varphi}e_2,\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}e_2}\tilde{\varphi}e_2 = -\beta\tilde{\varphi}e_1 + \alpha\beta e_5$$

elde edilir.

Burada $\tilde{\lambda} = \alpha\beta$ ve $\tilde{\mu} = 2$. O halde $(G, \tilde{g})$ nin Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensör alanı (4.1.1) eşitliği ile verilen $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$ sıfırlık durumunu $\tilde{\kappa} = -1 - (\alpha\beta)^2\, ve\, \tilde{\mu} = 2$ olacak şekilde sağlar (Cappelletti Montano ve ark. 2012).

5. 3-BOYUTLU PARADEĞME $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-MANİFOLDLAR

5.0. Giriş

Bu bölüm, 3-boyutlu harmonik karakteristik vektör alanlı paradeğme metrik manifoldlara ve $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar için sınıflandırmaya ayrılmıştır. Bu bölümde Paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Karakteristik vektör alanı ξ harmonik olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifoldlar karakterize edilmiştir. Paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların tanımı kullanılarak, paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca boyut 3 den büyük iken paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldun $(\tilde{\kappa}\neq -1)$, paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolda dönüştüğü ispatlanmıştır. $\tilde{\kappa}>-1,\ \tilde{\kappa}=-1,\ \tilde{\kappa}<-1$ olma durumlarına göre paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların özellikleri incelenip, her bir durum için örnek oluşturulmuştur.

5.1. (2n+1)-boyutlu Paradeğme Metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-Manifoldlar ile İlgili Sonuçlar

Bu kısımda, paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların bazı özellikleri verilmiştir ve $\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu}$ değerleri değiştikçe paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldlar D-homotetik deformasyonlar altında değişmediği ispatlanmıştır. Ayrıca M nin boyutu 3 den büyük ve $\tilde{\kappa}\neq -1$ iken paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifoldların paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifoldlar olması gerektiği ispatlanıp literatürdeki ilk 5 boyutta $\tilde{h}^2=0$ olup $\tilde{h}\neq 0$ olan $(-1,\tilde{\mu},\tilde{\nu}\neq 0)$-paradeğme manifold örneği verilmiştir.

Tanım 5.1.1: (M,g) diferensiyellenebilir, yönlendirilmiş, bağlantılı, yarı-Riemann manifold ve g^s Sasaki metrik ile verilen teğet demet (TM,g^s) olsun. M deki V **vektör alanının enerjisi**

$V:(M,g)\to(TM,g^s)$ ye karşılık gelen enerjidir. M kompakt olduğunda, V nin enerjisi

$$E(V)=\frac{1}{2}\int_M (iz_g V^* g^s)dv=\frac{n}{2}vol(M,g)+\frac{1}{2}\int_M \|\nabla V\|^2 dv.$$

ile belirlidir (Dragomir ve Perrone 2012).

Kompakt olmama durumunda, kompakt bölgeler dikkate alınabilir.

Tanım 5.1.2: $V:(M,g)\rightarrow(TM,g^s)$ **harmonik dönüşüm** olması için gerek ve yeter şart

$$iz[R(\nabla\cdot V,V)\cdot]=0,\ \nabla^*\nabla V=0 \tag{5.1.1}$$

özelliğinin sağlanmasıdır.

Burada tüm $i=1,...,n$ için $g(e_i,e_i)=\varepsilon_i=\pm 1$ ile verilen $\{e_1,...,e_n\}$ yarı-ortonormal lokal çatısı için

$$\nabla^*\nabla V=\sum_i \varepsilon_i(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V-\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}V) \tag{5.1.2}$$

geçerlidir (Dragomir ve Perrone 2012).

Herhangi reel sabit $\rho\neq 0$ için $\chi^\rho(M)=\{W\in\chi(M):\|W\|^2=\rho\}$ tanımlansın. Aynı uzunluktaki vektör alanlarına kısıtlanmış $E|_{\chi^\rho(M)}$ enerji fonksiyoneli için kritik noktalar olan $V\in\chi^\rho(M)$ vektör alanları gözönüne alınsın.

Tanım 5.1.3: V **harmonik vektör alanı** olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla^*\nabla V, V \text{ ile lineer bağımlı} \tag{5.1.3}$$

şartının sağlanmasıdır (Dragomir ve Perrone 2012).

Tanım 5.1.4: M üzerinde birim teğet küre demeti T_1M ve T_1M üzerine indirgenmiş metrik g^s olsun. $V:(M,g)\rightarrow(T_1M,g^s)$ **dönüşümünün harmonik olması** için V harmonik vektör alanı olmalı ve ek şart olarak da

$$iz\left[R(\nabla \cdot V,V)\cdot\right]=0 \tag{5.1.4}$$

şartı sağlanmalıdır (Abbassi ve ark. 2009).

Tanım 5.1.5: $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$ paradeğme metrik manifoldun ξ karakteristik vektör alanı harmonik vektör alanı ise manifolda H -paradeğme manifold denir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Son zamanlarda, G. Calvaruso ve D. Perrone (Calvaruso ve Perrone arxiv) da tüm 3-boyutlu homojen paradeğme metrik manifoldların H -paradeğme olduğunu yani ξ karakteristik vektör alanı harmonik olan paradeğme metrik manifoldlar olduğunu ispatlamışlardır.

J.Welyczko, herhangi 3-boyutlu paradeğme metrik manifoldların her zaman integrallenebildiğini ve 3-boyutlu paradeğme metrik manifoldlar için

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Y=-\widetilde{g}(X-\widetilde{h}X,Y)\xi+\eta(Y)(X-\widetilde{h}X) \tag{5.1.5}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamıştır (Welyczko 2014).

Tanım 5.1.6: Bir $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})$-manifold paradeğme metrik manifolddur ve eğrilik tensör alanı

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\xi=\widetilde{\kappa}\big(\eta(Y)X-\eta(X)Y\big)+\widetilde{\mu}\big(\eta(Y)\widetilde{h}X-\eta(X)\widetilde{h}Y\big)\\ +\widetilde{\nu}\big(\eta(Y)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X-\eta(X)\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y\big)\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

eşitliğini sağlar. Burada $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}), M$ de diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Bu bölümde, (5.1.6) eşitliğini sağlayan paradeğme metrik manifoldların bazı özellikleri incelenecektir.

Yardımcı Teorem 5.1.1: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$$\tilde{h}^2 = (1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^2, \tag{5.1.7}$$

$$\tilde{Q}\xi = 2n\tilde{\kappa}\xi, \tag{5.1.8}$$

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi})Y = -\tilde{g}(X-\tilde{h}X,Y)\xi + \eta(Y)(X-\tilde{h}X), \quad \tilde{\kappa} \neq -1 \tag{5.1.9}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})X &= -(1+\tilde{\kappa})(2\tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)\xi + \eta(X)\tilde{\varphi}Y - \eta(Y)\tilde{\varphi}X)\\ &+ (1-\tilde{\mu})(\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X)\\ &- \tilde{\nu}(\eta(X)\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{h}X),\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X &= -(1+\tilde{\kappa})(\eta(X)Y - \eta(Y)X)\\ &+ (1-\tilde{\mu})(\eta(X)\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{h}X)\\ &- \tilde{\nu}(\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X),\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

$$\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h} = \tilde{\mu}\tilde{h}\circ\tilde{\varphi} - \tilde{\nu}\tilde{h}, \quad \tilde{\nabla}_\xi \tilde{\varphi}\tilde{h} = -\tilde{\mu}\tilde{h} + \tilde{\nu}\tilde{h}\circ\tilde{\varphi} \tag{5.1.12}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\xi,X)Y &= \tilde{\kappa}(\tilde{g}(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \tilde{\mu}(\tilde{g}(\tilde{h}X,Y)\xi - \eta(Y)\tilde{h}X)\\ &+ \tilde{\nu}(\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X,Y)\xi - \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X),\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

$$\xi(\tilde{\kappa}) = -2\tilde{\nu}(1+\tilde{\kappa}), \tag{5.1.14}$$

Burada X *ve* Y, M üzerinde vektör alanlarıdır ve $\tilde{Q}$ ise $(M,\tilde{g})$ nin Ricci operatörüdür (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.1.7)-(5.1.10) un ispatı Yardımcı Teorem 4.1.1 in ispatına benzerdir. (5.1.11) eşitliği (5.1.9), (5.1.10) ve $(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X = (\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi})\tilde{h}Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi})\tilde{h}X + \tilde{\varphi}((\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})X)$ eşitliğinin bir sonucudur. (5.1.10) da X yerine ξ yazılırsa (5.1.12) denklemi elde edilir. (5.1.13) ün ispatı (5.1.6) nın kullanılmasıyla kolaylıkla görülmektedir. $\tilde{h}\tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}\tilde{h}$, oluşu, (5.1.7) ve (5.1.12) eşitlikleri gözönüne alınarak

$$\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h}^{2} = (\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})\tilde{h} + \tilde{h}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h}) = (\tilde{\mu}\tilde{h}\tilde{\varphi} - \tilde{\nu}\tilde{h})\tilde{h} + \tilde{h}(\tilde{\mu}\tilde{h}\tilde{\varphi} - \tilde{\nu}\tilde{h}) = -2\tilde{\nu}(1+\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^{2} \quad (5.1.15)$$

elde edilir. (5.1.7) eşitliğinin ξ ye göre türevi alınıp, (5.1.5) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h}^{2} = \xi(\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^{2} \quad (5.1.16)$$

bulunur. (5.1.15) ve (5.1.16) denklemlerinin birleştirilmesiyle (5.1.14) eşitliğinin ispatı görülür. □

(5.1.7) den $\tilde{\kappa} = -1$ olan bir paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold $\tilde{h}^{2} = 0$ eşitliğini sağlar. Değme metrik durumundan farklı olarak, $\tilde{g}$ yarı-Riemann metriği olduğundan $\tilde{h}$ sıfırdır ve manifold para-Sasakian dır denilemez.

Önerme 4.1.2 yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.1.1: Eğer $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold ise $(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ yapısı

$$\overline{\kappa} = \frac{\tilde{\kappa} + 1 - \alpha^{2}}{\alpha^{2}}, \quad \overline{\mu} = \frac{\tilde{\mu} + 2\alpha - 2}{\alpha}, \quad \overline{\nu} = \frac{\tilde{\nu}}{\alpha} \quad (5.1.17)$$

olacak şekilde bir paradeğme metrik $(\overline{\kappa}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$-yapıdır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Aşağıda verilen sonucun ispatı, Sonuç 4.1.3 e benzerdir.

Sonuç 5.1.1: $\tilde{\kappa} \neq -1$ için $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold olsun. Böylece sırasıyla, $\tilde{\kappa} > -1$ için $\tilde{h}$ operatörüne ve $\tilde{\kappa} < -1$ için $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ operatörüne karşılık gelen matris köşegenleştirilebilir ve $\tilde{h}$ ve $\tilde{\varphi}\tilde{h}$ ya karşılık gelen matrisin karakteristik değerleri $\tilde{h}\xi = 0$, $\tilde{h}e_{i} = \tilde{\lambda}e_{i}$, $\tilde{h}\tilde{\varphi}e_{i} = -\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}e_{i}$ olacak şekilde 0, $\tilde{\lambda}$ ve $-\tilde{\lambda}$ dır. Burada

$\widetilde{\lambda} := \sqrt{|1+\widetilde{\kappa}|}$ dır. $D_{\widetilde{h}}(0) = R\xi,\ \ D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}),\ D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})$ ve $D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(0) = R\xi,\ D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}),\ D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})$ kendi aralarında ortogonaldir ve $\widetilde{\varphi}D_{\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda}) = D_{\widetilde{h}}(\mp\widetilde{\lambda})$ ve $\widetilde{\varphi}D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda}) = D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\mp\widetilde{\lambda})$. Ayrıca,

$$D_{\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda}) = \left\{ X \pm \frac{1}{\sqrt{1+\widetilde{\kappa}}}\widetilde{h}X \,\middle|\, X \in \Gamma(D^{\mp}) \right\} \quad \widetilde{\kappa} > -1 \text{ için} \tag{5.1.18}$$

$$D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda}) = \left\{ X \pm \frac{1}{\sqrt{-1-\widetilde{\kappa}}}\widetilde{\varphi}\widetilde{h}X \,\middle|\, X \in \Gamma(D^{\mp}) \right\}, \quad \widetilde{\kappa} < -1 \text{ için} \tag{5.1.19}$$

denklemleri sağlanır. Burada D^{+} ve D^{-} sırasıyla; 1 ve -1 karakteristik değerlerine karşılık gelen $\widetilde{\varphi}$ nin karakteristik dağılımlarını belirtmektedirler. Son olarak, $\widetilde{\kappa} > -1$ için $D^{+}, D^{-}, D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}), D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})$ dört dağılım arasında herhangi ikisi ve $\widetilde{\kappa} < -1$ için $D^{+}, D^{-}, D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}), D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda})$ dört dağılım arasında herhangi ikisi ortogonaldir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, $D_{\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda})$ ($\widetilde{\kappa} > -1$ durumunda) ve $D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\pm\widetilde{\lambda})$ ($\widetilde{\kappa} < -1$ durumunda) nın indeksinin sabit olduğu kabul edilecektir. $\widetilde{\kappa} > -1$ için $\widetilde{h}$ nın veya $\widetilde{\kappa} < -1$ durumu için $\widetilde{\varphi}\widetilde{h}$ köşegenleştirilebildiği için bir sonraki Yardımcı Teorem, Yardımcı Teorem 4.1.2 ye benzer olarak ispatlanabilir.

Yardımcı Teorem 5.1.2: $\widetilde{\kappa} \neq -1$ için $(M, \widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$ paradeğme metrik $(\widetilde{\kappa}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})$-manifold olsun. Eğer $\widetilde{\kappa} > -1$ ise $\widetilde{h}$ nın karakteristik vektörlerinin $\{X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n, \xi\}$ bir lokal ortogonal $\widetilde{\varphi}$-bazı $X_1, ..., X_n \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y_1, ..., Y_n \in \Gamma(D_{\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$ ve eğer $\widetilde{\kappa} < -1$ ise $\widetilde{\varphi}\widetilde{h}$ nın karakteristik vektörlerinin $\{X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n, \xi\}$ bir lokal ortogonal $\widetilde{\varphi}$-bazı $X_1, ..., X_n \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}))$ ve $Y_1, ..., Y_n \in \Gamma(D_{\widetilde{\varphi}\widetilde{h}}(-\widetilde{\lambda}))$

$$\widetilde{g}(X_i, X_i) = -\widetilde{g}(Y_i, Y_i) = \begin{cases} 1, & 1 \le i \le r \\ -1, & r+1 \le i \le r+s \end{cases} \tag{5.1.20}$$

$\tilde{\kappa} > -1$ için $r = \text{indeks}(D_{\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ve $s = n - r = \text{indeks}(D_{\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$

$\tilde{\kappa} < -1$için $r = \text{indeks}(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(-\tilde{\lambda}))$ ve $s = n - r = \text{indeks}(D_{\tilde{\varphi}\tilde{h}}(\tilde{\lambda}))$ olacak şekilde vardır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Yardımcı Teorem 5.1.3: Aşağıdaki diferensiyel denklem her $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ için sağlanır.

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(\tilde{\kappa})(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \xi(\tilde{\mu})(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y) \\ &\quad + \xi(\tilde{\nu})(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y) + X(\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^2Y - Y(\tilde{\kappa})\tilde{\varphi}^2X \\ &\quad + X(\tilde{\mu})\tilde{h}Y - Y(\tilde{\mu})\tilde{h}X + X(\tilde{\nu})\tilde{\varphi}\tilde{h}Y - Y(\tilde{\nu})\tilde{\varphi}\tilde{h}X \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.1.6) denkleminin keyfi bir Z vektör alanına göre türevi alınıp, $\tilde{\nabla}\xi = -\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}\tilde{h}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z\tilde{R}(X,Y)\xi &= Z(\tilde{\kappa})(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + Z(\tilde{\mu})(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y) \\ &\quad + Z(\tilde{\nu})(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y) \\ &\quad + \tilde{\kappa}\begin{bmatrix} (\eta(\tilde{\nabla}_ZY) - \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))X + \eta(Y)\tilde{\nabla}_ZX \\ +(-\eta(\tilde{\nabla}_ZX) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z) - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))Y - \eta(X)\tilde{\nabla}_ZY \end{bmatrix} \\ &\quad + \tilde{\mu}\begin{bmatrix} (\eta(\tilde{\nabla}_ZY) - \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\tilde{h}X + \eta(Y)\tilde{\nabla}_Z\tilde{h}X \\ +(-\eta(\tilde{\nabla}_ZX) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z) - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\tilde{h}Y - \eta(X)\tilde{\nabla}_Z\tilde{h}Y \end{bmatrix} \\ &\quad + \tilde{\nu}\begin{bmatrix} (\eta(\tilde{\nabla}_ZY) - \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\tilde{\varphi}\tilde{h}X + \eta(Y)\tilde{\nabla}_Z\tilde{\varphi}\tilde{h}X \\ +(-\eta(\tilde{\nabla}_ZX) + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z) - \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}\tilde{h}Z))\tilde{\varphi}\tilde{h}Y - \eta(X)\tilde{\nabla}_Z\tilde{\varphi}\tilde{h}Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\tilde{\nabla}\xi = -\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}\tilde{h}$ eşitliği bulunan bu son denklemde tekrar kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_Z \tilde{R})(X,Y,\xi) = \tilde{\nabla}_Z \tilde{R}(X,Y)\xi - \tilde{R}(\tilde{\nabla}_Z X,Y)\xi - \tilde{R}(X,\tilde{\nabla}_Z Y)\xi - \tilde{R}(X,Y)\tilde{\nabla}_Z \xi \\
= Z(\tilde{\kappa})\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) + Z(\tilde{\mu})\big(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y\big) \\
+ Z(\tilde{\nu})\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\big) \\
+ \tilde{\kappa}\big[\tilde{g}(Y,-\tilde{\varphi}Z + \tilde{\varphi}\tilde{h}Z)X + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z - \tilde{\varphi}\tilde{h}Z)Y\big] \\
+ \tilde{\mu}\begin{bmatrix} \tilde{g}(Y,-\tilde{\varphi}Z + \tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\tilde{h}X + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z - \tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\tilde{h}Y \\ + \eta(Y)(\tilde{\nabla}_Z \tilde{h})X - \eta(X)(\tilde{\nabla}_Z \tilde{h})Y \end{bmatrix} \\
+ \tilde{\nu}\begin{bmatrix} \tilde{g}(Y,-\tilde{\varphi}Z + \tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}X + \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Z - \tilde{\varphi}\tilde{h}Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y \\ + \eta(Y)(\tilde{\nabla}_Z \tilde{\varphi}\tilde{h})X - \eta(X)(\tilde{\nabla}_Z \tilde{\varphi}\tilde{h})Y \end{bmatrix} \\
+ \tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}Z - \tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z
\end{aligned}
$$

bulunur.

Bu son denklemde ikinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa tüm $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
0 = {} & Z(\tilde{\kappa})\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) + Z(\tilde{\mu})\big(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y\big) + Z(\tilde{\nu})\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\big) \\
& + X(\tilde{\kappa})\big(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z\big) + X(\tilde{\mu})\big(\eta(Z)\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{h}Z\big) + X(\tilde{\nu})\big(\eta(Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y - \eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z\big) \\
& + Y(\tilde{\kappa})\big(\eta(X)Z - \eta(Z)X\big) + Y(\tilde{\mu})\big(\eta(X)\tilde{h}Z - \eta(Z)\tilde{h}X\big) + Y(\tilde{\nu})\big(\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z - \eta(Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}X\big) \\
& + 2\tilde{\kappa}\big[\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,Z)X + \tilde{g}(\tilde{\varphi}Z,X)Y + \tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)Z\big] \\
& + \tilde{\mu}\begin{bmatrix} 2\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,Z)\tilde{h}X + \eta(Z)((\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})X) + 2\tilde{g}(\tilde{\varphi}Z,X)\tilde{h}Y \\ + \eta(X)((\tilde{\nabla}_Y \tilde{h})Z - (\tilde{\nabla}_Z \tilde{h})Y) + 2\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)\tilde{h}Z + \eta(Y)((\tilde{\nabla}_Z \tilde{h})X - (\tilde{\nabla}_X \tilde{h})Z) \end{bmatrix} \\
& + \tilde{\nu}\begin{bmatrix} 2\tilde{g}(\tilde{\varphi}Y,Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}X + \eta(Z)((\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X) + 2\tilde{g}(\tilde{\varphi}Z,X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y \\ + \eta(X)((\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})Z - (\tilde{\nabla}_Z \tilde{\varphi}\tilde{h})Y) + 2\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z + \eta(Y)((\tilde{\nabla}_Z \tilde{\varphi}\tilde{h})X - (\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Z) \end{bmatrix} \\
& + \tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}Z + \tilde{R}(Y,Z)\tilde{\varphi}X + \tilde{R}(Z,X)\tilde{\varphi}Y \\
& - \tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}Z - \tilde{R}(Y,Z)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \tilde{R}(Z,X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y
\end{aligned}
$$

hesaplanır. Bulunan bu son denklemde Z yerine ξ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= \xi(\tilde{\kappa})\big(\eta(Y)X-\eta(X)Y\big)+\xi(\tilde{\mu})\big(\eta(Y)\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{h}Y\big)+\xi(\tilde{\nu})\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\big)\\
&+X(\tilde{\kappa})Y-\eta(Y)\xi+X(\tilde{\mu})\tilde{h}Y+X(\tilde{\nu})\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\\
&+Y(\tilde{\kappa})(\eta(X)\xi-X)-Y(\tilde{\mu})\tilde{h}X-Y(\tilde{\nu})\tilde{\varphi}\tilde{h}X+2\tilde{\kappa}\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,Y)\xi\\
&+\tilde{\mu}\Big[(\tilde{\nabla}_X\tilde{h})Y-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{h})X)+\eta(X)((\tilde{\nabla}_Y\tilde{h})\xi-(\tilde{\nabla}_\xi\tilde{h})Y)+\eta(Y)((\tilde{\nabla}_\xi\tilde{h})X-(\tilde{\nabla}_X\tilde{h})\xi)\Big]\\
&+\tilde{\nu}\begin{bmatrix}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}\tilde{h})Y-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi}\tilde{h})X)+\eta(X)((\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi}\tilde{h})\xi-(\tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi}\tilde{h})Y)\\ +\eta(Y)((\tilde{\nabla}_\xi\tilde{\varphi}\tilde{h})X-(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}\tilde{h})\xi)\end{bmatrix}\\
&+\tilde{R}(Y,\xi)\tilde{\varphi}X+\tilde{R}(\xi,X)\tilde{\varphi}Y-\tilde{R}(Y,\xi)\tilde{\varphi}\tilde{h}X-\tilde{R}(\xi,X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.1.10), (5.1.11) ve (5.1.13) eşitlikleri son denklemde kullanılırsa (5.1.21) denklemi bulunur. □

Teorem 5.1.1: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ $\tilde{\kappa}\neq -1$ve $n>1$ için $(2n+1)$-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold olsun. M bir paradeğme $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$-manifolddur. Yani $\tilde{\kappa},\tilde{\mu}$ sabit ve $\tilde{\nu}$ sıfır fonksiyonudur (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: İlk önce $\tilde{\kappa}<-1$olduğu kabul edilsin. Sonuç 5.1.1 ve Yardımcı Teorem 5.1.2 $\tilde{\varphi}\tilde{h}X_i=\tilde{\lambda}X_i$, $\tilde{\varphi}\tilde{h}\,\tilde{\varphi}X_i=-\tilde{\lambda}\,\tilde{\varphi}X_i,\tilde{h}\,\xi=0,\ i=1,...,n$ olacak şekilde $\{X_1,...,X_n,\tilde{\varphi}X_1,...,\tilde{\varphi}X_n,\xi\}$ bir lokal ortogonal $\tilde{\varphi}$-bazının varlığını ifade eder. (5.1.21) denkleminde $X=X_i$ ve $Y=\tilde{\varphi}X_i$ yazılırsa

$$(\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\kappa})+\tilde{\lambda}X_i(\tilde{\mu})+\tilde{\lambda}(\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\nu})=0 \tag{5.1.22}$$

$$X_i(\tilde{\kappa})-\tilde{\lambda}(\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\mu})-\tilde{\lambda}X_i(\tilde{\nu})=0 \tag{5.1.23}$$

denklemleri elde edilir.

$n>1$ olduğundan $i\neq j$ için X ve Y yi sırasıyla X_i ve X_j ile yer değiştirilirse (5.1.21) eşitliği

$$X_i(\tilde{\kappa})+\tilde{\lambda}X_i(\tilde{\nu})=0 \ ve\ \ X_i(\tilde{\mu})=0 \tag{5.1.24}$$

halini alır.

Son olarak yine (5.1.21) eşitliğinde $i \neq j$ için X ve Y yerine sırasıyla $\tilde{\varphi}X_i$ ve $\tilde{\varphi}X_j$ yazılırsa

$$(\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\kappa}) - \tilde{\lambda}(\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\nu}) = 0 \; ve \; (\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\mu}) = 0 \tag{5.1.25}$$

bulunur.

(5.1.22), (5.1.23), (5.1.24) ve (5.1.25) denklemlerinden

$$X_i(\tilde{\kappa}) = (\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\kappa}) = X_i(\tilde{\mu}) = (\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\mu}) = X_i(\tilde{\nu}) = (\tilde{\varphi}X_i)(\tilde{\nu}) = 0 \tag{5.1.26}$$

elde edilir.

(5.1.26) denklemi kullanılarak $d\tilde{\mu} = \xi(\tilde{\mu})\eta$ olduğu ve böylece

$$0 = d(d\tilde{\mu}) = d\xi(\tilde{\mu}) \wedge \eta + \xi(\tilde{\mu})d\eta \tag{5.1.27}$$

eşitliği bulunur.

Sırasıyla $(X_i, \xi)\, ve\; (\tilde{\varphi}X_i, \xi)$ çiftlerine (5.1.27) uygulanılırsa

$$d\xi(\tilde{\mu}) = \xi\xi(\tilde{\mu})\eta \tag{5.1.28}$$

elde edilir.

(5.1.28) denklemi (5.1.27) de kullanılırsa $\xi(\tilde{\mu}) = 0$ Yani, $\tilde{\mu}$ fonksiyonunun sabit olduğu görülür. Benzer tartışma ile $\tilde{\kappa}$ fonksiyonunun da sabit olduğu görülebilir. (5.1.14) denkleminden de $\tilde{\nu} = 0$ olduğu bulunur.

Şimdi $\tilde{\kappa} > -1$ olduğu kabul edilsin. Sonuç 5.1.1 ve Yardımcı Teorem 5.1.2 yardımıyla $\tilde{h}X_i = \tilde{\lambda}X_i,\, \tilde{h}\tilde{\varphi}X_i = -\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}X_i, \tilde{h}\xi = 0,\; i = 1,...,n$ olacak şekilde $\{X_1,..., X_n, \tilde{\varphi}X_1,..., \tilde{\varphi}X_n, \xi\}$ bir lokal ortogonal $\tilde{\varphi}$ -bazı kurulabilir. Aynı prosedür takip edilerek, $\tilde{\kappa}\, ve\; \tilde{\mu}$ nün sabit ve $\tilde{\nu}$ nün de sıfır fonksiyonu olduğu görülebilir. □

Uyarı 5.1.1: $\tilde{\kappa} = -1$ için (5.1.7) den $\tilde{h}^2 = 0$ elde edilir. $\tilde{g}$ metriği pozitif tanımlı olmadığından $\tilde{h} = 0$ ve manifold para-Sasakian dır denilemez. O halde akla şu soru gelebilir. Boyutu 3 den büyük olan ve $\tilde{h}^2 = 0$ şartını sağlayan fakat $\tilde{h} \neq 0$ olan bir $(-1, \tilde{\mu})$-paradeğme metrik manifold var mıdır? Aşağıdaki örnek ile Cappelleti Montano ve Di Terlizzi, 5 boyut için olumlu bir cevap verilmiştir

Örnek 5.1.1: g, X_1, X_2, Y_1, Y_2, ξ bazı ile verilen 5-boyutlu bir Lie cebiri olsun ve sıfırdan farklı Lie braketleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$[X_1, X_2] = 2X_2, [X_1, Y_1] = 2\xi, [X_2, Y_1] = -2Y_2,$$

$$[X_2, Y_2] = 2(Y_1 + \xi), [\xi, X_1] = -2Y_1, [\xi, X_2] = -2Y_2$$

G, Lie cebiri g olan bir Lie grubu olsun. G de tüm $i, j \in \{1,2\}$ için

$$\tilde{\varphi}\xi = 0 \; ve \; \tilde{\varphi}X_i = X_i, \; \tilde{\varphi}Y_i = -Y_i, \; \eta(X_i) = \eta(Y_i) = 0, \eta(\xi) = 1 ve$$
$$\tilde{g}(X_i, X_j) = \tilde{g}(Y_i, Y_j) = 0, \tilde{g}(X_i, Y_i) = 1, \tilde{g}(X_1, Y_2) = \tilde{g}(X_2, Y_1) = 0$$

olacak şekilde bir $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ sol-invaryant paradeğme metrik yapısı tanımlansın. Basit hesaplamalar sonucunda, $\tilde{h}X_1 = -Y_1$ olduğundan, $\tilde{h}^2 = 0$ olup $\tilde{h} \neq 0$ şartının sağlandığı görülebilir. Ayrıca, $\tilde{\kappa} = -1$, $\tilde{\mu} = 2$ olan bir paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifold elde edilmiş olunur (Cappelleti Montano ve Di Terlizzi 2010).

(κ, μ, ν)-değme metrik durumu için (Koufogiorgos ve ark. 2008) manifoldun boyutunun 3 den büyük olması durumunda ya Sasakian ya da (κ, μ)-değme metrik olması gerektiğini ispatlamışlardır. Aşağıdaki örnek 5 boyutta $\tilde{h}^2 = 0$ olup $\tilde{h} \neq 0$ olan ilk $(-1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \neq 0)$-paradeğme manifold örneğidir.

Örnek 5.1.2: $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, \xi\}$ bazı ile verilen 5-boyutlu Lie cebiri g olsun. Lie bracketleri

$$[\xi, X_1] = Y_1, \qquad [X_1, X_2] = -\frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2, \quad [\xi, X_2] = Y_2,$$
$$[\xi, X_2] = Y_2, \qquad [X_1, Y_2] = -\frac{2}{3}Y_1 - \frac{1}{3}Y_2, \qquad [X_2, Y_2] = \frac{2}{3}Y_1 - Y_2 - 2\xi,$$
$$[X_1, Y_1] = 2\xi - Y_1, \quad [\xi, Y_1] = 0, \quad [Y_1, Y_2] = 0, \qquad [Y_1, X_2] = \frac{1}{3}Y_1$$

ile tanımlıdır. G**,** Lie cebiri g olan Lie grup olmak üzere, G üzerinde $(\tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$ sol invaryant paradeğme metrik yapısı

$\tilde{g}(\xi, \xi) = \tilde{g}(X_1, Y_1) = 1, \tilde{g}(X_2, Y_2) = -1 \;\; (i = 1,2)$ ve

$\tilde{\varphi}\xi = 0,\ \tilde{\varphi}X_i = X_i,\ \tilde{\varphi}Y_i = -Y_i,\ \eta(\xi) = 1, \eta(X_i) = \eta(Y_i) = 0$ verilsin. Burada $\tilde{h}X_i = Y_i,\ \tilde{h}Y_i = 0, i = 1,2.$ Böylece $(\mathrm{G}, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$, $\tilde{h}^2 = 0,\ \tilde{h} \neq 0$ *ve* $rank(\tilde{h}) = 2$ olan $\tilde{\kappa} = -1,\ \tilde{\mu} = -1,\ \tilde{\nu} = -3$ olacak şekilde paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold dur (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

5.2. 3-boyutlu Paradeğme Metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-Manifoldların Sınıflandırılması

Bu kısım, 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifoldların sınıflandırılmasına ayrılmıştır. Ayrıca 3-boyutlu paradeğme metrik manifoldlar için ξ karakteristik vektör alanının harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şartın ξ karakteristik vektör alanının, Ricci operatörünün bir karakteristik vektörü olması gerektiği ispatlanmıştır. Ayrıca yine 3-boyutlu M paradeğme metrik manifoldunun karakteristik vektör alanı ξ harmonik ise, M, M nin her açık ve yoğun alt cümlesinde paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold olduğu ve tersine eğer M bir paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold ise M nin karakteristik vektör alanı ξ harmonik olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bu bölümde, $\tilde{\kappa} = -1$ olan paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifoldların para-Sasakian manifold olması gerekmediği gösterilmiştir. Böylelikle, değme Riemann durumu ile fark ortaya konulmuştur.

Riemann iç çarpımı ile verilen lineer dönüşüme karşılık gelen matris her zaman diagonelleşebilir. Fakat yarı-Riemann iç çarpımı ile verilen lineer dönüşüme karşılık gelen matris her zaman diagonelleşemez (Petrov 1969).

Özellikle, M_1^3 Lorentz tipindeki manifolda indirgenen $\tilde{g}$ metriğinin matris gösterimi, yani M_1^3 in A lineer operatörü, $T_pM_1^3$ de $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatısına göre aşağıdaki 4 formdan birine konulabilir. Burada $T_pM_1^3, M$ nin p noktasındaki tanjant uzayıdır (Magid 1985).

$$(I) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(II) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(III) \qquad A = \begin{pmatrix} \gamma & -\lambda & 0 \\ \lambda & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0$$

$$(IV) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(I) ve (III) durumlarının $\tilde{g}$ matrislerine $T_pM_1^3$ in bir ortonormal bazı karşılık gelirken, (II) ve (IV) durumlarının $\tilde{g}$ matrislerine $T_pM_1^3$ in bir yarı-ortonormal bazı $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\tilde{g}(e_1,e_1) = \tilde{g}(e_2,e_2) = \tilde{g}(e_1,e_3) = \tilde{g}(e_2,e_3) = 0$ ve $\tilde{g}(e_1,e_2) = \tilde{g}(e_3,e_3) = 1$ olacak şekilde karşılık gelir.

3-boyutlu yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörü aşağıdaki eşitliği sağlar (O'Neill 1983).

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)Z &= \tilde{g}(Y,Z)\tilde{Q}X - \tilde{g}(X,Z)\tilde{Q}Y + \tilde{g}(\tilde{Q}Y,Z)X - \tilde{g}(\tilde{Q}X,Z)Y \\ &\quad - \frac{r}{2}(\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

$\widetilde{h}$ **tensörü kanonikal form (I) e sahip olsun.** $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. M manifoldunun

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \left\{ p \in M \,\middle|\, \widetilde{h}(p) \neq 0 \right\} \subset M \\
U_2 &= \left\{ p \in M \,\middle|\, \widetilde{h}(p) = 0,\ p\, nin\ bir\ kom. \right\} \subset M
\end{aligned}
$$

olacak şekilde U_1 ve U_2 açık alt cümleleri göz önüne alınsın.

$\widetilde{h}$ nın M de diferensiyellenebilir fonksiyon olmasından dolayı, $U_1 \cup U_2$, M nin açık ve yoğun alt cümlesi olur. Böylece $U_1 \cup U_2$ de sağlanan her özellik M de de sağlanır.

Herhangi $p \in U_1 \cup U_2$ noktası için, p nin bir komşuluğundaki $\widetilde{h}$ nın özvektörlerinin bir lokal ortonormal $\{\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\xi\}$ $\widetilde{\varphi}$-bazı, $-\widetilde{g}(\widetilde{e},\widetilde{e}) = \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e}) = \widetilde{g}(\xi,\xi) = 1$ olacak şekilde vardır. U_1 de $\widetilde{\lambda}$ sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $\widetilde{h}\widetilde{e} = \widetilde{\lambda}\widetilde{e}$ yazılırsa, $iz\widetilde{h} = 0$ olduğundan $\widetilde{h}\widetilde{\varphi}\widetilde{e} = -\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}$ elde edilir. $\widetilde{\lambda}$ özdeğer fonksiyonu M de süreklidir ve $U_1 \cup U_2$ de diferensiyellenebilirdir. Böylece $\widetilde{h}$, $\{\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\xi\}$ lokal ortonormal $\widetilde{\varphi}$-bazına göre aşağıdaki forma sahiptir.

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.2}
$$

Bu durumda, $\widetilde{h}$ operatörü h_1 tipindedir denilir.

Yardımcı Teorem 5.2.1: $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, $\widetilde{h}$ operatörü h_1 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde, M manifoldunun U_1 açık alt cümlesinde kovaryant türev için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$i)\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{e} = \tilde{a}\tilde{\varphi}\tilde{e}, \quad ii)\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e} = \tilde{a}\tilde{e} + (1-\tilde{\lambda})\xi, \; iii)\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\xi = (\tilde{\lambda}-1)\tilde{\varphi}\tilde{e},$$

$$iv)\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{e} = b'\tilde{\varphi}\tilde{e} - (\tilde{\lambda}+1)\xi, \; v)\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e} = b'\tilde{e}, \; vi)\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi = -(\tilde{\lambda}+1)\tilde{e},$$

$$vii)\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e} = b\tilde{\varphi}\tilde{e}, \; viii)\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\varphi}\tilde{e} = b\tilde{e}, \tag{5.2.3}$$

$$ix)[\tilde{e},\xi] = (\tilde{\lambda}-1-b)\tilde{\varphi}\tilde{e}, \; x)[\tilde{\varphi}\tilde{e},\xi] = (-\tilde{\lambda}-1-b)\tilde{e},$$

$$xi)[\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e}] = \tilde{a}\tilde{e} - b'\tilde{\varphi}\tilde{e} + 2\xi,$$

burada

$b = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e}), \; \tilde{a} = \dfrac{1}{2\tilde{\lambda}}\left[\tilde{\sigma}(\tilde{e}) - (\tilde{\varphi}\tilde{e})(\tilde{\lambda})\right], b' = -\dfrac{1}{2\tilde{\lambda}}\left[\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}) + \tilde{e}(\tilde{\lambda})\right], \; \tilde{\sigma} = S(\xi,\cdot)_{\ker\eta}$ dır

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Her X vektör alanı için $\tilde{\nabla}_X\xi$ kovaryant türevinin tanımından (3.4.5) de X yerine sırasıyla $\tilde{e}$ ve $\tilde{\varphi}\tilde{e}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\xi &= -\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{e} = -\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{\lambda}\tilde{\varphi}\tilde{e} = (\tilde{\lambda}-1)\tilde{\varphi}\tilde{e}, \\
\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi &= -\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{\varphi}\tilde{h}\tilde{\varphi}\tilde{e} = -\tilde{e} - \tilde{\lambda}\tilde{e} = -(\tilde{\lambda}+1)\tilde{e}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e} &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e},\tilde{e})\tilde{e} + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e},\xi)\xi \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $b = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e})$ olarak alınırsa $\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{e} = b\tilde{\varphi}\tilde{e}$ elde edilir. Benzer olarak, diğer kovaryant türevler kolayca hesaplanabilir.

(5.2.1) denkleminde $X = \tilde{e}, Y = \tilde{\varphi}\tilde{e}$ ve $Z = \xi$ olarak alınıp, $\tilde{\sigma}(X) = \tilde{g}(\tilde{Q}\xi, X)$ oluşu kullanılarak,

$$\widetilde{R}(\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\xi=-\widetilde{\sigma}(\widetilde{e})\widetilde{\varphi}\widetilde{e}+\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\widetilde{e} \tag{5.2.4}$$

bulunur.

$\widetilde{\nabla}_Y\xi=-\widetilde{\varphi}Y+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y$ nin diferensiyelinden elde edilen

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi=-(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi})Y+(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi})X+(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y-(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}\widetilde{h})X$$

denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\xi&=(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{h})\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{h})\widetilde{e}\\&=\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\,\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\,\widetilde{e}+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}\widetilde{e}\\&=\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}(-\widetilde{\lambda}\widetilde{e})-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}(\widetilde{a}\widetilde{e}+(1-\widetilde{\lambda})\xi)-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}(\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\widetilde{e})+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}(b'\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-(\widetilde{\lambda}+1)\xi)\\&=-\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})\widetilde{e}-\widetilde{\lambda}(\widetilde{a}\widetilde{\varphi}\widetilde{e})-\widetilde{\varphi}\widetilde{h}(\widetilde{a}\widetilde{e}+(1-\widetilde{\lambda})\xi)-\widetilde{\varphi}\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-\widetilde{\lambda}(b'\widetilde{e})\\&\quad+\widetilde{\varphi}\widetilde{h}(b'\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-(\widetilde{\lambda}+1)\xi)\\&=(-\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})-2b'\widetilde{\lambda})\widetilde{e}+(-\widetilde{\varphi}\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})-2\widetilde{a}\widetilde{\lambda})\widetilde{\varphi}\widetilde{e}\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

yazılır. O halde, (5.2.4) ve (5.2.5) eşitliklerinden

$$-\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})-2b'\widetilde{\lambda}=\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e}),\;\;\widetilde{\varphi}\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})+2\widetilde{a}\widetilde{\lambda}=\widetilde{\sigma}(\widetilde{e})$$

elde edilir. Bundan dolayı b' *ve* $\widetilde{a}$ fonksiyonları

$$\widetilde{a}=\frac{1}{2\widetilde{\lambda}}\left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{e})-(\widetilde{\varphi}\widetilde{e})(\widetilde{\lambda})\right],\;\;b'=-\frac{1}{2\widetilde{\lambda}}\left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e})+\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})\right]$$

şeklinde yazılabilir. □

Önerme 5.2.1: $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, $\widetilde{h}$ operatörü h_1 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde, M manifoldunun U_1 açık altcümlesinde

$$\widetilde{\nabla}_\xi\widetilde{h}=-2b\widetilde{h}\widetilde{\varphi}+\xi(\widetilde{\lambda})s \tag{5.2.6}$$

eşitliği geçerlidir. Burada s, $s\xi = 0$, $s\tilde{e} = \tilde{e}$, $s\tilde{\varphi}\tilde{e} = -\tilde{\varphi}\tilde{e}$ olacak şekilde tanımlı bir (1,1)-tipinde bir tensör alanıdır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Öncelikle $\tilde{h}$ operatörünün ξ vektör alanı yönündeki değişimi incelensin. O halde (5.2.3) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h})\tilde{e} &= \tilde{\nabla}_\xi \tilde{h}\tilde{e} - \tilde{h}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{e}) \\ &= 2\tilde{\lambda} b\tilde{\varphi}\tilde{e} + \xi(\tilde{\lambda})\tilde{e} \\ &= (-2b\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s)\tilde{e}\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

ve

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h})\tilde{\varphi}\tilde{e} &= \tilde{\nabla}_\xi \tilde{h}\tilde{\varphi}\tilde{e} - \tilde{h}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{\varphi}\tilde{e}) \\ &= -2\tilde{\lambda} b\tilde{e} - \xi(\tilde{\lambda})\tilde{\varphi}\tilde{e} \\ &= (-2b\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s)\tilde{\varphi}\tilde{e}\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

hesaplanır. Bunlara ilaveten,

$$(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h})\xi = 0 = (-2b\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s)\xi \tag{5.2.9}$$

olduğu açıktır. Böylece (5.2.7), (5.2.8) ve (5.2.9) dan istenilen eşitlik elde edilir. □

Uyarı 5.2.1: U_2 açık alt cümlesinde $\tilde{h} = 0$ olduğundan $\xi(\tilde{\lambda})s = \tilde{\nabla}_\xi \tilde{h} = 0$ olacaktır.

Önerme 5.2.2: $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_1 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde M üzerinde aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\tilde{h}^2 - \tilde{\varphi}^2 = \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2 \tag{5.2.10}$$

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Sonuç 3.6.1 den $\tilde{S}(\xi,\xi) = -2 + izh^2 = 2(\tilde{\lambda}^2 - 1)$ olur. İspatı tamamlamak için $\tilde{h}^2 - \tilde{\varphi}^2$ ifadesinin baz elemanlarına göre değerleri hesaplansın. Gerçekten,

$$\tilde{h}^2\tilde{e}-\tilde{\varphi}^2\tilde{e}=\tilde{\lambda}^2\tilde{e}-\tilde{e}=\frac{2}{2}(\tilde{\lambda}^2-1)\tilde{e}=\frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}$$

ve

$$\tilde{h}^2\tilde{\varphi}\tilde{e}-\tilde{\varphi}^3\tilde{e}=\tilde{\lambda}^2\tilde{\varphi}\tilde{e}-\tilde{\varphi}\tilde{e}=\frac{2}{2}(\tilde{\lambda}^2-1)\tilde{\varphi}\tilde{e}=\frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\tilde{\varphi}\tilde{e}$$

dır. Ayrıca, $\tilde{h}^2\xi-\tilde{\varphi}^2\xi=\frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\xi=0$ olacağından bulunan bu son denklemlerden ispat tamamlanır. □

Yardımcı Teorem 5.2.2: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_1 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde $\tilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\tilde{Q}=a_1I+b_1\eta\otimes\xi-\tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_\xi\tilde{h})+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}^2)\otimes\xi-\tilde{\sigma}(\tilde{e})\eta\otimes\tilde{e}+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\eta\otimes\tilde{\varphi}\tilde{e} \tag{5.2.11}$$

eşitliğini sağlar. Burada a_1 ve b_1 diferensiyellenebilir fonksiyonları, sırasıyla, $a_1=1-\tilde{\lambda}^2+\frac{r}{2}$ ve $b_1=3(\tilde{\lambda}^2-1)-\frac{r}{2}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrıca $\tilde{Q}$ Ricci operatörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}\xi&=(a_1+b_1)\xi-\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{e}+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e},\\
\tilde{Q}\tilde{e}&=\tilde{\sigma}(\tilde{e})\xi+(a_1-2b\tilde{\lambda})\tilde{e}-\xi(\tilde{\lambda})\tilde{\varphi}\tilde{e},\\
\tilde{Q}\tilde{\varphi}\tilde{e}&=\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\xi+\xi(\tilde{\lambda})\tilde{e}+(a_1+2b\tilde{\lambda})\tilde{\varphi}\tilde{e}.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

şeklindedir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.2.1) den herhangi X vektör alanı için

$$\tilde{l}X=\tilde{R}(X,\xi)\xi=\tilde{S}(\xi,\xi)X-\tilde{S}(X,\xi)\xi+\tilde{Q}X-\eta(X)\tilde{Q}\xi-\frac{r}{2}(X-\eta(X)\xi),$$

elde edilir. (3.6.1) denklemi kullanılarak son denklem

$$\widetilde{Q}X = -\widetilde{\varphi}^2 X + \widetilde{h}^2 X - \widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{h})X - \widetilde{S}(\xi,\xi)X + \widetilde{S}(X,\xi)\xi + \eta(X)\widetilde{Q}\xi + \frac{r}{2}(X - \eta(X)\xi)$$

halini alır.

$\widetilde{S}(X,\xi) = \widetilde{S}(\widetilde{\varphi}^2 X,\xi) + \eta(X)\widetilde{S}(\xi,\xi)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}X &= \frac{\widetilde{S}(\xi,\xi)}{2}\widetilde{\varphi}^2 X - \widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{h})X - \widetilde{S}(\xi,\xi)X + \widetilde{S}(\widetilde{\varphi}^2 X,\xi)\xi \\ &\quad + \eta(X)\widetilde{S}(\xi,\xi)\xi + \eta(X)\widetilde{Q}\xi + \frac{r}{2}\widetilde{\varphi}^2 X\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

denklemi elde edilir.

$$\widetilde{Q}\xi = -\widetilde{\sigma}(\widetilde{e})\widetilde{e} + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\widetilde{\varphi}\widetilde{e} + \widetilde{S}(\xi,\xi)\xi \tag{5.2.14}$$

denkleminin var olduğu kolayca görülebilir.

(5.2.14) denklemi (5.2.13) de kullanılırsa, herhangi X vektör alanı için

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}X &= \left(1 - \widetilde{\lambda}^2 + \frac{r}{2}\right)X + \left(3(\widetilde{\lambda}^2 - 1) - \frac{r}{2}\right)\eta(X)\xi - \widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{h})X + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}^2 X)\xi \\ &\quad - \eta(X)\widetilde{\sigma}(\widetilde{e})\widetilde{e} + \eta(X)\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\widetilde{\varphi}\widetilde{e}\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

elde edilir. Böylece, (5.2.15) den ispat görülür. (5.2.12) denklemi (5.2.6) ve (5.2.15) den kolayca elde edilebilir. □

$\widetilde{h}$ **tensörü kanonikal form (II) ye sahip olsun.** $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. p, M manifoldunun bir noktası olsun. p nin bir komşuluğunda bir lokal yarı-ortonormal $\{e_1,e_2,\xi\}$ bazı $\widetilde{g}(e_1,e_1) = \widetilde{g}(e_2,e_2) = \widetilde{g}(e_1,\xi) = \widetilde{g}(e_2,\xi) = 0$ ve $\widetilde{g}(e_1,e_2) = 1$ olacak şekilde vardır.

Yardımcı Teorem 5.2.3: U, M nin $\tilde{h} \neq 0$ olacak şekilde bir açık alt cümlesi olsun. Her $p \in U$ için p nin bir komşuluğunda

$$\tilde{h}e_1 = e_2, \tilde{h}e_2 = 0, \tilde{h}\xi = 0 \, ve \, \tilde{\varphi}e_1 = \pm e_1, \ \tilde{\varphi}e_2 = \mp e_2$$

eşitlikleri geçerlidir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: $\tilde{h}$ tensörü bir yarı-ortonormal $\{e_1, e_2, \xi\}$ bazına göre kanonikal form (II) ye sahip olduğundan

$\tilde{h}e_1 = \tilde{\lambda}e_1 + e_2, \tilde{h}e_2 = \tilde{\lambda}e_2, \tilde{h}\xi = 0$ olur. $\tilde{h}\xi = 0$ ve $\mathrm{iz}(\tilde{h}) = 0$ olduğundan $\tilde{\lambda} = 0$ bulunur. Diğer yandan, (1,1) tipindeki $\tilde{\varphi}$ tensör alanının yarı-ortonormal $\{e_1, e_2, \xi\}$ bazına göre anti-simetrik oluşu kullanılırsa

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{11} & \tilde{\varphi}_{12} & 0 \\ \tilde{\varphi}_{21} & \tilde{\varphi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.16}$$

yazılır.

Bu durumda, (3.2.2) ve (5.2.16) denklemleri kullanılarak

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}e_1, e_1) = 0 = \tilde{\varphi}_{21} \ ve \ \tilde{g}(\tilde{\varphi}e_2, e_2) = 0 = \tilde{\varphi}_{12},$$
$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}e_1, e_2) = \tilde{\varphi}_{11} = -\tilde{g}(\tilde{\varphi}e_2, e_1) = 0 = -\tilde{\varphi}_{22}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}e_1, \tilde{\varphi}e_2) = \tilde{\varphi}_{11} \, \tilde{\varphi}_{22} = -\, \tilde{g}(e_1, e_2) = 1$$

elde edilir. Son iki denklemden $\tilde{\varphi}e_2 = \mp 1$ bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

. .

□

Böylece $\widetilde{h}$, $\{e_1, e_2, \xi\}$ lokal ortonormal $\widetilde{\varphi}$-bazına göre

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formuna sahiptir. Bu durumda, $\widetilde{h}$ operatörü h_2 tipindedir denilir.

Uyarı 5.2.2: Genelliği bozmadan $\widetilde{\varphi} e_1 = e_1$, $\widetilde{\varphi} e_2 = -e_2$ olduğu kabul edilebilir. Ayrıca, $\widetilde{h} \neq 0$ *iken* $\widetilde{h}^2 = 0$ elde edilebilir.

Yardımcı Teorem 5.2.4: $(M, \widetilde{\varphi}, \xi, \eta, \widetilde{g})$, $\widetilde{h}$ operatörü h_2 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde, M manifoldunun U açık alt cümlesinde kovaryant türev için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$i)\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -b_2 e_1 + \xi, \quad ii)\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 = b_2 e_2 + \xi, \quad iii)\widetilde{\nabla}_{e_1} \xi = -e_1 - e_2,$$

$$iv)\widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 = -\widetilde{b}_2 e_1 - \xi, \quad v)\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \widetilde{b}_2 e_2, \quad vi)\widetilde{\nabla}_{e_2} \xi = e_2,$$

$$vii)\widetilde{\nabla}_{\xi} e_1 = a_2 e_1, \quad viii)\widetilde{\nabla}_{\xi} e_2 = -a_2 e_2, \tag{5.2.17}$$

$$ix)[e_1, \xi] = -(1 + a_2) e_1 - e_2, \quad x)[e_2, \xi] = (1 + a_2) e_2,$$

$$xi)[e_1, e_2] = \widetilde{b}_2 e_1 + b_2 e_2 + 2\xi,$$

burada $a_2 = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\xi} e_1, e_2)$, $b_2 = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2, e_1)$, $\widetilde{b}_2 = -\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}(e_1) = -\frac{1}{2}\widetilde{S}(\xi, e_1)$ dır

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: $\widetilde{\nabla}_X \xi = -\widetilde{\varphi}X + \widetilde{\varphi}\widetilde{h}X$ denkleminde X yerine sırasıyla e_1 ve e_2 alınırsa iii) ve vi) denklemleri elde edilir.

viii) nın ispatı için

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_\xi e_2 &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi e_2, e_2)e_1 + \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi e_2, e_1)e_2 + \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi e_2, \xi)\xi \\ &= -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi e_1, e_2)e_2\end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada $a_2 = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi e_1, e_2)$ olarak tanımlanırsa $\widetilde{\nabla}_\xi e_2 = -a_2 e_2$ elde edilir. Benzer olarak, diğer kovaryant türevler kolayca hesaplanabilir.

(5.2.1) denkleminde $X = e_1,\ Y = e_2\ \ ve\ \ Z = \xi$ olarak alınıp, $\widetilde{\sigma}(X) = \widetilde{g}(\widetilde{Q}\xi, X)$ oluşu kullanılarak,

$$\widetilde{R}(e_1, e_2)\xi = -\widetilde{\sigma}(e_1)e_2 + \widetilde{\sigma}(e_2)e_1 \tag{5.2.18}$$

bulunur.

Diğer yandan, $\widetilde{\nabla}_Y \xi = -\widetilde{\varphi}Y + \widetilde{\varphi}\widetilde{h}Y$ nin diferensiyelinden elde edilen

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = -(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi})Y + (\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\varphi})X + (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\varphi}\widetilde{h})Y - (\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\varphi}\widetilde{h})X$$

denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_1, e_2)\xi &= (\widetilde{\nabla}_{e_1} \widetilde{\varphi}\widetilde{h})e_2 - (\widetilde{\nabla}_{e_2} \widetilde{\varphi}\widetilde{h})e_1 \\ &= 2\widetilde{b}_2 e_2\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

yazılır. O halde, (5.2.18) ve (5.2.19) eşitlikleri kıyaslanırsa

$$\widetilde{\sigma}(e_1) = -2\widetilde{b}_2,\ \ \widetilde{\sigma}(e_2) = 0 = \widetilde{S}(\xi, e_2) \tag{5.2.20}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\widetilde{b}_2$ fonksiyonu (5.2.20) den görülür. □

Önerme 5.2.3: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_2 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde M manifoldunun U açık altcümlesinde,

$$\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h} = 2a_2\tilde{\varphi}\tilde{h} \tag{5.2.21}$$

eşitliği geçerlidir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.2.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})\xi &= 0 = (2a_2\tilde{\varphi}\tilde{h})\xi, \\
(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})e_1 &= -2a_2e_2 = (2a_2\tilde{\varphi}\tilde{h})e_1, \\
(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})e_2 &= 0 = (2a_2\tilde{\varphi}\tilde{h})e_2
\end{aligned}$$

olur. Böylece bulunan bu son denklemlerden istenilen eşitlik elde edilir.

Sonuç 3.6.1 den $\tilde{S}(\xi,\xi) = -2$ olur. $\tilde{h}^2 - \tilde{\varphi}^2$ ifadesinin baz elemanlarına göre değerleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}^2\xi - \tilde{\varphi}^2\xi &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\xi = 0, \\
\tilde{h}^2e_1 - \tilde{\varphi}^2e_1 &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2e_1, \\
\tilde{h}^2e_2 - \tilde{\varphi}^2e_2 &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2e_2
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

elde edilir. □

O halde aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.2.4: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_2 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde M üzerinde aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\tilde{h}^2 - \tilde{\varphi}^2 = \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2 \tag{5.2.23}$$

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Yardımcı Teorem 5.2.5: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_2 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde $\tilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\tilde{Q} = \ddot{a}I + \ddot{b}\eta \otimes \xi - \tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h}) + \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}^2) \otimes \xi + \tilde{\sigma}(e_1)\eta \otimes e_2 \tag{5.2.24}$$

eşitliği ile verilir. Burada $\ddot{a}$ ve $\ddot{b}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları, sırasıyla, $\ddot{a} = 1 + \frac{r}{2}$ ve $\ddot{b} = -3 - \frac{r}{2}$ şeklinde tanımlanmıştır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Herhangi X vektör alanı için 3-boyutta geçerli olan

$$\tilde{l}X = \tilde{R}(X,\xi)\xi = \tilde{S}(\xi,\xi)X - \tilde{S}(X,\xi)\xi + \tilde{Q}X - \eta(X)\tilde{Q}\xi - \frac{r}{2}(X - \eta(X)\xi),$$

denkleminde (3.6.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{Q}X &= -\tilde{\varphi}^2 X + \tilde{h}^2 X - \tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})X - \tilde{S}(\xi,\xi)X + \tilde{S}(X,\xi)\xi \\ &\quad + \eta(X)\tilde{Q}\xi + \frac{r}{2}(X - \eta(X)\xi)\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

elde edilir.

$\tilde{\varphi}^2 = I - \eta \otimes \xi$ eşitliğinden yararlanılarak bulunan $\tilde{S}(X,\xi) = \tilde{S}(\tilde{\varphi}^2 X,\xi) + \eta(X)\tilde{S}(\xi,\xi)$ denklemi (5.2.26) da kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{Q}X &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2 X - \tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})X - \tilde{S}(\xi,\xi)X + \tilde{S}(\tilde{\varphi}^2 X,\xi)\xi + \eta(X)\tilde{S}(\xi,\xi)\xi \\ &\quad + \eta(X)\tilde{Q}\xi + \frac{r}{2}\tilde{\varphi}^2 X\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

denklemi elde edilir.

Yarı-ortonormal $\{e_1, e_2, \xi\}$ bazı ve (5.2.20) denkleminin kullanılmasıyla

$$\widetilde{Q}\xi = \widetilde{\sigma}(e_1)e_2 + \widetilde{S}(\xi,\xi)\xi \tag{5.2.27}$$

denkleminin var olduğu kolayca görülebilir.

(5.2.27) denklemi (5.2.26) de kullanılırsa, herhangi X vektör alanı için

$$\widetilde{Q}X = \left(1+\frac{r}{2}\right)X + \left(-3-\frac{r}{2}\right)\eta(X)\xi - \widetilde{\varphi}(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{h})X + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}^{2}X)\xi + \eta(X)\widetilde{\sigma}(e_1)e_2 \tag{5.2.28}$$

elde edilir. Böylece, (5.2.28) dan ispat görülür. □

Yardımcı Teorem 5.2.5 in bir sonucu olarak $\widetilde{Q}$ Ricci operatörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}\xi &= (\ddot{a}+\ddot{b})\xi + \widetilde{\sigma}(e_1)e_2, \\ \widetilde{Q}e_1 &= \widetilde{\sigma}(e_1)\xi + \ddot{a}e_1 - 2ae_2, \\ \widetilde{Q}e_2 &= \ddot{a}e_2 \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

ile verilebilir.

$\widetilde{h}$ **tensörü kanonikal form (III) e sahip olsun.** $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold ve p de M nin bir noktası olsun. p nin bir komşuluğunda bir lokal ortonormal $\{\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\xi\}$ $\widetilde{\varphi}$-bazı $-\widetilde{g}(\widetilde{e},\widetilde{e}) = \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e}) = \widetilde{g}(\xi,\xi) = 1$ olacak şekilde vardır. $U_1, \widetilde{h} \neq 0$ olduğu M nin bir açık alt cümlesidir. U_2 de p nin bir komşuluğundaki $\widetilde{h} = 0$ olan $p \in M$ noktalarının bir açık alt cümlesidir. $U_1 \cup U_2$, M nin bir açık alt cümlesidir.

Her $p \in U_1$ için, p nin bir açık komşuluğu, $\widetilde{\lambda}$ sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $\widetilde{h}\widetilde{e} = \widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}$, $\widetilde{h}\widetilde{\varphi}\widetilde{e} = -\widetilde{\lambda}\widetilde{e}$ ve $\widetilde{h}\xi = 0$ olacak şekilde vardır. $iz\widetilde{h} = 0$ olduğundan $\widetilde{h}$, $\{\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\xi\}$ lokal ortonormal $\widetilde{\varphi}$-bazına göre aşağıdaki forma sahiptir.

$$\widetilde{h}=\begin{pmatrix}0 & -\widetilde{\lambda} & 0\\ \widetilde{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.2.30}$$

Bu durumda, $\widetilde{h}$ operatörü h_3 tipindedir denilir.

Yardımcı Teorem 5.2.6: $(M,\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, $\widetilde{h}$ operatörü h_3 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde, M manifoldunun U_1 açık alt cümlesinde kovaryant türev için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$i)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}\widetilde{e}=a_3\widetilde{\varphi}\widetilde{e}+\widetilde{\lambda}\xi,\quad ii)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}=a_3\widetilde{e}+\xi,\quad iii)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}}\xi=-\widetilde{\varphi}\widetilde{e}+\widetilde{\lambda}\widetilde{e},$$

$$iv)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}\widetilde{e}=b_3\widetilde{\varphi}\widetilde{e}-\xi,\quad v)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}=b_3\widetilde{e}+\widetilde{\lambda}\xi,\quad vi)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}}\xi=-\widetilde{e}-\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\widetilde{e},$$

$$vii)\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{e}=\widetilde{b}_3\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\quad viii)\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}=\widetilde{b}_3\widetilde{e}, \tag{5.2.31}$$

$$ix)[\widetilde{e},\xi]=\widetilde{\lambda}\widetilde{e}-(1+\widetilde{b}_3)\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\quad x)[\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\xi]=-(1+\widetilde{b}_3)\widetilde{e}-\widetilde{\lambda}\widetilde{\varphi}\widetilde{e},$$

$$xi)[\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e}]=a_3\widetilde{e}-b_3\widetilde{\varphi}\widetilde{e}+2\xi,$$

burada

$\widetilde{b}_3=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e})$, $b_3=\dfrac{1}{2\widetilde{\lambda}}\left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{e})-(\widetilde{e})(\widetilde{\lambda})\right]$, $a_3=-\dfrac{1}{2\widetilde{\lambda}}\left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e})+\widetilde{\varphi}\widetilde{e}(\widetilde{\lambda})\right]$, $\widetilde{\sigma}=S(\xi,\cdot)_{\ker\eta}$ dır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Her X vektör alanı için $\widetilde{\nabla}_X\xi$ kovaryant türevinin tanımından (3.4.5) de X yerine sırasıyla $\widetilde{e}$ ve $\widetilde{\varphi}\widetilde{e}$ alınırsa iii) ve vi) görülür.

bulunur. viii) nin ispatı için,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{\varphi}e&=-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\widetilde{e})\widetilde{e}+\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\widetilde{\varphi}\widetilde{e}+\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{\varphi}\widetilde{e},\xi)\xi\\&=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{e},\widetilde{\varphi}\widetilde{e})\widetilde{e}\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\tilde{b}_3 = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{e}, \tilde{\varphi}\tilde{e})$ olarak alınırsa $\tilde{\nabla}_\xi \tilde{\varphi} e = \tilde{b}_3 \tilde{e}$ elde edilir. Benzer olarak, diğer kovaryant türevler kolayca hesaplanabilir.

(5.2.1) denkleminde $X = \tilde{e}$, $Y = \tilde{\varphi}\tilde{e}$ ve $Z = \xi$ olarak alınırsa,

$$\tilde{R}(\tilde{e}, \tilde{\varphi}\tilde{e})\xi = -\tilde{g}(\tilde{Q}\tilde{e}, \xi)\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{g}(\tilde{Q}\tilde{\varphi}\tilde{e}, \xi)\tilde{e}$$

bulunur.

$\tilde{\sigma}(X) = \tilde{g}(\tilde{Q}\xi, X)$ oluşu kullanılarak,

$$\tilde{R}(\tilde{e}, \tilde{\varphi}\tilde{e})\xi = -\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{e} \tag{5.2.32}$$

elde edilir.

$\tilde{\nabla}_Y \xi = -\tilde{\varphi} Y + \tilde{\varphi}\tilde{h} Y$ nin diferensiyelinden elde edilen

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = -(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi})Y + (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi})X + (\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi}\tilde{h})Y - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\varphi}\tilde{h})X$$

denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{e}, \tilde{\varphi}\tilde{e})\xi &= (\tilde{\nabla}_{\tilde{e}} \tilde{\varphi}\tilde{h})\tilde{\varphi}\tilde{e} - (\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}} \tilde{\varphi}\tilde{h})\tilde{e} \\ &= (-2a_3\tilde{\lambda} - \tilde{\varphi}\tilde{e}(\tilde{\lambda}))\tilde{e} + (-2b_3\tilde{\lambda} - \tilde{e}(\tilde{\lambda}))\tilde{\varphi}\tilde{e} \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

yazılır. O halde, (5.2.32) ve (5.2.33) eşitliklerinden

$$-\tilde{\varphi}\tilde{e}(\tilde{\lambda}) - 2a_3\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}), \ \tilde{e}(\tilde{\lambda}) + 2b_3\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}(\tilde{e})$$

elde edilir. Bundan dolayı b_3 ve a_3 fonksiyonları

$$b_3 = \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\left[\tilde{\sigma}(\tilde{e}) - (\tilde{e})(\tilde{\lambda})\right], a_3 = -\frac{1}{2\tilde{\lambda}}\left[\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}) + \tilde{\varphi}\tilde{e}(\tilde{\lambda})\right]$$

şeklinde yazılabilir. □

Önerme 5.2.5: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_3 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde, M manifoldunun U_1 açık alt cümlesinde

$$\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h} = -2\tilde{b}_3\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s \tag{5.2.34}$$

eşitliği geçerlidir. Burada s, $s\xi = 0$, $s\tilde{e} = \tilde{\varphi}\tilde{e}$, $s\tilde{\varphi}\tilde{e} = -\tilde{e}$ olacak şekilde tanımlı bir (1,1)-tipinde bir tensör alanıdır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Öncelikle $\tilde{h}$ operatörünün ξ vektör alanı yönündeki değişimi incelensin. O halde (5.2.31) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})\xi &= 0 = (-2\tilde{b}_3\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s)\xi,\\
(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})\tilde{e} &= 2\tilde{b}_3\tilde{\lambda}\tilde{e} + \xi(\tilde{\lambda})\tilde{\varphi}\tilde{e} = (-2\tilde{b}_3\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s)\tilde{e},\\
(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})\tilde{\varphi}\tilde{e} &= -2\tilde{b}_3\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}\tilde{e} - \xi(\tilde{\lambda})\tilde{e} = (-2\tilde{b}_3\tilde{h}\tilde{\varphi} + \xi(\tilde{\lambda})s)\tilde{\varphi}\tilde{e}
\end{aligned}$$

denklemleri bulunur ve ispat tamamlanır. □

Önerme 5.2.6: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_3 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde M üzerinde aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\tilde{h}^2 - \tilde{\varphi}^2 = \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2 \tag{5.2.35}$$

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Sonuç 3.6.1 den $\tilde{S}(\xi,\xi) = -2 + izh^2 = 2(\tilde{\lambda}^2 + 1)$ olur. İspatı tamamlamak için $\tilde{h}^2 - \tilde{\varphi}^2$ ifadesinin baz elemanlarına göre değerleri hesaplansın. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}^2\xi - \tilde{\varphi}^2\xi &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\xi = 0,\\
\tilde{h}^2\tilde{e} - \tilde{\varphi}^2\tilde{e} &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\tilde{e},\\
\tilde{h}^2\tilde{\varphi}\tilde{e} - \tilde{\varphi}^3\tilde{e} &= \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2\tilde{\varphi}\tilde{e}
\end{aligned} \tag{5.2.36}$$

bulunan bu son denklemlerden (5.2.35) denklemi elde edilir. □

Yardımcı Teorem 5.2.7: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, $\tilde{h}$ operatörü h_3 tipinde olan 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. O halde $\tilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\tilde{Q}=\bar{a}I+\bar{b}\,\eta\otimes\xi-\tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}^{2})\otimes\xi-\tilde{\sigma}(\tilde{e})\eta\otimes\tilde{e}+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\eta\otimes\tilde{\varphi}\tilde{e} \qquad (5.2.37)$$

eşitliğini sağlar. Burada $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları, sırasıyla, $\bar{a}=1+\tilde{\lambda}^{2}+\frac{r}{2}$ ve $\bar{b}=-3(\tilde{\lambda}^{2}+1)-\frac{r}{2}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrıca $\tilde{Q}$ Ricci operatörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}\xi=(\bar{a}+\bar{b})\xi-\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{e}+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e},\\
&\tilde{Q}\tilde{e}=\tilde{\sigma}(\tilde{e})\xi+(\bar{a}+\xi(\tilde{\lambda}))\tilde{e}-2\tilde{b}_{3}\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}\tilde{e},\\
&\tilde{Q}\tilde{\varphi}\tilde{e}=\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\xi+2\tilde{b}_{3}\tilde{\lambda}\tilde{e}+(\bar{a}+\xi(\tilde{\lambda}))\tilde{\varphi}\tilde{e}
\end{aligned} \qquad (5.2.38)$$

şeklindedir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.2.1) den herhangi X vektör alanı için

$$\tilde{l}X=\tilde{R}(X,\xi)\xi=\tilde{S}(\xi,\xi)X-\tilde{S}(X,\xi)\xi+\tilde{Q}X-\eta(X)\tilde{Q}\xi-\frac{r}{2}(X-\eta(X)\xi),$$

elde edilir. (3.6.1) denklemi kullanılarak son denklem

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}X=&-\tilde{\varphi}^{2}X+\tilde{h}^{2}X-\tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h})X-\tilde{S}(\xi,\xi)X+\tilde{S}(X,\xi)\xi\\
&+\eta(X)\tilde{Q}\xi+\frac{r}{2}(X-\eta(X)\xi)
\end{aligned} \qquad (5.2.39)$$

halini alır.

$\tilde{S}(X,\xi)=\tilde{S}(\tilde{\varphi}^{2}X,\xi)+\eta(X)\tilde{S}(\xi,\xi)$ olduğundan (5.2.39) denklemi

$$\tilde{Q}X = \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}\tilde{\varphi}^2 X - \tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h})X - \tilde{S}(\xi,\xi)X + \tilde{S}(\tilde{\varphi}^2 X,\xi)\xi + \eta(X)\tilde{S}(\xi,\xi)\xi$$
$$+\eta(X)\tilde{Q}\xi + \frac{r}{2}\tilde{\varphi}^2 X \tag{5.2.40}$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{S}$ Ricci tensörü $\{\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e},\xi\}$ ortonormal bazına göre

$$\tilde{Q}\xi = -\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{e} + \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e} + \tilde{S}(\xi,\xi)\xi \tag{5.2.41}$$

yazılır.

(5.2.41) denklemi (5.2.40) de kullanılırsa, herhangi X vektör alanı için

$$\tilde{Q}X = \left(1+\tilde{\lambda}^2+\frac{r}{2}\right)X + \left(-3(\tilde{\lambda}^2+1)-\frac{r}{2}\right)\eta(X)\xi - \tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_\xi \tilde{h})X + \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}^2 X)\xi$$
$$-\eta(X)\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{e} + \eta(X)\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e} \tag{5.2.42}$$

elde edilir. Böylece, (5.2.42) den ispat görülür. (5.2.38) denklemi (5.2.34) ve (5.2.42) den kolayca elde edilebilir. □

$\tilde{h}$ **tensörü kanonikal form (IV) e sahip olsun.** $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. p, M manifoldunun bir noktası olsun. p nin bir komşuluğunda bir lokal yarı-ortonormal $\{e_1,e_2,e_3\}$ bazı $\tilde{g}(e_1,e_1)=\tilde{g}(e_2,e_2)=\tilde{g}(e_1,e_3)=\tilde{g}(e_2,e_3)=0$ ve $\tilde{g}(e_1,e_2)=\tilde{g}(e_3,e_3)=1$ olacak şekilde vardır. $\tilde{h}$ tensörü kanonikal form (IV) e sahip olduğundan (bir yarı-ortonormal $\{e_1,e_2,e_3\}$ bazına göre) $\tilde{h}e_1=\tilde{\lambda}e_1+e_3$, $\tilde{h}e_2=\tilde{\lambda}e_2$ *ve* $\tilde{h}e_3=e_2+\tilde{\lambda}e_3$ eşitlikleri geçerlidir. $0=iz\tilde{h}=\tilde{g}(\tilde{h}e_1,e_2)+\tilde{g}(\tilde{h}e_2,e_1)+\tilde{g}(\tilde{h}e_3,e_3)=3\tilde{\lambda}$ olduğundan $\tilde{\lambda}=0$ elde edilir. Bir yarı-ortonormal $\{e_1,e_2,e_3\}$ bazına göre $\xi=\tilde{g}(\xi,e_2)e_1+\tilde{g}(\xi,e_1)e_2+\tilde{g}(\xi,e_3)e_3$ yazılabilir. $\tilde{h}\xi=0$ olduğundan $0=\tilde{g}(\xi,e_2)e_3+\tilde{g}(\xi,e_3)e_2$ bulunur. Böylece $\xi=\tilde{g}(\xi,e_1)e_2$ elde edilir ki bu da $1=\tilde{g}(\xi,\xi)$ olmasıyla çelişir. O halde bu durum söz konusu olmaz.

Teorem 5.2.1: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. ξ karakteristik vektör alanının harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şart ξ karakteristik vektör alanının, Ricci operatörünün bir karakteristik vektörü olmasıdır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Uygun bir (yarı)-ortonormal baza göre, $\tilde{h}$, aşağıda verilen 3 tane formdan birine dahil olabilir.

1. Durum: $\tilde{h}$, h_1 tipinde olsun.

(5.1.2) den

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla}\xi &= -\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\xi + \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{e}}\xi + \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi - \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi \\ &= -\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{e} + \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e} + 2(\tilde{\lambda}^2+1)\xi\end{aligned}$$

elde edilir. (5.1.3) ve (5.2.12) denklemleri kullanılarak

$$\tilde{\sigma}(\tilde{e}) = \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}) = 0 \quad ve \quad \tilde{Q}\xi = 2(\tilde{\lambda}^2-1)\xi$$

bulunur.

2. Durum: $\tilde{h}$, h_2 tipinde olsun.

Yarı-ortonormal $\{e_1,e_2,\xi\}$ bazından bir ortonormal $\{\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e},\xi\}$ bazı

$$\tilde{e} = \frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}},\ \tilde{\varphi}\tilde{e} = \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}},\ \tilde{g}(\tilde{e},\tilde{e}) = -1 \ ve\ \tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e}) = 1 \qquad (5.2.43)$$

olacak şekilde kurulabilir. Bu yeni baz sistemine göre $\tilde{h}$,

$$\tilde{h}\tilde{e} = \tilde{h}\tilde{\varphi}\tilde{e} = \frac{1}{2}(-\tilde{e}+\tilde{\varphi}\tilde{e}) \qquad (5.2.44)$$

şeklinde yazılabilir.

Yardımcı Teorem 5.2.4 kullanılarak

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-b_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(e_1))\tilde{\varphi}\tilde{e} + \frac{1}{2}\xi, \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2 + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(e_1))\tilde{e} + \frac{3}{2}\xi,$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\xi = \frac{\tilde{e} - 3\tilde{\varphi}\tilde{e}}{2}, \ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{e} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(e_1))\tilde{\varphi}\tilde{e} - \frac{1}{2}\xi, \tag{5.2.45}$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(e_1))\tilde{e} + \frac{1}{2}\xi, \ \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi = \frac{-\tilde{e} - \tilde{\varphi}\tilde{e}}{2},$$

(5.1.2) ve (5.2.45) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla}\xi &= -\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\xi + \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{e}}\xi + \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi - \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi \\ &= \frac{\tilde{\sigma}(e_1)}{\sqrt{2}}(\tilde{e} - \tilde{\varphi}\tilde{e}) + 2\xi\end{aligned} \tag{5.2.46}$$

bulunur.

(5.1.3) ve (5.2.46) dan $\tilde{\sigma}(e_1) = 0$ elde edilir. (5.2.29) denkleminden ξ karakteristik vektör alanının, Ricci operatörünün bir karakteristik vektörü olduğu görülür.

3. Durum: $\tilde{h}$, h_3 tipinde olsun.

(5.1.2) kullanılarak

$$\tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla}\xi = -\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\xi + \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{e}}\tilde{e}}\xi + \tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi - \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}}\tilde{\varphi}\tilde{e}}\xi$$

$$= -\tilde{\sigma}(\tilde{e})\tilde{e} + \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e} + 2(1 - \tilde{\lambda}^2)\xi$$

elde edilir.

(5.1.3) den $\tilde{\sigma}(\tilde{e}) = \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}) = 0$ bulunur. (5.2.38) dan $\tilde{Q}\xi = -2(1 + \tilde{\lambda}^2)\xi$ elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 5.2.2: $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. Karakteristik vektör alanı ξ harmonik ise, M nin her açık ve yoğun alt cümlesinde paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold vardır ve tersine eğer M bir paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold ise M nin karakteristik vektör alanı ξ harmonik vektör alanıdır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: Teoremin ispatı uygun bir (yarı)-ortonormal baza göre, 3 durum için verilecektir.

1. Durum: $\tilde{h}$, h_1 tipinde olsun.

ξ harmonik vektör alanı olduğundan, $\tilde{Q}$ nun karakteristik vektörü ξ dir. Böylece, $\tilde{\sigma} = 0$ elde edilir. (5.2.11) denkleminde $s = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \tilde{h}$ yazılırsa

$$\tilde{Q} = a_1 I + b_1 \eta \otimes \xi - 2b\tilde{h} - \frac{\xi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}} \tilde{\varphi}\tilde{h} \tag{5.2.47}$$

elde edilir.

(5.2.1) denkleminde $Z = \xi$ yazıp (5.2.48) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)\xi = {} & (\tilde{\lambda}^2 - 1)\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) - 2b\big(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y\big) \\ & - \frac{\xi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}}\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\big) \end{aligned}$$

$\tilde{\kappa} = \frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}$, $\tilde{\mu} = -2b$, $\tilde{\nu} = -\frac{\xi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}}$ olacak şekilde elde edilir.

Böylece, bu tip için $\tilde{\kappa} > -1$ olduğu açıktır ve (5.2.48) denklemi kullanılarak $\tilde{Q}\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\tilde{Q} = 2\tilde{\mu}\tilde{h}\tilde{\varphi} - 2\tilde{\nu}\tilde{h}$ eşitliği bulunur.

2. Durum: $\tilde{h}$, h_2 tipinde olsun.

(5.2.25) denkleminde $\tilde{\sigma} = 0$ yazılırsa

$$\tilde{Q} = \ddot{a}I + \ddot{b}\eta \otimes \xi - 2a_2\tilde{h} \tag{5.2.48}$$

elde edilir. Bu denklem M deki herhangi vektör alanları için

$$\tilde{Q}\xi = \tilde{S}(\xi,\xi)\xi \tag{5.2.49}$$

eşitliğini sağlar.

(5.2.1) denkleminde $Z = \xi$ yazılırsa herhangi X vektör alanı için

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)\xi = &-\tilde{S}(X,\xi) + \tilde{S}(Y,\xi) - \eta(X)\tilde{Q}Y + \eta(Y)\tilde{Q}X \\ &+ \frac{r}{2}(\eta(X)Y - \eta(Y)X)\end{aligned} \tag{5.2.50}$$

bulunur.

(5.2.48) ve (5.2.49) denklemleri (5.2.50) de kullanılırsa

$$\tilde{R}(X,Y)\xi = -(\eta(Y)X - \eta(X)Y) - 2a_2\left(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y\right)$$

$\tilde{\kappa} = \dfrac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}$, $\tilde{\mu} = -2a_2$ olacak şekilde elde edilir.

Böylece, bu tip için $\tilde{\kappa} = -1$ olduğu açıktır ve (5.2.49) denklemi kullanılarak $\tilde{Q}\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\tilde{Q} = 2\tilde{\mu}\tilde{h}\tilde{\varphi}$ eşitliği bulunur.

3. Durum: $\tilde{h}$, h_3 tipinde olsun.

M, bir H-paradeğme metrik manifold olduğundan $\tilde{\sigma}=0$ dır. (5.2.37) denkleminde $s=\frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{h}$ yazılırsa

$$\tilde{Q}=\bar{a}I+\bar{b}\,\eta\otimes\xi-2\tilde{b}_3\tilde{h}-\left(\frac{\xi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}}\right)\tilde{\varphi}\tilde{h} \tag{5.2.51}$$

elde edilir. Bu denklem M deki herhangi vektör alanları için

$$\tilde{Q}\xi=\tilde{S}(\xi,\xi)\xi \tag{5.2.52}$$

eşitliğini sağlar.

(5.2.1) denkleminde $Z=\xi$ yazılırsa herhangi X vektör alanı için

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)\xi&=-\tilde{S}(X,\xi)+\tilde{S}(Y,\xi)-\eta(X)\tilde{Q}Y+\eta(Y)\tilde{Q}X\\&\quad+\frac{r}{2}(\eta(X)Y-\eta(Y)X)\end{aligned} \tag{5.2.53}$$

bulunur.

(5.2.51) ve (5.2.52) denklemleri (5.2.53) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)\xi&=(-1-\tilde{\lambda}^2)\big(\eta(Y)X-\eta(X)Y\big)-2\tilde{b}_3\big(\eta(Y)\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{h}Y\big)\\&\quad-\frac{\xi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}}\big(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y\big)\end{aligned}$$

$\tilde{\kappa}=\frac{\tilde{S}(\xi,\xi)}{2}$, $\tilde{\mu}=-2\tilde{b}_3$, $\tilde{\nu}=-\frac{\xi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}}$ olacak şekilde elde edilir.

Böylece, bu tip için $\tilde{\kappa}<-1$ olduğu açıktır ve (5.2.51) denklemi kullanılarak $\tilde{Q}\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}\tilde{Q}=-2\tilde{\mu}\tilde{h}\,\tilde{\varphi}-2\tilde{\nu}\tilde{h}$ eşitliği bulunur.

Tersine M bir paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold olsun. Teorem 5.2.1 ve (5.1.8) denklemi kullanılarak ξ nin harmonik vektör alanı olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Yardımcı Teorem 5.2.8: $(M,\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik manifold olsun. $\tilde{h}$ kanonikal formu, herhangi bir noktanın açık komşuluğunda sabittir. Yani, aynı formu korur. $\tilde{h}$ kanonikal formu, bir açık alt kümede farklı noktalarda farklı formlarda bulunamaz (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: U_1, M nin $\tilde{h} \neq 0$ olacak şekildeki açık alt kümesi ve $p,q \in U_1,\ p \neq q$ olsun.

1. Durum: $T_pM_1^3$ de $\tilde{h}_p$, kanonikal form (I) e sahip olsun. Bu durumda, bir ortonormal $\{\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e},\xi\}$ $\tilde{\varphi}$ -bazı $-\tilde{g}(\tilde{e},\tilde{e}) = \tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e}) = \tilde{g}(\xi,\xi) = 1$ ve

$$\tilde{h}_p(\tilde{e}) = \tilde{\lambda}(p)\tilde{e},\ \tilde{h}_p(\tilde{\varphi}\tilde{e}) = -\tilde{\lambda}(p)\tilde{\varphi}\tilde{e},\ \tilde{h}_p\xi = 0 \tag{5.2.54}$$

olacak şekilde vardır.

$T_qM_1^3$ de $\tilde{h}_q$, kanonikal form (II) ye sahip olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 5.2.3 yardımıyla q nun bir komşuluğunda

$$\tilde{h}_q e_1 = e_2, \tilde{h}_q e_2 = 0,\ \tilde{h}_q e_3 = 0 \ \ ve \ \ \tilde{\varphi}e_1 = e_1,\ \tilde{\varphi}e_2 = -e_2,\ \tilde{\varphi}e_3 = 0,\ \xi = e_3 \text{ ve}$$

$$\tilde{g}(e_1,e_1) = \tilde{g}(e_2,e_2) = \tilde{g}(e_1,e_3) = \tilde{g}(e_2,e_3) = 0,\ \tilde{g}(e_1,e_2) = \tilde{g}(e_3,e_3) = 1$$

olacak şekilde bir yarı-ortonormal $\{e_1,e_2,e_3\}$ bazı inşa edilebilir.

$$\tilde{E} = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}},\ \tilde{\varphi}\tilde{E} = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \tag{5.2.55}$$

yazılarak $-\tilde{g}(\tilde{E},\tilde{E}) = \tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{E},\tilde{\varphi}\tilde{E}) = \tilde{g}(\xi,\xi) = 1$ *ve*

$$\widetilde{h}_q \widetilde{E} = \widetilde{h}_q \widetilde{\varphi}\widetilde{E} = \frac{1}{2}(-\widetilde{E} + \widetilde{\varphi}\widetilde{E}) \tag{5.2.56}$$

olacak şekilde bir ortonormal baz elde edilir.

Böylece $T_p M = span\{\widetilde{e}, \widetilde{\varphi}\widetilde{e}, \xi\}$ ve $T_q M = span\{\widetilde{E}, \widetilde{\varphi}\widetilde{E}, \xi\}$ teğet uzayları aynı boyut ve indekse sahiptir. O halde, $T_p M$ den $T_q M$ ye $F(p) = q$ ve

$$F_*(\widetilde{e}) = \widetilde{E},\ F_*(\widetilde{\varphi}\widetilde{e}) = \widetilde{\varphi}\widetilde{E},\ F_*(\xi) = \xi \tag{5.2.57}$$

olacak şekilde bir F_* lineer izometri mevcuttur.

(5.2.54) ve (5.2.57) denklemlerinden yararlanılarak

$$F_*(\widetilde{h}_p \widetilde{e}) = \widetilde{\lambda}(q)\widetilde{E},\ F_*(\widetilde{h}_p \widetilde{\varphi}\widetilde{e}) = -\widetilde{\lambda}(q)\widetilde{\varphi}\widetilde{E} \tag{5.2.58}$$

bulunur.

(5.2.56) ve (5.2.58) dan

$$0 = iz\widetilde{h}_q^{\,2} = 2\widetilde{\lambda}^2(q)$$

bulunur ki bunun anlamı $\widetilde{\lambda}(q) = 0$ olmasıdır. O halde $q \in U_1$ seçilmesi ile çelişki elde edilir.

2. Durum: $T_p M_1^3$ de $\widetilde{h}_p$, kanonikal form (I) e sahip olsun. $T_q M_1^3$ de $\widetilde{h}_q$, kanonikal form (III) e sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda, q noktasının bir komşuluğunda bir lokal ortonormal $\{\widetilde{f}_1, \widetilde{\varphi}\widetilde{f}_1, \xi\}$ $\widetilde{\varphi}$ -bazı $-\widetilde{g}(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_1) = \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{f}_1, \widetilde{\varphi}\widetilde{f}_1) = \widetilde{g}(\xi, \xi) = 1$ ve

$$\widetilde{h}_q(\widetilde{f}_1) = \widetilde{\lambda}_1(q)\widetilde{\varphi}\widetilde{f}_1,\ \widetilde{h}_q(\widetilde{\varphi}\widetilde{f}_1) = -\widetilde{\lambda}_1(q)\widetilde{f}_1$$

olacak şekilde inşa edilebilir. $T_p M_1^3 = span\{\widetilde{e}, \widetilde{\varphi}\widetilde{e}, \xi\}$ ve $T_q M_1^3 = span\{\widetilde{f}_1, \widetilde{\varphi}\widetilde{f}_1, \xi\}$ teğet uzayları aynı boyut ve indekse sahiptir. O halde, $T_p M_1^3$ den $T_q M_1^3$ ye $T(p) = q$ ve

$$T_*(\tilde{e}) = \tilde{f}_1,\ T_*(\tilde{\varphi}\tilde{e}) = \tilde{\varphi}\tilde{f}_1,\ T_*(\xi) = \xi \tag{5.2.59}$$

olacak şekilde bir T_* lineer izometri mevcuttur. O halde

$$T_*(\tilde{h}_p\tilde{e}) = \tilde{\lambda}(q)\tilde{f}_1,\ T_*(\tilde{h}_p\tilde{\varphi}\tilde{e}) = -\tilde{\lambda}(q)\tilde{\varphi}\tilde{f}_1 \tag{5.2.60}$$

bulunur.

(5.2.59) ve (5.2.60) den

$$-2\tilde{\lambda}_1^{\,2}(q) = iz\tilde{h}_q^{\;2} = 2\tilde{\lambda}^2(q)$$

bulunur ki bunun anlamı $\tilde{\lambda}_1(q) = \tilde{\lambda}(q) = 0$ olmasıdır. O halde $q \in U_1$ seçilmesi ile çelişki elde edilir.

3. Durum: $T_pM_1^3$ de $\tilde{h}_p$, kanonikal form (III) e sahip olsun. Bu durumda, bir ortonormal $\{\tilde{e}, \tilde{\varphi}\tilde{e}, \xi\}$ $\tilde{\varphi}$-bazı $-\tilde{g}(\tilde{e},\tilde{e}) = \tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{e},\tilde{\varphi}\tilde{e}) = \tilde{g}(\xi,\xi) = 1$ ve

$\tilde{h}_p(\tilde{e}) = \tilde{\lambda}(p)\tilde{\varphi}\tilde{e},\ \tilde{h}_p(\tilde{\varphi}\tilde{e}) = -\tilde{\lambda}(p)\tilde{e},\ \tilde{h}_p\xi = 0$ olacak şekilde vardır. $T_qM_1^3$ de $\tilde{h}_q$, kanonikal form (II) ye sahip olduğu kabul edilsin. 1. Durum daki ispata benzer olarak,

$$0 = iz\tilde{h}_q^{\;2} = 2\tilde{\lambda}^2(q)$$

bulunur ki bunun anlamı $\tilde{\lambda}(q) = 0$ olmasıdır. O halde $q \in U_1$ seçilmesi ile çelişki elde edilir. İspat tamamlanır. □

Bu bölüm aşağıda verilen teorem ile bitirilecektir.

Teorem 5.2.3: $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$, 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold olsun. $\xi : (M, \tilde{g}) \to (T_1M, g^s)$ karakteristik vektör alanı harmonik dönüşüm ise paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-manifold, paradeğme $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu})$-manifold olur. Yani $\tilde{\nu} = 0$ dır (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.1.6) denklemi ve eğrilik tensörünün özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\xi,W)X &= \tilde{\kappa}\big(\tilde{g}(X,W)\xi-\eta(X)W\big)+\tilde{\mu}\big(\tilde{g}(\tilde{h}X,W)\xi-\eta(X)\tilde{h}W\big)\\ &\quad+\tilde{\nu}\big(\tilde{g}(\tilde{\varphi}\tilde{h}X,W)\xi-\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}W\big)\end{aligned} \tag{5.2.61}$$

elde edilir. ξ karakteristik vektör alanı harmonik vektör alanı olduğundan (5.1.4) nolu eşitliği hesaplamak yeterli olacaktır.

1. Durum: $\tilde{\kappa} > -1$ olduğunu varsayalım.

(5.2.2) ve (5.2.3) ve (5.2.61) denklemlerinin (5.1.4) de kullanılmasıyla

$$iz\big[R(\nabla\cdot\xi,\xi)\cdot\big]=(\tilde{\lambda}-1)\tilde{R}(\xi,\tilde{\varphi}\tilde{e})\tilde{e}+(\tilde{\lambda}+1)\tilde{R}(\xi,\tilde{e})\tilde{\varphi}\tilde{e}=2\tilde{\lambda}^2\tilde{\nu}\xi$$

elde edilir. O halde $iz\big[R(\nabla\cdot\xi,\xi)\cdot\big]=0$ olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\nu}=0$ olmasıdır.

2. Durum: $\tilde{\kappa} = -1$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda $\tilde{\nu}=0$ dır. (5.2.43), (5.2.44), (5.2.45) denklemlerinin (5.1.4) de kullanılmasıyla $iz\big[R(\nabla\cdot\xi,\xi)\cdot\big]=0$ elde edilir.

3. Durum: $\tilde{\kappa} < -1$ olduğunu varsayalım.

(5.2.30) ve (5.2.31) denklemlerinin (5.1.4) de kullanılmasıyla

$$iz\big[R(\nabla\cdot\xi,\xi)\cdot\big]=-2\tilde{\lambda}^2\tilde{\nu}\xi$$

elde edilir. O halde $iz\big[R(\nabla\cdot\xi,\xi)\cdot\big]=0$ olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\nu}=0$ olmasıdır.

Böylece ispat tamamlanır. □

5.3. Bir Uygulama

Bu kısımda, $\xi(I_M)=0$ ile verilen Sasakian olmayan $(\kappa,\mu,\nu=sbt)$-değme metrik manifold ile 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold arasında ilişki verilmiştir. $\tilde{\kappa}=-1$ olup para-Sasakian olmayan örnek ve $\tilde{\kappa}>-1$ve $\tilde{\kappa}<-1$olma durumlarına göre 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold örnekleri verilmiştir.

İlk önce 3-boyutlu değme metrik manifoldların özellikleri verilecektir.

(M,φ,ξ,η,g), 3-boyutlu değme metrik manifold olsun. M manifoldunun

$$U=\{p\in M \,|\, h(p)\neq 0\}\subset M$$
$$U_0=\{p\in M \,|\, h(p)=0,\ p\, nin\ bir\ kom.\}\subset M$$

olacak şekilde U ve U_0 açık alt cümleleri göz önüne alınsın.

h nın M de diferensiyellenebilir fonksiyon olmasından dolayı, $U\cup U_0$, M nin açık ve yoğun alt cümlesi olur. Böylece $U\cup U_0$ da sağlanan her özellik M de de sağlanır.

Herhangi $p\in U\cup U_0$ noktası için, p nin bir komşuluğundaki h nın özvektörlerinin bir lokal ortonormal $\{e,\varphi e,\xi\}$ φ-bazı vardır. U da, λ sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $he=\lambda e$ $h\varphi e=-\lambda\varphi e$ eşitlikleri geçerlidir.

Yardımcı Teorem 5.3.1: M manifoldunun U açık alt cümlesinde kovaryant türev için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\nabla_\xi e=a\varphi e,\ \nabla_e e=b\varphi e,\ \nabla_{\varphi e}e=-c\varphi e+(\lambda-1)\xi \tag{5.3.1}$$

$$\nabla_\xi \varphi e=-ae,\ \nabla_e\varphi e=-be+(1+\lambda)\xi,\ \nabla_{\varphi e}\varphi e=ce \tag{5.3.2}$$

$$\nabla_\xi\xi=0,\ \nabla_e\xi=-(1+\lambda)\varphi e,\ \nabla_{\varphi e}\xi=(1-\lambda)e \tag{5.3.3}$$

$$\nabla_\xi h=-2ah\varphi+\xi(\lambda)s \tag{5.3.4}$$

burada a bir diferensiyellenebilir fonksiyondur ve

$$b = \frac{1}{2\lambda}(\varphi e(\lambda) + A),\ A = \eta(Qe) = S(\xi, e) \tag{5.3.5}$$

$$c = \frac{1}{2\lambda}(e(\lambda) + B),\ B = \eta(Q\varphi e) = S(\xi, \varphi e) \tag{5.3.6}$$

$s,\ s\xi = 0,\ se = e,\ s\varphi e = -\varphi e$ olacak şekilde tanımlı bir (1,1)-tipinde bir tensör alanıdır (Gouli-Andreou ve ark. 1998).

Boeckx, Sasakian olmayan (κ, μ)-değme metrik manifoldların bir lokal sınıflandırmasını (κ, μ)-değme metrik manifoldların D_α-homotetik deformasyona göre invaryant kalan

$$I_M = \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{\sqrt{1-\kappa}} \tag{5.3.7}$$

sayısına göre vermiştir (Boeckx 2000).

(κ, μ, ν)-değme metrik manifoldlar için aşağıdaki eşitlikler verilmiştir.

$$h^2 = (\kappa - 1)\varphi^2,\ \kappa \le 1 \tag{5.3.8}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_X \varphi h)Y - (\nabla_Y \varphi h)X &= (1-\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + (1-\mu)(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\ &\quad + \nu(\eta(X)\varphi hY - \eta(Y)\varphi hX)\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

$$\xi(\kappa) = 2\nu(\kappa - 1),\ \xi(\lambda) = \nu(\lambda), \tag{5.3.10}$$

$$\nabla_\xi h = \mu h\varphi + \nu h, \tag{5.3.11}$$

(Koufogiorgos ve ark. 2008).

$\xi(I_M) = 0$ ile verilen Sasakian olmayan (κ, μ, ν)-değme metrik manifoldların bir sınıflandırılması aşağıdaki teorem ile verilmiştir (Küpeli Erken ve Murathan 2014).

Teorem 5.3.1: (M,φ,ξ,η,g), $\xi(I_M)=0$ ve $\nu = sbt \neq 0$ ile verilen Sasakian olmayan (κ,μ,ν)-değme metrik manifold olsun.

1) M nin herhangi noktasında,

$$\mu = 2(1+\sqrt{1-\kappa}),\ veya\ \ \mu = 2(1-\sqrt{1-\kappa})$$

eşitliklerinden biri geçerlidir.

2) M nin herhangi bir p noktasında, $p \in U \subseteq M$ ile verilen $(U,(x,y,z))$ haritası

i) $\kappa,\ \mu$ fonksiyonları sadece x,z değişkenlerine bağlıdır.

ii) Eğer $\mu = 2(1+\sqrt{1-\kappa})$ ya da $(\mu = 2(1-\sqrt{1-\kappa}))$, $\eta,\ \xi,\ \varphi,\ g,h$ tensör alanları $(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ bazına göre

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x},\ \eta = dx - adz,$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & 1+a^2+b^2 \end{pmatrix} \left(ya\,da\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & 1+a^2+b^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a & -ab \\ 0 & b & -1-b^2 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix} \left(ya\,da\ \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -a & ab \\ 0 & -b & 1+b^2 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \right)$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda b \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \left(ya\,da\ h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\lambda \\ 0 & -\lambda & 2\lambda b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

olacak şekilde mevcuttur. Burada,

$$a = 2y + f(z)$$
$$b = -\frac{y^2}{2}\nu - y\frac{f(z)}{2}\nu - \frac{y}{2}\frac{r'(z)}{r(z)} + \frac{2}{\nu}r(z)e^{\nu x} + s(z)$$
$$(ya\ da\ a = -2y + f(z),\ b = \frac{y^2}{2}\nu - y\frac{f(z)}{2}\nu - \frac{y}{2}\frac{r'(z)}{r(z)} + \frac{2}{\nu}r(z)e^{\nu x} + s(z)),$$
$$\lambda = \lambda(x,z) = r(z)e^{\nu x}$$

Şimdi $\xi(I_M) = 0$ ile verilen Sasakian olmayan (κ,μ,ν)-değme metrik manifold ile 3-boyutlu paradeğme metrik manifold arasında ilişki verilsin.

Teorem 3.7.3, 3-boyutlu Sasakian olmayan (κ,μ,ν)-değme metrik manifold için adapte edilip ispat için aynı teknikler kullanılırsa aynı sonuç aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 5.3.2: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun. M nin $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$ kanonikal paradeğme metrik yapısı

$$\tilde{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}h, \qquad \tilde{g} := \frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}d\eta(.,h.) + \eta\otimes\eta \tag{5.3.12}$$

ile verilir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

(M,g) ve $(M,\tilde{g})$ nün Levi-Civita konneksiyonları arasındaki ilişki bir sonraki önerme ile verilmiştir.

Önerme 5.3.1: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun. g ve $\tilde{g}$ nün Levi-Civita konneksiyonları arasındaki ilişki herhangi $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2(1-\kappa)}\varphi h(\nabla_X \varphi h)Y - \frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}\eta(Y)hX - \frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}\eta(X)hY$$

$$-\frac{1}{2}\eta(Y)\varphi hX - \frac{(1-\mu)}{2}\eta(Y)\varphi X - \frac{\nu}{2}\eta(Y)\varphi^2 X$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{1-\kappa}}g(hX,Y) + \sqrt{1-\kappa}g(X,Y) - \sqrt{1-\kappa}\eta(X)\eta(Y) \\ +\frac{(1-\mu)}{2\sqrt{1-\kappa}}g(hX,Y) - g(X,\varphi Y) + X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) \end{pmatrix}\xi \tag{5.3.13}$$

$$-\frac{1}{2}(1-\kappa)\begin{pmatrix} X(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})\varphi^2 Y + Y(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})\varphi^2 X \\ +\frac{1}{(1-\kappa)}g(X,\varphi hY)\varphi hgrad(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}) \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.3.12) ve Koszul formulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = & X\left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}g(Y,\varphi hZ) + \eta(Y)\eta(Z)\right) \\
& + Y\left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}g(X,\varphi hZ) + \eta(X)\eta(Z)\right) \\
& - Z\left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}g(X,\varphi hY) + \eta(X)\eta(Y)\right) \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}g([X,Y],\varphi hZ) + \eta([X,Y])\eta(Z)\right) \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}g([Z,X],\varphi hY) + \eta([Z,X])\eta(Y)\right) \\
& - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}g([Y,Z],\varphi hX) + \eta([Y,Z])\eta(X)\right) \\
& + 2\left[d\eta(X,Z)\eta(Y) + d\eta(Y,Z)\eta(X) - d\eta(X,Y)\eta(Z) + X(\eta(Y))\eta(Z)\right] \\
& + X(\frac{1}{\lambda})g(Y,\varphi hZ) + Y(\frac{1}{\lambda})g(X,\varphi hZ) - Z(\frac{1}{\lambda})g(X,\varphi hY)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi \circ h$ nın g metriğine göre simetrik oluşu ve $\nabla g = 0$ oluşu kullanılırsa

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)=\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}\begin{bmatrix}2g(\varphi h\nabla_X Y,Z)+g((\nabla_X\varphi h)Z,Y)\\ +g((\nabla_Y\varphi h)Z,X)-g((\nabla_Z\varphi h)Y,X)\end{bmatrix}$$
$$+2\left[d\eta(X,Z)\eta(Y)+d\eta(Y,Z)\eta(X)-d\eta(X,Y)\eta(Z)+X(\eta(Y))\eta(Z)\right]$$
$$+X(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})g(Y,\varphi hZ)+Y(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})g(X,\varphi hZ)-Z(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})g(X,\varphi hY)$$

denklemi bulunur.

(5.3.9) denklemi kullanılıp, uzun bir hesap yapıldıktan sonra

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)=g\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}(\varphi h\nabla_X Y+\frac{1}{2}(\nabla_X\varphi h)Y-\frac{(1-\kappa)}{2}\eta(Y)X\\ -\frac{(1-\mu)}{2}\eta(Y)hX+\frac{\nu}{2}\eta(Y)\varphi hX)-\eta(Y)\varphi X-\eta(X)\varphi Y\\ +\frac{1}{2}(X(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})\varphi hY+Y(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})\varphi hX\\ -g(X,\varphi hY)grad(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})),Z\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{1-\kappa}}g\begin{pmatrix}(1-\kappa)g(X,Y)\xi+(1-\mu)g(hY,X)\xi-\nu g(\varphi hY,X)\xi\\ -2\lambda g(X,\varphi Y)\xi+2\lambda X(\eta(Y))\xi,Z\end{pmatrix} \qquad (5.3.14)$$

denklemi elde edilir.

$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi)=\eta(\tilde{\nabla}_X Y)$ olduğundan (5.3.12) ve (5.3.14) denklemleri kullanılarak

$$\varphi h\tilde{\nabla}_X Y=\varphi h\nabla_X Y+\frac{1}{2}(\nabla_X\varphi h)Y-\frac{(1-\kappa)}{2}\eta(Y)X-\frac{(1-\mu)}{2}\eta(Y)hX+\frac{\nu}{2}\eta(Y)\varphi hX$$
$$-\sqrt{1-\kappa}(\eta(Y)\varphi X+\eta(X)\varphi Y)$$
$$+\frac{\sqrt{1-\kappa}}{2}(X(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})\varphi hY+Y(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}})\varphi hX-g(X,\varphi hY)grad(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}))$$
$$+\frac{1-\kappa}{2}(-g(X,Y)+2\eta(X)\eta(Y)-\nu g(\varphi hX,Y)-g(hX,Y))\xi$$

elde edilir.

Bir önceki eşitliğin her iki yanına φh etki ettirilip $\varphi h = -h\varphi$ oluşu ve (5.3.8) denklemi kullanılırsa, istenilen denklem (5.3.13) elde edilmiş olur. □

h ve $\tilde{h}$ arasındaki ilişki aşağıdaki Yardımcı Teorem ile verilmiştir.

Yardımcı Teorem 5.3.2: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun ve $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. O halde

$$\tilde{h} = \frac{1}{2\sqrt{1-\kappa}}((2-\mu)\varphi \circ h + 2(1-\kappa)\varphi) \tag{5.3.15}$$

ile verilir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: (5.3.10) ve (5.3.12) denklemleri ve h ve $\tilde{h}$ operatörlerinin tanımları yardımıyla

$$2\tilde{h} = L_\xi \tilde{\varphi} = L_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa}}h\right) = -\frac{\nu}{\sqrt{1-\kappa}}h + \frac{1}{2\sqrt{1-\kappa}}L_\xi(L_\xi\varphi) \tag{5.3.16}$$

elde edilir.

$\nabla\xi = -\varphi - \varphi h,\ \nabla_\xi\varphi = 0$ eşitlikleri ve $\varphi^2 h = -h$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2\tilde{h} = (L_\xi(L_\xi\varphi))X &= [\xi, L_\xi\varphi X] - L_\xi\varphi[\xi, X] \\
&= [\xi,[\xi,\varphi X]] - 2[\xi,\varphi[\xi,X]] + \varphi[\xi,[\xi,X]] \\
&= \nabla_\xi[\xi,\varphi X] + \varphi[\xi,\varphi X] + \varphi h[\xi,\varphi X] - 2\nabla_\xi\varphi[\xi,X] \\
&\quad - 2(\varphi^2[\xi,X] + \varphi h\varphi[\xi,X]) + \varphi\nabla_\xi[\xi,X] - \varphi(-\varphi[\xi,X] - \varphi h[\xi,X]) \\
&= \nabla_\xi\nabla_\xi\varphi X - \nabla_\xi(-\varphi^2 X - \varphi h\varphi X) + \varphi\nabla_\xi\varphi X - \varphi(-\varphi^2 X - \varphi h\varphi X) \\
&\quad + \varphi h\nabla_\xi\varphi X - \varphi h(-\varphi^2 X - \varphi h\varphi X) - 2\nabla_\xi\varphi\nabla_\xi X + 2\nabla_\xi\varphi(-\varphi X - \varphi hX) \\
&\quad - 2\varphi^2\nabla_\xi X + 2\varphi^2(-\varphi X - \varphi hX) + 2\varphi^2 h\nabla_\xi X - 2\varphi^2 h(-\varphi X - \varphi hX) \\
&\quad + \varphi\nabla_\xi\nabla_\xi X - \varphi\nabla_\xi(-\varphi X - \varphi hX) + \varphi^2\nabla_\xi X - \varphi^2(-\varphi X - \varphi hX) \\
&\quad + \varphi^2 h\nabla_\xi X - \varphi^2 h(-\varphi X - \varphi hX)
\end{aligned}$$

$$= \nabla_\xi \varphi^2 X + \nabla_\xi hX + \nabla_\xi \varphi^2 X - \varphi X - h\varphi X + h\nabla_\xi X - \varphi hX + h^2 \varphi X$$
$$- 2\nabla_\xi \varphi^2 X - 2\nabla_\xi \varphi^2 hX - 2\varphi^2 \nabla_\xi X + 2\varphi X + 2\varphi hX - 2h\nabla_\xi X$$
$$- 2h\varphi X + 2h^2 \varphi X + \varphi^2 \nabla_\xi X + \varphi^2 \nabla_\xi hX + \varphi^2 \nabla_\xi X - \varphi X - \varphi hX$$
$$- h\nabla_\xi X - h\varphi X + h^2 \varphi X$$
$$= 2(\nabla_\xi h)X + 4h^2 \varphi X - 4h\varphi X$$

bulunur. Bu son denklem (5.3.16) da yerine yazılırsa

$$2\tilde{h} = -\frac{\nu}{\sqrt{1-\kappa}} h + \frac{1}{2\sqrt{1-\kappa}} 2(\nabla_\xi h + 4h^2 \varphi - 4h\varphi)$$

elde edilir. Son denklemde (5.3.8) ve (5.3.11) denklemleri kullanılırsa (5.3.15) denklemi elde edilir. □

(M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun. (M,φ,ξ,η,g) de bir lokal ortonormal φ-bazı $\{e,\varphi e,\xi\}$ seçip ve Önerme 5.3.1, Yardımcı Teorem 5.3.2 ve Yardımcı Teorem 5.3.1 kullanılarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.3.2: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun ve $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. O halde aşağıdaki kovaryant türevler geçerlidir.

$$i)\tilde{\nabla}_e e = -\frac{1}{2\lambda} e(\lambda)e + (\lambda + 1 - \frac{\mu}{2})\xi, \quad ii)\tilde{\nabla}_e \varphi e = \frac{1}{2\lambda} e(\lambda)\varphi e + \xi,$$
$$iii)\tilde{\nabla}_e \xi = -e + (\frac{\mu}{2} - 1 - \lambda)\varphi e, \qquad iv)\tilde{\nabla}_{\varphi e} e = \frac{1}{2\lambda} \varphi e(\lambda)e - \xi,$$
$$v)\tilde{\nabla}_{\varphi e} \varphi e = -\frac{1}{2\lambda} \varphi e(\lambda)\varphi e + (\lambda - 1 + \frac{\mu}{2})\xi, \; vi)\tilde{\nabla}_{\varphi e} \xi = -e - (\lambda - 1 + \frac{\mu}{2})\varphi e,$$
$$vii)\tilde{\nabla}_\xi e = -e, \; viii)\tilde{\nabla}_\xi \varphi e = \varphi e,$$
$$ix)[e,\xi] = (\frac{\mu}{2} - 1 - \lambda)\varphi e, \; x)[\varphi e,\xi] = -e - (\lambda + \frac{\mu}{2})\varphi e,$$
$$xi)[e,\varphi e] = -\frac{1}{2\lambda} \varphi e(\lambda)e + \frac{1}{2\lambda} e(\lambda)\varphi e + 2\xi$$

Ayrıca $\widetilde{g}(e,e)=\widetilde{g}(\varphi e,\varphi e)=\widetilde{g}(\varphi e,\xi)=0$ ve $\widetilde{g}(e,\varphi e)=\widetilde{g}(\xi,\xi)=1$ (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

(M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun ve $(\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. $p\in M$ nin bir komşuluğunda bir lokal ortonormal φ-bazı $\{e,\varphi e,\xi\}$ verilsin. O halde $\widetilde{g}(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_1)=-1,\ \widetilde{g}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1)=\widetilde{g}(\xi,\xi)=1$ için $\widetilde{e}_1=\dfrac{e-\varphi e}{\sqrt{2}},\ \widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1=\dfrac{e+\varphi e}{\sqrt{2}}$ olacak şekilde $\{\widetilde{e}_1,\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1=\widetilde{e}_2,\xi\}$ bir ortonormal $\widetilde{\varphi}$-bazı her zaman kurulabilir.

Ayrıca Yardımcı Teorem 5.3.2 den h nın matris formu $\{\widetilde{e}_1,\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\xi\}$ lokal ortonormal bazına göre

$$h=\begin{pmatrix} -1+\frac{\mu}{2} & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1-\frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.17}$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 5.3.2 den yararlanılarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.3.3: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun ve $(\widetilde{\varphi},\xi,\eta,\widetilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. O halde aşağıdaki kovaryant türevler geçerlidir.

$$\begin{aligned}
&i)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_1}\widetilde{e}_1=-\frac{1}{2\lambda}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1)(\lambda)\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1+\lambda\xi,\ \ ii)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_1}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1=-\frac{1}{2\lambda}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1)(\lambda)\widetilde{e}_1+(2-\frac{\mu}{2})\xi,\\
&iii)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_1}\xi=\lambda\widetilde{e}_1+(\frac{\mu}{2}-2)\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\ \ iv)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1}\widetilde{e}_1=-\frac{1}{2\lambda}\widetilde{e}_1(\lambda)\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1-\frac{\mu}{2}\xi,\\
&v)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1=-\frac{1}{2\lambda}\widetilde{e}_1(\lambda)\widetilde{e}_1+\lambda\xi,\ vi)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1}\xi=-\frac{\mu}{2}\widetilde{e}_1-\lambda\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\\
&vii)\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{e}_1=-\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\ \ viii)\widetilde{\nabla}_{\xi}\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1=-\widetilde{e}_1,\\
&ix)[\widetilde{e}_1,\xi]=\lambda\widetilde{e}_1+(\frac{\mu}{2}-1)\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\ \ x)[\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\xi]=(1-\frac{\mu}{2})\widetilde{e}_1-\lambda\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1,\\
&xi)[\widetilde{e}_1,\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1]=-\frac{1}{2\lambda}(\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1)(\lambda)\widetilde{e}_1+\frac{1}{2\lambda}\widetilde{e}_1(\lambda)\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_1+2\xi
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Önerme 5.3.4: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan ve $\xi(I_M)=0$ ile verilen değme metrik $(\kappa,\mu,\nu=sbt.)$-manifold ve $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı olsun. O halde aşağıdaki eşitlik verilebilir.

$$\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{h}=2\tilde{h}\tilde{\varphi}+\nu\tilde{h} \tag{5.3.19}$$

(Küpeli Erken ve Murathan 2013).

İspat: $\xi(\mu)=\nu(\mu-2)$ ve $\xi(\lambda)=\nu\lambda$ olduğu dikkate alınarak ve (5.3.17), (5.3.18) denklemlerinden yararlanılarak istenen denklem elde edilir. □

(M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan ve $\xi(I_M)=0$ ile verilen değme metrik (κ,μ,ν)-manifold olsun ve $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. $\tilde{\nabla}_Y\xi=-\tilde{\varphi}Y+\tilde{\varphi}\tilde{h}Y$ nin diferensiyelinden elde edilen

$$\tilde{R}(X,Y)\xi=-(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi})Y+(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi})X+(\tilde{\nabla}_X\tilde{\varphi}\tilde{h})Y-(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\varphi}\tilde{h})X$$

denklemi ve (5.3.18) kullanılarak uzun bir hesap yapılıktan sonra

$$\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)\xi=\left(\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu}{2}-1)\tilde{e}_1(\lambda)-\frac{1}{2}\tilde{e}_1(\mu)\right)\tilde{e}_1+\left(\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu}{2}-1)(\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)(\lambda)-\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)(\mu)\right)\tilde{\varphi}\tilde{e}_1 \tag{5.3.20}$$

denklemi elde edilir.

Teorem 5.3.1 ve $\tilde{e}_1=\dfrac{e-\varphi e}{\sqrt{2}}$, $\tilde{\varphi}\tilde{e}_1=\dfrac{e+\varphi e}{\sqrt{2}}$ eşitlikleri (5.3.20) de kullanılırsa $\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)\xi=0$ elde edilir. (5.2.1) denklemi kullanılırsa

$$\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)\xi=-\tilde{\sigma}(\tilde{e}_1)\tilde{\varphi}\tilde{e}_1+\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)\tilde{e}_1 \tag{5.3.21}$$

elde edilir. $\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)\xi=0$ ile (5.3.21) denklemi karşılaştırılırsa

$$\tilde{\sigma}(\tilde{e}_1)=\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)=0 \tag{5.3.22}$$

bulunur. O halde ξ, $\tilde{Q}$ Ricci operatörünün bir karakteristik vektörüdür.

Uyarı 5.3.1: (5.1.2) ve (5.3.18) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla}\xi &= -\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_1}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_1}\xi+\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_1}\tilde{e}_1}\xi+\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}_1}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}_1}\xi-\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{\tilde{\varphi}\tilde{e}_1}\tilde{\varphi}\tilde{e}_1}\xi \\
&=\left(\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu}{2}-1)(\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)(\lambda)-\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}\tilde{e}_1)(\mu)\right)\tilde{e}_1+\left(\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu}{2}-1)\tilde{e}_1(\lambda)-\frac{1}{2}\tilde{e}_1(\mu)\right)\tilde{\varphi}\tilde{e}_1 \\
&\quad+\left((2-\frac{\mu}{2})^2+\frac{\mu^2}{4}-2\lambda^2\right)\xi
\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

bulunur. Tekrar Teorem 5.3.1 ve $\tilde{e}_1=\dfrac{e-\varphi e}{\sqrt{2}}$, $\tilde{\varphi}\tilde{e}_1=\dfrac{e+\varphi e}{\sqrt{2}}$ eşitlikleri (5.3.23) denkleminde kullanılırsa, uzun bir hesap yapıldıktan sonra

$$\tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla}\xi=2\xi \tag{5.3.24}$$

elde edilir. (5.3.24) denkleminden de ξ vektör alanının (M,φ,ξ,η,g) de bir harmonik vektör alanı olduğu sonucuna ulaşılır.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3.3: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan ve $\xi(I_M)=0$ ile verilen değme metrik $(\kappa,\mu,\nu=sbt.)$-manifold olsun ve $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. O halde ξ, $\tilde{Q}$ Ricci operatörünün bir karakteristik vektörüdür (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

Teorem 5.3.3 ve Teorem 5.2.2 nin 3. Durumunun ispatındaki aynı prosedür kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3.4: (M,φ,ξ,η,g) Sasakian olmayan ve $\xi(I_M)=0$ ile verilen değme metrik $(\kappa,\mu,\nu=sbt.)$-manifold olsun ve $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M üzerine indirgenen kanonikal paradeğme metrik yapısı Teorem 5.3.2 deki gibi verilsin. $(M,\tilde{g})$nin Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensör alanı

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)\xi &= (\kappa-2)(\eta(Y)X-\eta(X)Y)+2(\eta(Y)\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{h}Y)\\ &\quad -\nu(\eta(Y)\tilde{\varphi}\tilde{h}X-\eta(X)\tilde{\varphi}\tilde{h}Y)\end{aligned}$$

ile verilir (Küpeli Erken ve Murathan 2013).

$\tilde{\kappa}>-1$, $\tilde{\kappa}=-1$ ve $\tilde{\kappa}<-1$ olma durumlarına göre 3-boyutlu paradeğme metrik $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu},\tilde{\nu})$-manifold örnekleri verilecektir.

Örnek 5.3.1: 3-boyutlu

$$M=\{(x,y,z)\in R^3 \,|\, 2y+z\neq 0, z\neq 0\}$$

manifoldu ve

$$e_1=\frac{\partial}{\partial x},\ e_2=\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=(2y+z)\frac{\partial}{\partial x}-(2xz-\frac{1}{2z}y)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları verilsin.

$\xi=\dfrac{\partial}{\partial x}$ karakteristik vektör alanı ile verilen $\eta=dx-(2y+z)dz$ 1-formu M üzerinde bir değme yapı tanımlar. $\tilde{\varphi}e_1=0$, $\tilde{\varphi}e_2=e_3$ ve $\tilde{\varphi}e_3=e_2$ olarak tanımlansın. $\tilde{g}$ Lorentz metriği $\tilde{g}(e_1,e_1)=-\tilde{g}(e_2,e_2)=\tilde{g}(e_3,e_3)=1$ ve $\tilde{g}(e_1,e_3)=\tilde{g}(e_2,e_3)=0$, $\tilde{g}(e_1,e_2)=0$ olacak şekilde tanımlansın. O halde $(\tilde{\varphi},\xi,\eta,\tilde{g})$, M de bir paradeğme metrik yapı tanımlar. Yardımcı Teorem 5.2.1 kullanılarak M nin $\tilde{\kappa}=-1+z^2$, $\tilde{\mu}=2(1-z)$ ile verilen bir genelleştirilmiş $(\tilde{\kappa},\tilde{\mu})$ - paradeğme metrik manifold olduğu görülür.

Örnek 5.3.2: (x, y, z), R^3 de kartezyen koordinatlar olmak üzere ve 3-boyutlu

$$M = \{(x, y, z) \in R^3 \,|\, 2y - z \neq 0\}$$

manifoldu ve

$$e_1 = (-2y+z)\frac{\partial}{\partial x} + (x-2y-z)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},\ e_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ e_3 = \xi = \frac{\partial}{\partial x}$$

vektör alanları verilsin.

$\tilde{g}$ yarı-Riemann metriği ve (1,1) tipindeki $\tilde{\varphi}$ -tensör alanı

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2y-z}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2y-z}{2} & \frac{1}{2} & (-2y+z)^2 - (x-2y-z) \end{pmatrix},\ \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2y+z \\ 0 & -1 & x-2y-z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde verilsin. O halde

$$\tilde{g}(e_1, e_1) = \tilde{g}(e_2, e_2) = \tilde{g}(e_1, e_3) = \tilde{g}(e_2, e_3) = 0 \ \text{ ve } \ \tilde{g}(e_1, e_2) = \tilde{g}(e_3, e_3) = 1$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ bazına göre

$$\eta = dx + (2y-z)dz \ \text{ ve } \ \tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Kısa bir hesap yapıldıktan sonra,

$$\tilde{R}(X,Y)\xi = -(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + 2(\eta(Y)\tilde{h}X - \eta(X)\tilde{h}Y)$$

elde edilir. Sonuç olarak M bir $(-1,2,0)$-paradeğme metrik manifolddur.

Uyarı 5.3.2: Örnek 5.3.2 literatürde bilinen R^3de ki $\tilde{\kappa} = -1$ *ve* $\tilde{h} \neq 0$ olan ilk sayısal örnektir.

(Koufogiorgos ve ark. 2008) de aşağıdaki örneği oluşturmuşlardır.

Örnek 5.3.3: 3-boyutlu

$$M = \left\{(x,y,z) \in R^3 \middle| 2x + e^{y+z} > 0, y \neq z\right\}$$

manifoldu ve

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$e_2 = \left(-\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{z(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}}{y-z} + \frac{(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}}{y-z}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$+\left(\frac{y(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}}{z-y} + \frac{(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}}{z-y}\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$e_3 = \left(\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{z(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}}{z-y} + \frac{(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}}{y-z}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$+\left(\frac{y(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}}{y-z} + \frac{(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}}{z-y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları verilsin.

η, e_1 e dual olan 1-form olsun ve değme Riemann yapı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\xi = e_1, \varphi e_1 = 0, \varphi e_2 = e_3 \ ve \ \varphi e_3 = -e_2,$$
$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij},\ i, j \in \{1,2,3\}$$

Sonuç olarak $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, nin $\kappa = 1 - \frac{1}{(2x+e^{y+z})^2}, \mu = 2 \ ve \ \nu = \frac{-2}{(2x+e^{y+z})}$ ile verilen bir (κ, μ, ν)-değme metrik manifold olduğu görülür.

(5.3.12) kullanılarak paradeğme yapı aşağıdaki gibi inşa edilebilir.

$$\tilde{e}_1 = \xi,\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3),\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3),\ \tilde{\varphi}\tilde{e}_1 = 0, \tilde{\varphi}\tilde{e}_2 = \tilde{e}_3\ ve\ \ \tilde{\varphi}\tilde{e}_3 = \tilde{e}_2$$

$$\tilde{g}(e_1,e_1) = -\tilde{g}(e_2,e_2) = \tilde{g}(e_3,e_3) = 1,\ \tilde{g}(e_1,e_3) = \tilde{g}(e_2,e_3) = \tilde{g}(e_1,e_2) = 0$$

Ayrıca, $\tilde{h}$ nın matris formu, $\lambda = \sqrt{1-\kappa}$ olmak üzere

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kısa bir hesap yapıldıktan sonra, $(M, \tilde{\varphi}, \xi, \eta, \tilde{g})$, nin $\tilde{\kappa} = \kappa - 2,\ \tilde{\mu} = 2\ ve\ \tilde{\nu} = -\nu$ ile verilen bir $(\tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$-paradeğme metrik manifold olduğu görülür

Uyarı 5.3.3: Örnek 5.3.3 de ν sabit olmayan diferensiyellenebilir fonksiyondur.

Uyarı 5.3.4: ν sabit fonksiyon olarak seçilirse $(\tilde{\kappa} < -1,\ \tilde{\mu} = 2\ ve\ \tilde{\nu} = -\nu)$-paradeğme metrik manifoldların bir ailesi elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Abbassi, M.T.K., Calvaruso, G., Perrone, D. 2009. Harmonicity of unit vector fields with respect to Riemannian g-natural metrics. *Diff. Geom. Appl.*, 27: 157-169.

Adati, T., Miyazawa, T. 1977. Some Properties of P-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions. *Tensor, N.S.*, 33: 173-178.

Alekseevsky, D.V., Cortes, V., Galaev, A. S., Leistner T. 2009. Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy**.** *J. Reine Angew. Math.*, 635: 23-69.

Alekseevsky, D.V., Medori, C., Tomassini A. 2006. Maximally homogeneous para-CR manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 30: 1-27.

Bejancu, A., Duggal, K.L. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications., Kluwer Academic Publishers, Boston.

Blair, D.E. 2010. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Second edition, Progress in Mathematics 203, Birkhauser, Boston.

Blair, D.E., Koufogiorgos, T., Papantoniou, B.J. 1995. Contact metric manifolds satisfying a nullity condition. *Israel J. Math.*, 91: 189-214.

Boeckx, E. 2000. A full classification of contact metric (κ,μ)-spaces. *Illinois J. Math.*, 44: 212-219.

Brickell, F., Clark, R.S. 1970. Differentiable Manifolds, V. N. Reinhold Co., London, New York.

Bucki, D., Miernowski, A. 1985. Almost r-Paracontact Connections, *Acta Math.Hung.*, 45(3-4), 327-336.

Calvaruso, G. 2011a. Harmonicity properties of invariant vector fields on three-dimensional Lorentzian Lie groups. *J. Geom. Phys.*, 61: 498-515.

Calvaruso, G. 2011b. Homogeneous paracontact metric three-manifolds. *Illinois J. Math*, 55: 697-718.

Calvaruso, G. 2012. Harmonicity of vector fields on four-dimensional generalized symmetric spaces. *Cent. Eur. J. Math.*, 10(2): 411-425.

Calvaruso, G., Perrone, D. 2013. H-contact semi-Riemannian manifolds. *J.Geom. Phys.*, 71: 11-21.

Calvaruso, G., Perrone, D. Geometry of H-paracontact metric manifolds. *arXiv: 1307.7662v1.*

Cappelleti Montano, B. 2005. Bi-Legendrian connections. *Ann. Polon. Math.*, 86: 79-95.

Cappelleti Montano, B. 2009a. Bi-Legendrian structures and paracontact geometry. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys*., 6: 487-504.

Cappelleti Montano, B. 2009b. The foliated structure of contact metric (κ,μ)-spaces. *Illinois J. Math*., 53: 1157-1172.

Cappelleti Montano, B. 2010a. Some remark on the generalized Tanaka-Webster connection of a contact metric manifold. *Rocky Mountain J. Math*., 40: 1009-1037.

Cappelleti Montano, B. 2010b. Bi-paracontact structures and Legendre foliations. *Kodai Math. J*., 33: 473-512.

Cappelleti Montano, B., Di Terlizzi, L. 2008. Contact metric (κ,μ)-spaces as bi-Legendrian manifolds. *Bull. Aust. Math. Soc*., 77: 373-386.

Cappelleti Montano, B., Di Terlizzi, L. 2010. Geometric structures associated to a contact metric (κ,μ)-space. *Pacific J. Math*., 246(2): 257-292.

Cappelletti Montano, B., Küpeli Erken, İ., Murathan, C. 2012. Nullity Conditions in Paracontact Geometry. *Differential Geometry and its applications*. 30(6): 665-693.

Cortes, V., Mayer, C., Mohaupt, T., Saueressing, F. 2004. Special geometry of Euclidean supersimmetry 1. Vector multiplets. *J. High Energy Phys.,* 03: 028, 73 pp.

Cortes, V., Lawn, M. A., Schafer, L. 2006. Affine hyperspheres associated to special para-Kähler manifolds. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*., 3: 995-1009.

Dragomir, S., Perrone, D. 2012. Harmonic Vector Fields. Elsevier, Inc., Amsterdam. xiv+508 pp. ISBN: 978-0-12-415826-9.

Erdem, S. 2002. On almost (para)contact (hyperbolic) metric manifolds and harmonicity of (ϕ,ϕ′)-holomorphic maps between them. *Houston J. Math*., 28: 21-45.

Etnyre, J. B. 2002. Introductory lectures on contact geometry, Topology and geometry of manifolds(Athens, GA, 2001), 81-107, Proc. Sympos. Pure Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

Gosh, A., Sharma, R., Cho, J.T. 2008. Contact metric manifolds with η-parallel torsion tensor. *Ann. Glob. Anal. Geom*., 34: 287-299.

Gouli-Andreou, F., Xenos, PJ. 1998. On three dimensional contact metric manifolds with $\nabla_\xi \tau = 0$. *J. Geom.*, 62:1-2: 154-165.

Kaneyuki, S., Williams, F.L. 1985. Almost paracontact and parahodge structures on manifolds. *Nagoya Math. J*., 99: 173-187.

Koufogiorgos, T. **Markellos, M., Papantoniou, B. 2008.** The harmonicity of the Reeb vector field on contact metric 3-manifolds. *Pacific J. Math.,* 234: 325-344.

Küpeli Erken, I., Murathan, C. 2013. A complete study of three-dimensional paracontact (κ, μ, ν) -spaces. Arxiv:1305.1511v3.

Küpeli Erken, I., Murathan, C. 2014. $(\kappa, \mu, \nu = const.)$ -contact metric manifolds with $\xi(I_M) = 0$ **.** *Beitr. Algebra Geom.,* 55(1): 43-58.

Libermann, P. 1991. Legendre foliations on contact manifolds. *Different. Geom. Appl.,* 1: 57-76.

Magid, M. 1985. Lorentzian isoparametric hypersurfaces. *Pacific J. Math.* MR 0783023 118: 165-198.

Olzsak, Z. 1986. Normal Almost Contact Metric Manifolds of Dimension Three. *Annales Polonici Mathematici,* XLVII.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, New York.

Pang, M.Y. 1990. The structure of Legendre foliations. *Trans. Amer. Math. Soc*., 320(2): 417-453.

Perrone, D. 2004. Contact metric manifolds whose characteristic vector field is a harmonic vector field. *Different. Geom. Appl.,* 20(3): 367-378.

Petrov, A.Z. 1969. Einstein spaces. Pergamon Press, Oxford MR 0244912.

Sato, T. 1976. On a Structure Similar to the Almost Contact Structure, *Tensor, N.S.,* 30: 219-224.

Sharfuddin, A., Hussain, S.I. 1977. On Almost Paracontact Manifolds. *Aligarh Bull. Math.,* 7:103-107.

Sharpe, R.W. 1997. Differential Geometry, *Graduate Texts in Math.,* Springer.

Tanno, S. 1989. Variational problems on contact manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc*., 314: 349-379.

Vergara-Diaz, E., Wood, C. M. 2006. Harmonic contact metric structures, *Geom. Dedicata*., 123: 131-151.

Welyczko, J. 2014. Para-CR structures on almost paracontact metric manifolds. *J. Appl. Anal.,* 20(2):105-117.

Yano, K., Kon, M. 1984. Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp., Singapore.

Zamkovoy, S. 2009. Canonical connections on paracontact manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.,* 36: 37-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: İrem KÜPELİ ERKEN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Erzincan, 31/07/1986
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Gazi Anadolu Lisesi, 2000-2004
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2004-2008
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2008-2010

Çalıştığı Kurum ve Yıl	: Uludağ Üniversitesi 2008 – …
İletişim (e–posta)	:iremkupeli@uludag.edu.tr, iremkupeli@hotmail.com

Yayınları: :

- Cappelletti Montano, B., **Küpeli Erken, İ.,** Murathan, C. **2012.** Nullity Conditions in Paracontact Geometry. *Differential Geometry and its applications*,30(6):665-693.

- **Küpeli, İ.,** Murathan, C. **2013.** A Class of 3-dimensional Contact Metric Manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*,10(4):1979-1994.

- **Küpeli Erken, İ.,** Murathan, C. **2013.** A Class of 3-dimensional Almost Cosymplectic Manifolds, *Turkish Journal of Mathematics,* 37(5):884-894.

- **Küpeli Erken, İ.,** Murathan, C. **2014.** $(\kappa,\mu,\nu = const.)$-Contact Metric Manifolds with $\xi(I_M) = 0$, *Beitr. Algebra Geom*., 55(1):43-58.

- **Küpeli Erken, İ.,** Murathan, C. **2014.** On Slant Riemannian Submersions for Cosymplectic Manifolds, *Bulletin of the Korean Mathematical Society,* 51: 1749-1771.

- **Küpeli Erken, İ.,** Dacko, P., Murathan, C. **2015.** Almost α-Paracosymplectic Manifolds, *Jounal of Geometry and Physic*. 88:30-51.

- Murathan, C., **Küpeli Erken, İ. 2015.** Anti-Invariant Riemannian Submersions from Cosymplectic Manifolds, *Filomat*. 29(7): 1429-1444.

- **Küpeli Erken, İ. 2015.** Generalized $(\tilde{\kappa} \neq -1,\mu)$-Paracontact metric Manifolds with $\xi(\tilde{\mu}) = 0$, *International Electronic Journal of Geoemtry,* 8(1):77-93.

- **Küpeli Erken, İ. 2015.** Some classes of 3 dimensional normal almost paracontact metric manifolds, *Honam Mathematical J.,* 37(4): 457-468.

- **Küpeli Erken, İ. 2015.** On normal almost paracontact metric manifolds of dimension 3, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,* 30(5): 777-788.

- Beri, A., **Küpeli Erken, İ.,** Murathan, C., Anti-Invariant Riemannian Submersions from Kenmotsu Manifolds onto Riemannian Manifolds, *Turkish journal of Mathematics,* DOI: 10.3906/mat-1504-47.

- **Küpeli Erken, İ**., Murathan, C., Slant Riemannian Submersions from Sasakian Manifolds, *Arab Journal of Mathematical Sciences,* http://dx.doi.org/10.1016/i.aimsc.2015.12.002.